

Таблица 2

i	0	1	2	3	4	5
a_1^i	0.105069772 0.00673633259	0.112579367 0.0152638889	-0.025218254 -0.0028353175	0.009867725 0.00108597885	-0.002624008 -0.000286210	$v=0$ $v=1$
a_2^i	0.0890423333 0.00205925926	0.227936507 0.0462222222	0.089841272 0.0353015872	-0.0080423333 -0.00440211639	0.001349205 0.000920634920	$v=0$ $v=1$
a_3^i	0.099223215 0.00714375	0.196071420 0.030375	0.220178580 0.0969107142	0.090714280 0.0485357143	-0.006830350 -0.0032544643	$v=0$ $v=1$
a_4^i	0.085417992 -0.00260740741	0.233650789 0.0568888889	0.157460322 0.0528253967	0.250582011 0.157121693	0.074920641 0.0573968254	$v=0$ $v=1$
a_5^i	0.128265556 0.036603023	0.124007938 -0.0434027778	0.310019841 0.192212301	0.082671958 0.004133606	0.294518055 0.252666165	$v=0$ $v=1$
c_1^i	-591/180	-5/12	5	-5/3	5/12	-1/20
c_2^i	167/120	-5	5/6	10/3	-5/8	1/15
c_3^i	-157/120	15/4	-15/2	10/3	15/8	-3/20
c_4^i	38/15	-20/3	10	-40/3	20/3	4/5
c_5^i	-149/12	125/4	-125/3	125/3	-125/4	149/12

при линейном изменении энтальпии стенки по ее длине. Начальные профили u и H задавались параболой шестой степени, $M_0 = 0.1$. На этом графике приведены также зависимости h_w / h_0 и H_0 / h_0 от x^2 .

Поступило 1 IV 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Williams J. C. Viscous Compressible and Incompressible Flow in Slender Channels. AIAA Journal, 1963, vol. 1, No. 1.
2. Жилин Ю. Л. Законы подобия для истечения газа в тонкое гиперзвуковое сопло. Инж. ж., 1963, т. 3, № 4.
3. Доронницын А. А. Об одном методе численного решения некоторых нелинейных задач аэрогидродинамики. Тр. III Всесоюз. матем. съезда, 1956, т. 3, Изд-во АН СССР, 1959.
4. Белоцерковский О. М., Чушкин П. И. Численный метод интегральных соотношений. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1962, т. 2, № 5.

ТЕПЛОБМЕН ПРИ ТРЕХСЛОЙНОМ ТЕЧЕНИИ ЖИДКОСТИ В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ

Э. Г. Синайский (Москва)

Рассматривается теплообмен при трехслойном течении жидкости, симметричном относительно оси x , в плоском канале. Предполагается, что жидкость несжимаемая, скорости в каждом слое постоянны, а линии раздела слоев — прямые, параллельные оси канала. Сначала исследуется теплообмен за счет теплопроводности. Находятся распределение температуры в каждом слое и тепловой поток на линии раздела. Затем решается задача о теплообмене за счет излучения и теплопроводности. Так как эффективный коэффициент теплопроводности сильно зависит от температуры, то получающиеся уравнения нелинейны. Решение находится приближенным методом интегральных соотношений [1, 2]. Определяются температура и тепловой поток на линии раздела.

1. Рассмотрим теплообмен за счет теплопроводности в трехслойном потоке несжимаемой жидкости, симметричном относительно оси x , в плоском канале ($x > 0$, $|y| < h$), стенки которого поддерживаются при постоянной температуре T_w . Скорости жидкости в каждом слое постоянны и различны. Линии раздела слоев считаются прямыми $y = \pm y_0$. В силу симметрии будем рассматривать только область $y \geq 0$. Распределение температуры в жидкости определим из следующей краевой задачи:

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial \eta^2} \quad (0 < \eta < \eta_0), \quad \beta \frac{\partial \theta_2}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial \eta^2} \quad (\eta_0 < \eta < 1) \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} \theta_1 = 0 \quad (0 < \eta < \eta_0), \quad \theta_2 = 0 \quad (\eta_0 < \eta < 1) \quad \text{при } \xi = 0 \\ \partial\theta_1 / \partial\eta = 0 \quad \text{при } \eta = 0, \quad \theta_2 = 1 \quad \text{при } \eta = 1 \\ (1 - \theta_1) = \alpha[1 - \theta_2(1 - \theta_w)], \quad \varepsilon\alpha(1 - \theta_w)\partial\theta_2 / \partial\eta = \partial\theta_1 / \partial\eta \quad \text{при } \eta = \eta_0 \\ \xi = \frac{x}{P_1 h}, \quad \eta = \frac{y}{h}, \quad \theta_1 = \frac{T_{01} - T_1}{T_{01}}, \quad \theta_2 = \frac{T_{02} - T_2}{T_{02} - T_w} \\ \alpha = \frac{T_{02}}{T_{01}}, \quad \varepsilon = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}, \quad \beta = \frac{P_2}{P_1}, \quad \theta_w = \frac{T_w}{T_{02}}, \quad \eta_0 = \frac{y_0}{h} \end{aligned}$$

Здесь P_1 и P_2 — числа Пекле для внутреннего и внешнего потоков.

Применяя к (1.1) преобразование Лапласа — Карсона, легко найти решение для изображений. Приведем здесь выражение для изображения θ_1 , поскольку только оно понадобится в дальнейшем

$$V_1 = \frac{\alpha[(1 - \alpha) \operatorname{ch}(1 - \eta_0) \sqrt{\beta p} + (1 - \theta_w)\alpha] \operatorname{ch} \sqrt{p} \eta}{\alpha \operatorname{ch}(1 - \eta_0) \sqrt{\beta p} \operatorname{ch} \sqrt{p} \eta_0 + \operatorname{sh}(1 - \eta_0) \sqrt{\beta p} \operatorname{sh} \sqrt{p} \eta_0} \quad (1.2)$$

$$\left(V_1 = p \int_0^\infty \theta_1 e^{-p\xi} d\xi, \quad a = \varepsilon \sqrt{\beta} \right)$$

Выражение (1.2) представляет собой мероморфную функцию, полюсы которой определяются корнями уравнения

$$\operatorname{th} z \operatorname{th} \omega z = -a \quad (\omega = \sqrt{\beta}(1 - \eta_0) / \eta_0) \quad (1.3)$$

Покажем, что все корни уравнения (1.3) — чисто мнимые. Для этого будем рассматривать a как параметр. Так как каждому значению a соответствует счетное множество корней, то $z = z(a)$, определяемая из (1.3), будет однозначной функцией, областями однозначности для которой будут $z_k = z_k(a)$, где z_k — корни уравнения (1.3) ($k = 1, 2, \dots$). Если фиксировать некоторый корень z_k , то $z_k(a)$ будет однозначной функцией. Поскольку $a = -\operatorname{th} z \operatorname{th} \omega z$ — непрерывная функция z , то, следовательно, обратная функция будет непрерывной в каждой области однозначности [2].

Итак, если под траекторией корня уравнения (1.3) понимать кривую на плоскости z , которую описывает при изменении a фиксированный корень, то $z_k = z_k(a)$ — уравнение этой непрерывной кривой в параметрической форме. Так как при $a = 0$ корни будут чисто мнимыми, то остается доказать, что траектория не сходит в дальнейшем с мнимой оси. Действительно, положив $z = x + iy$, разделяя действительные и мнимые части в (1.3) и полагая $x \ll 1$, получим

$$\begin{aligned} \omega x^2 - \operatorname{tg} \gamma \operatorname{tg} \omega \gamma = -a + \omega a x^2 \operatorname{tg} \gamma \operatorname{tg} \omega \gamma \\ x(\operatorname{tg} \omega \gamma + \omega \operatorname{tg} \gamma) = -ax(\operatorname{tg} \gamma + \omega \operatorname{tg} \omega \gamma) \end{aligned}$$

Если $x \neq 0$, то, исключив отсюда $\operatorname{tg} \gamma$, получим

$$\omega \left(1 + a \omega \operatorname{tg}^2 \omega \gamma \frac{1 + a \omega}{a + \omega} \right) x^2 = - \left(a + \frac{1 + a \omega}{a + \omega} \operatorname{tg}^2 \omega \gamma \right)$$

Здесь слева стоит положительное число, а справа — отрицательное. Поэтому предположение $x \neq 0$ неверно, и $\operatorname{Re} z \equiv 0$.

Таким образом, траектория корня не может сойти с мнимой оси, и, следовательно, все корни уравнения (1.3) — чисто мнимые, т. е. $z_k = iy_k$.

Так как точка $p = 0$ не является полюсом выражения (1.2), то оригинал имеет вид

$$\theta_1 = (1 - \alpha\theta_w) - 2\alpha \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[(1 - \alpha) \cos \omega \gamma_k + \alpha(1 - \theta_w)] \cos(\gamma_k \eta / \eta_0) \exp(-\gamma_k^2 \xi / \eta_0^2)}{\gamma_k [(1 + a\omega) \cos \gamma_k \sin \omega \gamma_k + (a + \omega) \sin \gamma_k \cos \omega \gamma_k]} \quad (1.4)$$

Тепловой поток на линии раздела

$$q = \frac{Q}{\lambda_1 T_{01} / h} = \left(\frac{\partial \theta_1}{\partial \eta} \right)_{\eta=\eta_0}$$

при помощи (1.4) представляется формулой

$$q = \frac{2\alpha}{\eta_0} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{[(1 - \alpha) \cos \omega \gamma_k + \alpha(1 - \theta_w)] \exp(-\gamma_k^2 \xi / \eta_0^2)}{(1 + a\omega) \operatorname{ctg} \gamma_k \sin \omega \gamma_k + (a + \omega) \cos \omega \gamma_k} \quad (1.5)$$

которая принимает простую форму для $\omega \ll 1$. Сохраняя в (1.5) только первый член получим

$$q \approx \frac{2\alpha(1 - \alpha\theta_w)}{\eta_0(a + \omega)} \exp - \frac{\gamma_1^2 \xi}{\eta_0^2} \quad (1.6)$$

Из (1.6) следует, что с увеличением α и θ_w тепловой поток из линии раздела уменьшается и стремится к нулю при приближении $\alpha\theta_w$ к единице. Зависимость q от α и ω носит несколько более сложный характер, так как γ_1 зависит от α и ω (фиг. 1). Результаты расчетов по формуле (1.5), в которой оставлен только первый член ряда, представлены на фиг. 2 и 3. При этом было принято $a = 0.1$, $\theta_w = 0.1$, $\alpha = 0.5$.

Найдем еще толщину теплового пограничного слоя δ во внутреннем потоке, определяя его как слой, на внутренней стороне которого температура отличается от температуры на входе в канал на 1%. Оставляя в (1.4) только первый член ряда и полагая $\omega \ll 1$, получим

$$\frac{\delta}{\eta_0} = 1 - \frac{1}{\gamma_1}$$

$$\arcs \cos \left\{ \frac{\gamma_1 \sin \gamma_1}{2} \left(1 + \frac{1 - \eta_0}{\varepsilon \eta_0} \right) \exp \frac{\gamma_1^2 \xi}{\eta_0^2} \right\} \quad (1.7)$$

Полагая в (1.7) $\delta = \eta_0$, получим длину начального теплового участка ξ^* . Если $(1 - \eta_0) \ll \varepsilon \eta_0$, то

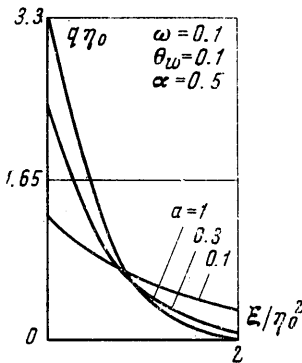
$$\frac{x^*}{h} = P_1 \xi^* = \frac{P_1 \eta_0^2}{\gamma_1^2} \ln \frac{\pi}{\gamma_1 \sin \gamma_1} \quad (1.8)$$

Из (1.7) следует, что δ не зависит от α и θ_w , а лишь от η_0 , ε , β и P_1 .

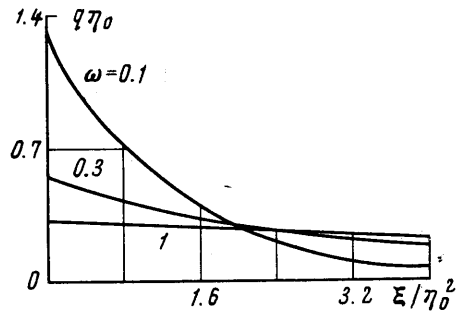
2. Пусть теперь теплообмен осуществляется за счет излучения и теплопроводности. Если толщины слоев много больше средней длины пробега излучения (оптически толстые среды), то тепловой поток за счет излучения определяется по формуле [4]

$$Q_r = -\frac{16}{3} \sigma l T^3 \text{ grad } T \quad (2.1)$$

Здесь σ — постоянная Стефана — Больцмана, l — средняя длина свободного пробега излучения, которая предполагается постоянной.



Фиг. 2



Фиг. 3

При высоких температурах тепловой поток за счет теплопроводности пропорционален температуре

$$Q_t = -\lambda T \quad (2.2)$$

С учетом (2.1) и (2.2) распределение температуры в обоих слоях определяется из следующей нелинейной краевой задачи:

$$\frac{\beta}{\varepsilon \alpha^3} \frac{\partial \theta_2}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \eta} (\theta_2^3 + A_2 \theta_2) \frac{\partial \theta_2}{\partial \eta} \quad (\eta_0 < \eta < 1) \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \eta} (\theta_1^3 + A_1 \theta_1) \frac{\partial \theta_1}{\partial \eta} \quad (0 < \eta < \eta_0) \quad (2.4)$$

$$\xi = \frac{x}{A_1 P_1 h}, \quad \eta = \frac{y}{h}, \quad \theta_1 = \frac{T_1}{T_{01}}, \quad \theta_2 = \frac{T_2}{T_{02}}, \quad \theta_w = \frac{T_w}{T_{02}}$$

$$\varepsilon = \frac{l_2}{l_1}, \quad \alpha = \frac{T_{02}}{T_{01}}, \quad \beta = \frac{\lambda_2 P_2 \alpha}{\lambda_1 P_1}, \quad A_1 = \frac{3 \lambda_1}{16 \sigma l_1 T_{01}^2}, \quad A_2 = \frac{3 \lambda_2}{16 \sigma l_2 T_{02}^2}$$

Если $\beta(1 - \eta_0)^2 / \varepsilon \alpha^3 \ll 1$, то в (2.3) конвективным членом слева можно пренебречь

$$\frac{\partial}{\partial \eta} (\theta_2^3 + A_2 \theta_2) \frac{\partial \theta_2}{\partial \eta} = 0 \quad (2.5)$$

Граничные условия для (2.4) и (2.5) следующие:

$$\theta_1 = 1 \quad \text{при } \xi = 0, \quad \frac{\partial \theta_1}{\partial \eta} = 0 \quad \text{при } \eta = 0, \quad \theta_2 = 1 \quad \text{при } \eta = 1 \quad (2.6)$$

$$\theta_1 = \alpha \theta_2, \quad (\theta_1^3 + A_1 \theta_1) \frac{\partial \theta_1}{\partial \eta} = \varepsilon \alpha^4 (\theta_2^3 + A_2 \theta_2) \frac{\partial \theta_2}{\partial \eta} \quad \text{при } \eta = \eta_0$$

Уравнение (2.5) интегрируется

$$\theta_2 = [(A_2^2 + C_w - f(\xi)(1 - \eta))^{1/2} - A_2]^{1/2}, \quad C_w = \theta_w^4 + 2A_2 \theta_w^2 \quad (2.7)$$

с точностью до произвольной функции $f(\xi)$, которая будет определена в дальнейшем.

Если температуру внешнего слоя на линии раздела обозначить через $F(\xi)$, то условия (2.6) при $\eta = \eta_0$ примут вид

$$\theta_1 = \alpha F, \quad (\theta_1^3 + A_1 \theta_1) \frac{\partial \theta_1}{\partial \eta} = \frac{0.25 \varepsilon \alpha^4}{1 - \eta_0} (C_w - F^4 - 2A_2 F^2) \quad (2.8)$$

Распределение температуры во внутреннем слое определяется из уравнения (2.4) с граничными условиями (2.8) и условием симметрии из (2.6).

Будем решать нелинейное уравнение (2.3) методом интегральных соотношений. Для этого разобьем внутренний поток на ядро, температура в котором постоянна и равна температуре на входе, и пограничный слой толщиной δ , профиль температуры в котором выберем в виде

$$\theta_1 = 1 + \varphi(\xi) [1 - (\eta - \eta_0) / \delta]^2 \quad (2.9)$$

Очевидно, выбранный профиль удовлетворяет условиям

$$\theta_1 = 1, \quad \partial \theta_1 / \partial \eta = 0 \quad \text{при } \eta = \eta_0 - \delta$$

С учетом (2.9) граничные условия (2.8) примут вид

$$1 + \varphi = \alpha F, \quad \frac{2\varphi(1 + \varphi)[(1 + \varphi)^2 + A_1]}{\delta} = \frac{0.25 \varepsilon \alpha^4 (C_w - F^4 - 2A_2 F^2)}{1 - \eta_0} \quad (2.10)$$

Из (2.7) и (2.10) найдем

$$\delta = \frac{8(1 - \eta_0) F (\alpha F - 1) (\alpha^2 F^2 + A_1)}{\varepsilon \alpha^3 (C_w - 2A_2 F^2 - F^4)} \quad (2.11)$$

В качестве интегрального соотношения возьмем уравнение (2.5), проинтегрированное в пределах от η_0 до $\eta_0 - \delta$

$$\int_{\eta_0 - \delta}^{\eta_0} \frac{\partial \theta_1}{\partial \xi} d\eta = \left[(\theta_1^3 + A_1 \theta_1) \frac{\partial \theta_1}{\partial \eta} \right]_{\eta = \eta_0}$$

Рассматривая интеграл слева как интеграл, зависящий от параметра, и учитывая (2.11), получим нелинейное дифференциальное уравнение первого порядка для определения F

$$\frac{d}{d\xi} \frac{F(\alpha^2 F^2 + A_1)(\alpha F - 1)^2}{(C_w - 2A_2 F^2 - F^4)} = \frac{\alpha^7}{a^2} (C_w - 2A_2 F^2 - F^4), \quad a^2 = \frac{32}{3} \left(\frac{1 - \eta_0}{\varepsilon} \right)^2 \quad (2.12)$$

Так как метод интегральных соотношений справедлив до значения ξ^* , при котором $\delta = \eta_0$, то, предполагая, что $\alpha \ll 1$, $\theta_w \ll 1$, $\eta_0 \approx 1$, $a \approx 1$, из (2.11) получим $1 - \alpha F \ll 1$, так как $F = 1/\alpha$ при $\xi = 0$.

В силу этого в выражениях (2.11) и (2.12) F можно заменить на $1/\alpha$ всюду, кроме $1 - \alpha F$.

В результате получим

$$\delta \approx 1.77 \sqrt{\xi(1+A_1)} = 1.77 \left(\frac{(1+A_1)x}{A_1 P_1 h} \right)^{1/2} \quad (2.13)$$

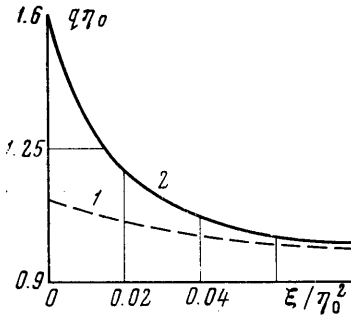
$$F \approx \frac{1}{a} \left[1 - \frac{1+2\alpha^2 A_2}{a} \left(\frac{x}{2A_1(1+A_1)P_1 h} \right)^{1/2} \right] \quad (2.14)$$

Полагая в (2.13) $\delta = \eta_0$ и воспользовавшись (2.14), найдем

$$x^*/h = 0.318 A_1 P_1 \eta_0^2 / (1+A_1) \quad (2.15)$$

Тепловой поток на линии раздела с учетом (2.10), (2.13) и (2.14) равен

$$q = \frac{0.8}{a} \left\{ \left[1 - \frac{1+2\alpha^2 A_2}{a} \left(\frac{x}{2A_1(1+A_1)P_1 h} \right)^{1/2} \right]^4 + 2\alpha^2 A_2 \left[1 - \frac{1+2\alpha^2 A_2}{a} \left(\frac{x}{2A_1(1+A_1)P_1 h} \right)^{1/2} \right]^2 \right\} \quad (2.16)$$



Фиг. 4

Из (2.16) следует, что q увеличивается с ростом P_1 , A_1 , A_2 и с уменьшением a .

Заметим, что в окрестности $\xi = 0$ приближение для теплового потока за счет излучения (2.1) нарушается [5], так как пограничный слой становится оптически тонким и теплообмен между слоями происходит по закону абсолютно черного тела. Полагая в (2.13) $\delta = l_1/h$, найдем значение x^{**} , начиная с которого, верно приближение (2.1). Оказывается, что $x^{**} \approx l_1^2 A_1 P_1 / h$. Таким образом, если $l_1^2 A_1 P_1 \ll h^2$, то (2.1) справедливо практически при всех $x > 0$.

3. Для оценки точности метода интегральных соотношений сравнивались тепловые потоки на линии раздела, полученные из точного решения линейной задачи (1.1) и из приближенного решения. На фиг. 4 представлены результаты расчетов при $\beta = 0$, $\theta_w = 0.1$, $\alpha = 0.5$, $\varepsilon = 0.5$, $\eta_0 = 0.7$ по формуле (1.6), в которой оставлен только первый член ряда (линия 1), и по формуле $q = \varepsilon A(\xi)$, где $A(\xi)$ определяется из уравнения

$$\frac{A_0^2}{A^2} - 1 + 2 \ln \left(\frac{A}{A_0} \right) = \frac{3\xi}{b^2} \quad \left(b = \frac{1-\eta_0}{\varepsilon \eta_0}, \quad A_0 = \frac{1-\alpha\theta_w}{a(1-\eta_0)} \right)$$

Заметное различие между значениями тепловых потоков наблюдается при $\xi = 0$. Однако к ним нужно относиться критически, поскольку при $\xi = 0$ отброшенные члены ряда (1.5) могут дать существенный вклад. Действительно, оценим оставшиеся члены ряда. Для этого заметим, что при $\beta = 0$ и $b \leq 1$ корни уравнения (1.3), начиная со второго, приближенно равны $\gamma_k \approx \pi(k-1)$ ($k = 2, 3, \dots$).

Поэтому, полагая в (1.5) $\beta = 0$ и $\xi = 0$, найдем

$$q \approx \frac{2(1-\alpha\theta_w)}{\eta_0} \left\{ \frac{1}{1+b+b^2\gamma_1^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+b+b^2\pi^2 k^2} \right\} \quad (3.1)$$

Определив сумму в (3.1) из [6], получим

$$q \approx \frac{2(1-\alpha\theta_w)}{\eta_0} \left[\frac{1}{\gamma_1^2 + (1+b)/b^2} + \frac{b}{\sqrt{1+b}} \left(\operatorname{cth} \frac{\sqrt{1+b}}{b} - \frac{b}{\sqrt{1+b}} \right) \right] \quad (3.2)$$

Для выбранных выше значений параметров второй член в квадратных скобках (3.2), равный отброшенным членам ряда (1.6), составляет 50% от первого члена. Таким образом, если в точном решении учитывать все члены ряда, то его отличие от приближенного решения при $\xi = 0$ составит 5%.

Поступило 25 IV 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Синайский Э. Г., Шахов Е. М. Нестационарная диффузия магнитного поля в плазму, охлаждаемую твердыми стенками. Изв. АН СССР. МЖГ, 1966, № 4.
2. Синайский Э. Г. О тепловом пограничном слое на электроде. Изв. АН СССР. МЖГ, 1966, № 5.

3. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексных переменных. Изд-во «Наука», 1965.
4. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. Изд-во «Наука», 1966.
5. Gouland R. The transition from black-body to Rosseland formulation in optically thick flows. Intern. J. Heat Mass Transport, 1963, vol. 6, No. 10.
6. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, 1962.

ФИЛЬТРАЦИЯ ЖИДКОСТИ В СРЕДЕ СО СЛУЧАЙНОЙ ПОРИСТОСТЬЮ

Ю. А. БУВИЧ, А. И. ЛЕОНОВ

(Москва)

При изучении фильтрации интересуются обычно лишь средними характеристиками движения, зависящими от различных параметров, усредненных по весьма большим объемам пористого тела. Например, при рассмотрении стационарной фильтрации обычно достаточно знать скорость фильтрации как функцию внешних условий и средней проницаемости (или средней пористости) среды. Между тем, локальные значения пористости реальных сред могут значительно отличаться от средней пористости среды в целом. Обычно применяемое в теории фильтрации понятие «пористость» представляет собой отношение объема пор, содержащихся в физически бесконечно малом объеме пористой среды, к величине этого объема¹. Пористость ε , вообще говоря, может меняться от точки к точке, причем масштаб этого изменения в большинстве практически интересных случаев значительно выше характерного размера поровых каналов. Поскольку практически функция $\varepsilon(x)$ неизвестна, можно считать ее случайной функцией точки. В отличие от этой локальной характеристики пористости среды можно ввести еще среднюю пористость ε^0 среды в целом, определяемую как среднее от случайной величины $\varepsilon(x)$ по всему объему среды. Таким образом, реальные пористые тела можно рассматривать как однородные лишь в статистическом смысле. Это обстоятельство не представляется существенным при расчете средней скорости фильтрации и т. п., но оказывается решающим при анализе локальных особенностей поля фильтрационных движений. Действительно, хаотические отклонения истинной пористости тела от средней вызывают появление локальных движений, регулярных в том смысле, что они всецело детерминированы локальными свойствами пористого тела. Однако в связи с тем, что в деталях эти свойства обычно неизвестны и можно реально говорить лишь о некоторых их статистических характеристиках, указанные движения представляются как хаотические, относящиеся к своего рода «псевдотурбулентности» в фильтрационных потоках. Характерные масштабы такой псевдотурбулентности совпадают по порядку величины с масштабами локальных неоднородностей пористого тела, рассматриваемого как континуум. Они, однако, выше характерного масштаба «струйных» течений по отдельным поровым каналам, имеющего порядок среднего размера пор. Поэтому можно ожидать, что вклад отмеченных крупномасштабных (по сравнению с характерным размером поровых каналов) псевдотурбулентных движений в многообразные процессы переноса, имеющие место в фильтрационных потоках, будет весьма значителен, а при высокой локальной неоднородности пористого тела — даже доминирующим.

Данная работа содержит общую постановку задачи об определении статистических характеристик крупномасштабных псевдотурбулентных случайных полей по заданной характеристике поля локальной пористости. При этом предположено, что скорости псевдотурбулентных движений относительно малы, и применимы методы, характерные для инвариантной теории обычной турбулентности [1, 2].

§ 1. Перед построением математической модели отметим две существенные особенности случайных полей скорости и давления. Во-первых, поскольку рассматриваемая псевдотурбулентность не имеет отношения к эффектам гидродинамической неустойчивости при фильтрации, достаточно рассмотреть лишь однородный случай, когда усредненная скорость жидкости не зависит от координат. Во-вторых, главным источником появления хаотических движений в пористом теле служит неоднородность локальной пористости.

¹ Заметим, что, как указал авторам А. С. Мошин, в реальных пористых средах величина $\varepsilon(x)$ представляет собой статистическую характеристику: среднее от некоторой характеристической функции пористости $\chi(x)$, равной нулю, если точка лежит в поровом канале, и единице, если точка лежит на каркасе. Имеются также и модели пористых сред (например, среда из идеально упакованных сфер, цилиндров и т. п.), где пористость ε постоянна.