

$g_w = 1,$	$h'_w = 0,$	$\Phi''_w = 2.206$			
$\Delta = 0.81 \cdot 10^{-3}$	$0.44 \cdot 10^{-3}$	$0.20 \cdot 10^{-1}$	$0.46 \cdot 10^{-1}$	0.13	0.25
$f''_w = 77.94$	33.79	16.24	10.91	6.82	5.10
$\sim \Phi''_w / \sqrt{\Delta} = 77.40$	33.2	15.65	10.25	6.13	4.40
$\Delta = 0.59$	0.7	0.814	1.00	1.988	10
$f''_w = 3.57$	3.346	3.158	2.92	2.30	1.499
$\sim \Phi''_w / \sqrt{\Delta} = 2.87$	2.63	2.44	2.206	1.56	0.69

Во всех расчетах принималось, что  $\sigma = 0.74$  и закон изменения вязкости  $\mu \sim g^{\sigma}$ , где  $\sigma = 0.76$ .

Можно видеть, что при  $\Delta = 1$  тепловой поток на 17—23% больше, чем соответствующая величина для обычного пограничного слоя. Величина  $\Delta \sim 1$  соответствует, например, режимам полетов с числом  $M > 20$ ,  $\varepsilon = 0.1$  и числами  $R$  порядка  $10^{+4}$ .

Поступило 23 XII 1966

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Sibulkin M. Heat transfer near the forward stagnation point of a body of revolution. J. Aeronaut. Sci., 1952, vol. 19, No. 8.
2. Fay I. A., Riddell F. R. Theory of stagnation point heat transfer in dissociated air. J. Aeronaut. Sci., 1958, vol. 25, No. 2.
3. Ван-Дайк М. Теория сжимаемого пограничного слоя во втором приближении с применением к обтеканию затупленных тел гиперзвуковым потоком. Сб. «Исследование гиперзвуковых течений». Изд. «Мир», 1964.
4. Коул Ж., Райнерд Ж. «Обтекание тонких крыльев гиперзвуковыми потоками при больших углах атаки». Сб. «Исследование гиперзвуковых течений». Изд. «Мир», 1964.

#### О РАСЧЕТЕ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОГО ГАЗА В КАНАЛЕ

А. П. БЫРКИН, И. И. МЕЖИРОВ

(Москва)

В работе рассмотрена постановка задачи о ламинарном течении газа в длинных каналах с плавным контуром. Установлены законы подобия, которым подчиняются такие течения. Методом интегральных соотношений получены численные решения для течения газа в круглой трубе и плоском канале постоянной высоты при различных температурных условиях на стенке.

§ 1. Постановка задачи. Законы подобия. Рассмотрим ламинарное стационарное течение газа в осесимметричном или плоском канале, характерный радиус поперечного сечения (или высота) которого  $\delta$  много меньше длины канала  $l$ , так что  $\delta/l \ll 1$ . Будем предполагать также, что контур канала достаточно плавный, т. е.  $r/l \ll 1$ , где  $r$  — радиус продольной кривизны контура. При этом, как известно, в уравнениях Навье — Стокса, описывающих течение вязкого газа, может быть опущен ряд членов, и они переходят в более простые уравнения пограничного слоя

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{dp}{dx} + \frac{1}{y^{\nu}} \frac{\partial}{\partial y} \left( y^{\nu} \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (y^{\nu} \rho u) + \frac{\partial}{\partial y} (y^{\nu} \rho v) = 0 \quad (1.2)$$

$$\rho u \frac{\partial H}{\partial x} + \rho v \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{1}{y^{\nu}} \frac{\partial}{\partial y} \left( y^{\nu} \mu \frac{\partial H}{\partial y} \right) + \frac{1}{y^{\nu}} \frac{\partial}{\partial y} \left[ y^{\nu} \mu \left( \frac{1}{P} - 1 \right) \frac{\partial h}{\partial y} \right] \quad (1.3)$$

Здесь  $x, y$  — расстояния, измеряемое вдоль оси и по нормали к оси канала (в случае плоского несимметричного канала ось  $x$  может быть направлена вдоль одной из стенок, а ось  $y$  по нормали к ней);  $\rho$  — плотность газа;  $p$  — давление;  $u, v$  — продольная и поперечная составляющие скорости;  $h$  — энтальпия газа;  $H$  — энтальпия торможения;  $\mu$  — коэффициент вязкости;  $P$  — число Прандтля; величина  $\nu$  принимает значения 1 — в случае осесимметричного канала и 0 — в случае плоского канала.

В приближении пограничного слоя давление  $p$  постоянно по сечению канала. К уравнениям (1.1) — (1.3) должно быть добавлено уравнение состояния

$$h = h(p, \rho) \quad (1.4)$$

и соотношения, определяющие зависимость коэффициента вязкости  $\mu$  и числа Прандтля  $P$  от параметров состояния газа (предполагается, что течение газа — термодинамически и химически равновесно).

Система уравнений пограничного слоя должна решаться при следующих граничных условиях.

В случае осесимметричного и плоского симметричного течения  $u = v = 0$  — на стенке канала,  $\partial u / \partial y = 0$  — на оси канала.

В случае плоского несимметричного течения  $u = v = 0$  — на одной стенке канала,  $u = 0$  — на другой стенке.

Граничное условие для температуры  $T$  различно в разных задачах. Так, в случае теплоизолированных стенок  $(\partial T / \partial y)_w = 0$  и  $(\partial h / \partial y)_w = 0$ . Если температура стенки задана, то  $T_w = T_w(x)$ , где  $T_w(x)$  — заданная функция. При симметричном течении на оси канала  $\partial T / \partial y = 0$ .

Для получения однозначного решения системы уравнений (1.1) — (1.4), кроме упомянутых выше дополнительных соотношений и граничных (а также начальных) условий, требуется еще одно условие. При решении обычной задачи о пограничном слое таким дополнительным условием будет задание давления на поверхности тела, которое находится в результате расчета внешнего невязкого потока. В рассматриваемом случае распределение давления по длине канала  $p(x)$  определяется влиянием вязкости и законом площадей канала и будет поэтому искомой функцией наряду с другими характеристиками течения.

Замыкающим условием в данном случае должно быть соотношение, непосредственно связывающее газодинамические характеристики с заданным законом площадей канала. Таким очевидным условием в случае канала с непроницаемыми стенками будет постоянство расхода через все сечения канала

$$\frac{d}{dx} \int_0^{y_w} y^v \rho u dy = 0 \tag{1.5}$$

где  $y_w$  — текущий радиус (или высота) канала.

Из (1.5) и (1.2) следует естественное условие равенства нулю поперечной составляющей скорости  $v$  на обеих стенках канала или (в случае симметричного течения) на стенке и на оси симметрии.

Отметим, что приведенная здесь постановка задачи о течении газа в канале имеется в работе [1].

Установим далее законы подобия, которым подчиняется течение вязкого газа в канале. Перейдем в уравнениях (1.1) — (1.3), (1.5) и в соотношениях, входящих в граничные и начальные условия, к новым безразмерным переменным по формулам

$$\begin{aligned} x^\circ &= \frac{x}{\delta} \frac{1}{R}, & y^\circ &= \frac{y}{\delta}, & u^\circ &= \frac{u}{V}, & v^\circ &= \frac{v}{V} R, & \rho^\circ &= \frac{\rho}{\rho_1} \\ p^\circ &= \frac{p}{\rho_1 V^2}, & \mu^\circ &= \frac{\mu}{\mu_1}, & h^\circ &= \frac{h}{h_1}, & H^\circ &= \frac{H}{h_1}, & T^\circ &= \frac{T}{T_1} \end{aligned}$$

где  $V$ ,  $\rho_1$ ,  $\mu_1$ ,  $h_1$ ,  $T_1$  — характерные значения соответствующих величин, а  $R$  — некоторое постоянное число Рейнольдса.

Легко проверить, что при  $R = \rho_1 V \delta / \mu_1$  все уравнения в новых переменных не меняют своего вида, но символы в них (кроме числа Прандтля) заменяются теми же буквами со значком  $^\circ$ . Если известны термодинамические и переносные свойства газа, текущего в канале, и его начальные параметры (в случае совершенного газа это сводится к заданию показателя адиабаты  $\kappa$ , числа Прандтля, зависимости коэффициента вязкости от температуры и, вообще говоря, характерной температуры), то единственное решение системы уравнений движения газа, граничных и начальных условий в безразмерных переменных определяется законом площадей канала, заданным в виде

$$y_w^\circ = y_w^\circ(x^\circ) \tag{1.6}$$

Уравнению (1.6) соответствует семейство контуров  $\eta = \eta(\xi)$ , у которых при изменении числа  $R$  абсциссы  $\xi = x / \delta$  изменяются прямо пропорционально числу  $R$ , а ординаты  $\eta = y_w / \delta$  не меняются.

В сходственных сечениях различных каналов одного семейства, характеризующихся условием  $x^\circ = \text{const}$ , градиенты давления  $dp / dx$  меняются обратно пропорционально числу  $R$ , величины  $C_f R$  и  $C_h R$  ( $C_f$  и  $C_h$  — соответственно коэффициент трения и число Стантона) остаются постоянными, не меняются профили чисел  $M$ , соответствующих продольной составляющей скорости, профили безразмерной плотности, температуры и других величин.

Зависимости коэффициента трения и числа Стантона от параметров подобия могут быть представлены в форме, обычной для решения уравнений пограничного слоя. Так, для семейства контуров, заданного уравнением (1.6), имеем

$$C_f R = \varphi(x^\circ), \quad x^\circ = \psi(M_0) \quad \text{или} \quad C_f R = f(M_0)$$

где  $M_0$  — характерное число  $M$  в сечении канала, например на его оси. Умножая обе части последнего равенства на  $\sqrt{x^\circ} = \sqrt{\psi(M_0)}$ , получим

$$C_f \sqrt{R_x} = f(M_0), \quad R_x = \frac{\rho_1 V x}{\mu_1}$$

Следует отметить, что уравнения (1.1) — (1.3) описывают, наряду с течениями вязкого газа, одномерные невязкие течения. Поэтому они могут быть использованы в тех случаях, когда в центральной части канала существует невязкое ядро, в пределах которого давление практически постоянно. Это имеет место, например, в конических сверхзвуковых или гиперзвуковых соплах с малыми углами раскрытия, на начальном участке трубы, в которую поступает однородный поток, и т. д. При расчете таких течений не требуется разделять поток на пограничный слой и невязкое ядро.

В ряде случаев (например, в случае только что упомянутых течений) может возникнуть необходимость вычисления интегральных толщин — толщины вытеснения  $\delta^*$ , толщины потери импульса и т. п. При этом для семейства контуров, заданного уравнением (1.6),

$$\delta^* / \delta = f(x^\circ), \quad \delta^* / \delta = f(M_0)$$

Отсюда, разделив обе части последнего равенства либо на  $x^\circ$ , либо на  $\sqrt{x^\circ}$ , соответственно будем иметь

$$\frac{\delta^*}{x} R = f(M_0), \quad \frac{\delta^*}{x} \sqrt{R_x} = f(M_0)$$

Приведенные выше законы подобия соответствуют при гиперзвуковых скоростях в канале данным работы [2].

**§ 2. Метод расчета.** Условие (1.5) представляет собой интегральное соотношение, поэтому для численного расчета характеристик течения вязкого газа в канале удобно использовать метод интегральных соотношений [3, 4].

Разобьем область между стенками канала (или осью и стенкой канала при симметричном течении) на  $N$  полос; для этого проведем  $N + 1$  кривых с уравнениями

$$y_i = iN^{-1}y_w \quad (i = 0, 1, 2, \dots, N) \quad (2.1)$$

Будем обозначать все величины на  $i$ -й линии индексом  $i$ , при этом  $i = 0$  отвечает одной стенке (или оси) канала,  $i = N$  — другой.

Умножим уравнения (1.1), (1.3) на  $y^v$  и приведем их к дивергентному виду с учетом уравнения (1.2), а затем проинтегрируем по  $y$  от стенки (оси) канала до границы каждой из полученных полос.

В результате исключения  $\rho v$  при помощи уравнения неразрывности и использования граничных условий, а также условия  $(\rho v)_0 = 0$  (см. § 1) получим для каждого из этих уравнений  $N$  соотношений (по числу полос) вида

$$\frac{d}{dx} \int_0^{y_i} y^v \rho u^2 dy - u_i \frac{d}{dx} \int_0^{y_i} y^v \rho u dy = - \frac{y_i^{v+1}}{v+1} \frac{dp}{dx} + \left( y^v \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right)_i - \left( y^v \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right)_0 \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_0^{y_i} y^v \rho u H dy - H_i \frac{d}{dx} \int_0^{y_i} y^v \rho u dy &= \left( y^v \frac{\mu}{P} \frac{\partial H}{\partial y} \right)_i - \\ - \left( y^v \frac{\mu}{P} \frac{\partial H}{\partial y} \right)_0 - \left[ y^v \mu \left( \frac{1}{P} - 1 \right) u \frac{\partial u}{\partial y} \right]_i &+ \left[ y^v \mu \left( \frac{1}{P} - 1 \right) u \frac{\partial u}{\partial y} \right]_0 \end{aligned} \quad (2.3)$$

$$(i = 1, \dots, N)$$

Вводя для краткости обозначения

$$j = \rho u, \quad \varphi = \rho u^2, \quad \psi = \rho u H, \quad \theta = \mu / \partial y, \quad \Phi = \mu \partial H / \partial y$$

аппроксимируем любую из этих функций интерполяционным полиномом по  $y$  степени  $N$ , принимая за узлы интерполяции границы полос.

При симметричном течении степень полинома, аппроксимирующего подынтегральную функцию, необходимо взять равной  $N + 1$  и коэффициент при первой степени положить равным нулю, что обеспечивает учет дополнительного условия на оси.

Подставляя аппроксимирующие выражения для  $f$ ,  $\varphi$ ,  $\psi$  в (2.2), (2.3), (1.5) и вычисляя интегралы, придем к системе  $(2N + 1)$  обыкновенных дифференциальных

уравнений относительно производных  $f_i', \varphi_i', \psi_i', p'$

$$y_N^{\nu+1} \sum_{i=0}^N a_j^i (\varphi_i' - u_i' f_i') + \frac{y_i^{\nu+1}}{\nu+1} p' =$$

$$= -(\nu+1) y_N^\nu y_N' \sum_{i=0}^N a^i (\varphi_i - u_j f_i) + (y^\nu \mu \theta)_j - (y^\nu \mu \theta)_0 \quad (2.4)$$

$$y_N^{\nu+1} \sum_{i=0}^N a_j^i (\psi_i' - H_j f_i') = -(\nu+1) y_N^\nu y_N' \sum_{i=0}^N a_j^i (\psi_i - H_j f_i) +$$

$$+ \left( y^\nu \frac{\mu}{P} \vartheta \right)_j - \left( y^\nu \frac{\mu}{P} \right)_0 - \left[ y^\nu \mu \left( \frac{1}{P} - 1 \right) u \theta \right]_j + \left[ y^\nu \mu \left( \frac{1}{P} - 1 \right) u \theta \right]_0 \quad (2.5)$$

$$y_N^{\nu+1} \sum_{i=0}^N a_N^i f_i' = -(\nu+1) y_N^\nu y_N' \sum_{i=0}^N a_N^i f_i \quad (2.6)$$

$$(i = 0, 1, \dots, N; j = 1, \dots, N)$$

В выражениях (2.4) — (2.6) нужно учесть, что на стенках в соответствии с граничными условиями  $u, f, \varphi, \psi$  и  $f', \varphi', \psi'$  равны нулю. Перейдем в системе (2.4) — (2.6) от величин  $f_i', \varphi_i', \psi_i'$  к величинам  $u_i', H_i', p'$ .

Из соотношений

$$H' = h' + 2uu', \quad \rho' = (\partial \rho / \partial h)_p h' + (\partial \rho / \partial p)_h p'$$

имеем следующие формулы перехода:

$$f' = (\rho u)' = F_u u' + F_H H' + F_p p'$$

$$\varphi' = (\rho u^2)' = \Phi_u u' + \Phi_H H' + \Phi_p p'$$

$$\psi' = (\rho u H)' = \Psi_u u' + \Psi_H H' + \Psi_p p' \quad (2.7)$$

Конкретный вид связей вновь введенных функций  $F_u, \Phi_u, \Psi_u$  и т. д. с величинами  $u, H$  и  $p$  зависит от термодинамических свойств газа. Особенно простыми они получаются в случае совершенного газа.

Зависимости  $u_i(\vartheta_0, \vartheta_1, \dots, \vartheta_N)$  и  $H_i(\vartheta_0, \vartheta_1, \vartheta_2, \dots, \vartheta_N)$  находятся из условия, что при  $x = \text{const}$

$$u = u_0 + \int_0^y \theta dy, \quad H = H_0 + \int_0^y \vartheta dy \quad (2.8)$$

Так, например, подставляя в (2.8) аппроксимирующее выражение для величины  $\vartheta$  и вычисляя интеграл, можем написать необходимые  $N$  соотношений

$$H_j = H_0 + y_N \sum_{i=0}^N b^i \vartheta_i \quad (j = 1, \dots, N) \quad (2.9)$$

При симметричном течении в канале, когда  $\vartheta_0 = 0$ , систему (2.9) для дальнейшего использования удобнее разрешить относительно  $\vartheta_i$ , в результате чего получим формулы связей в виде

$$\vartheta = \frac{1}{y_N} \sum_{i=0}^N C^i H_i \quad (j = 1, \dots, N) \quad (2.10)$$

Аналогичные зависимости имеют место между величинами  $\theta$  и  $u$ .

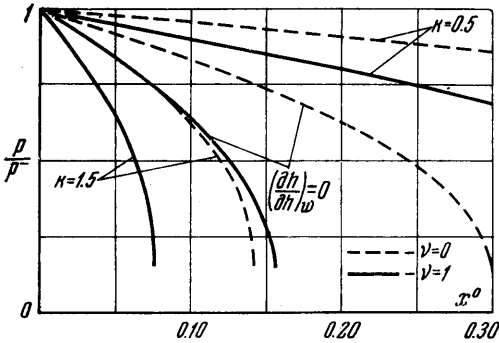
Заметим, что принятые сквозные аппроксимации функций при ограниченном числе полос могут оказаться недостаточно эффективными при наличии в потоке значительного «невязкого» ядра. Можно ожидать, однако, что введение кусочных аппроксимаций при увеличенном числе полос позволит рассчитывать с достаточной точностью и такие течения.

В табл. 1 и 2 приведены коэффициенты аппроксимирующих систем в четвертом и пятом приближениях применительно к симметричному течению в канале для  $\nu = 0$  и 1.

Таблица 1

i	0	1	2	3	4
$a_1^i$	0.135980900 0.012016119	0.130555556 0.022470238	-0.02135416667 -0.0030505952	0.0055555556 0.0007771164	$v=0$ $v=1$
$a_2^i$	0.109490741 0.0014054232	0.288888889 0.076190476	0.1083333333 0.051190476	-0.00740740741 -0.0042328042	$v=0$ $v=1$
$a_3^i$	0.133203125 0.016322540 0.0777777778	0.225 0.036160714 0.355555556	0.2953125 0.162723210 0.133333333	0.1 0.068303571 0.355555556	$v=0$ $v=1$ $v=0$
$a_4^i$	-0.033068783	0.152380950	0.019047619	0.287830680	$v=1$
$c_1^i$	-37/12	2/3	3	-2/3	1/12
$c_2^i$	31/18	-16/3	2	16/9	-1/6
$c_3^i$	-29/12	6	-9	14/3	3/4
$c_4^i$	28/3	-64/3	24	-64/3	28/3

Соотношения (2.4) — (2.6) с учетом (2.7) представляют собой систему  $2N + 1$  обыкновенных дифференциальных уравнений относительно  $2N + 2$  искомым величин,  $u_i$ ,  $H_i$  и  $p$ . Замыкающее уравнение следует из задания температурного условия на стенке.



Фиг. 1

§ 3. Расчет течения вязкого газа в цилиндрической трубе и плоском канале. Изложенным в § 2 методом проведены расчеты течения вязкого газа в цилиндрической трубе и плоском канале постоянной высоты.

Аппроксимирующие системы интегрировались численно на ЭВМ с использованием стандартной программы интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений методом Рунге — Кутты по заданной абсолютной точности, которая составляла  $10^{-6}$ .

Расчеты проведены в пятом и четвертом приближениях применительно к совершенному газу (воздуху) с показателем адиабаты  $\kappa = 1.4$  при числе  $P = 0.71$  и степенной зависимости коэффициента вязкости от температуры ( $\mu \sim T^{0.76}$ ). Оба приближения дали практически совпадающие результаты.

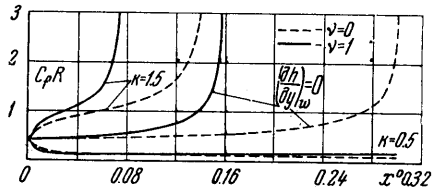
При расчетах задавались различные начальные профили скорости и энтальпии на входе в канал.

В ряде случаев в начальном сечении предполагались параболический профиль скорости, соответствующий течению Пуазейля, и постоянная энтальпия торможения; число  $M$  на оси  $M_0^- = 0.2236$ . Для указанных начальных условий расчеты проведены при теплоизолированной стенке, а также при наличии теплообмена, когда энтальпия стенки  $h_w$  на основном участке канала была постоянной, причем  $k = h_w / h_0^- = 0.5, 1.5, 3.0$  (верхний индекс минус отвечает условиям в начальном сечении). Закон изменения энтальпии стенки на начальном участке задавался следующим образом:

$$h_w(x) = \begin{cases} h_w^- - cx^2 & (0 \leq x \leq 1/2s) \\ kh_0^- + c(x-s)^2 & (1/2s \leq x \leq s) \end{cases}$$

где  $s$  — длина начального участка. Приведенная длина

$$s^0 = \frac{s}{y_w} \frac{1}{R} \left( R = \frac{\rho_0^- V y_w}{\mu_0^-}, \quad V = \sqrt{2h_0^-} \right)$$



Фиг. 2

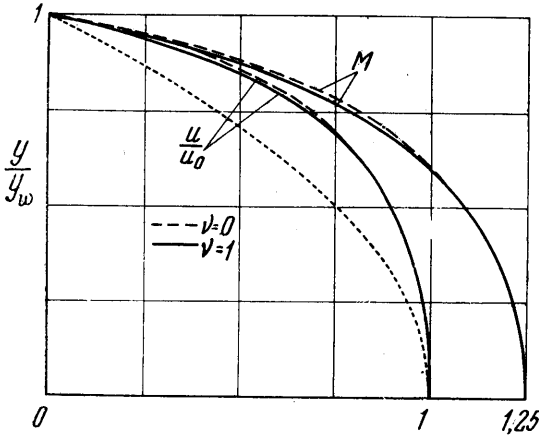
изменялась в зависимости от величины  $k$  и равнялась соответственно 0.01, 0.01, 0.04. Здесь  $y_w$  — радиус трубы (или половина высоты канала).

По результатам расчетов на фиг. 1 и 2 приведено распределение давления  $p/p_0$  и величины  $C_f R$  по приведенной длине канала

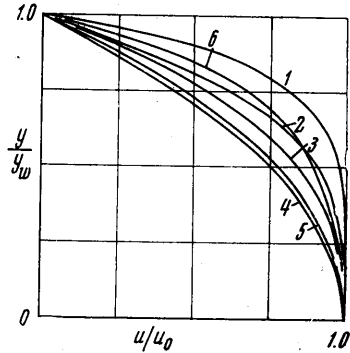
$$x^\circ = \frac{x}{y_w} \frac{1}{R} \quad \left( C_f = \frac{2}{\rho_0 V^2} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right)_w \right)$$

где  $C_f$  — коэффициент трения.

Расчеты доведены до критического значения приведенной длины, соответствующего запариванию течения в канале (в случае  $k = 0.5$  критическая длина для  $\nu = 0$



Фиг. 3

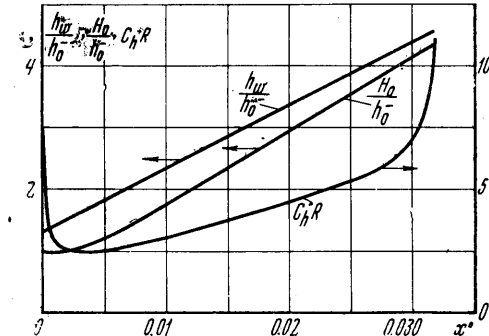


Фиг. 4

и 1 равна соответственно 1.0995 и 0.558). Видно, что вблизи сечения запаривания имеет место резкое изменение газодинамических параметров, вследствие чего уравнения (1.1)–(1.5) могут оказаться здесь недостаточно точными.

На фиг. 3 для случая теплоизолированной стенки приведены профили скорости  $u/u_0$  и числа  $M$  в непосредственной близости от сечения запаривания. Профиль скорости здесь более полный, чем на входе,  $M_0 \approx 1.25$ . Штрихом обозначен параболический профиль скорости на входе в канал.

Течение не может быть продолжено за сечение запаривания, так как дальнейшее увеличение скорости газа вызвало бы столь сильное падение плотности, что условие постоянства расхода (1.5) не могло бы удовлетвориться. При подходе к запариванию происходит интенсивное уменьшение шага интегрирования и наступает практический останов счета.



Фиг. 5

На фиг. 4 показаны профили скорости в круглой трубе с теплоизолированной стенкой при задании начального профиля параболы шестой степени,  $M_0^- = 0.05$ .

При этом кривые	1	2	3	4	5	6
$x^\circ =$	0	0.00047	0.00095	0.013	0.51423	0.52105

На небольшом расстоянии от входа ( $x^\circ = 0.013$ ) устанавливается течение Пуазейля, затем профиль скорости снова становится более полным.

На фиг. 5 представлено изменение величины  $C_h R$  для круглой трубы

$$C_h = \frac{1}{\rho_0 V (h_w - H_0)} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right)_w \text{ — число Стантона}$$

Таблица 2

$i$	0	1	2	3	4	5
$a_1^i$	0.105069772 0.00673633259	0.112579367 0.0152638889	-0.025218254 -0.0028353175	0.009867725 0.00108597885	-0.002624008 -0.000286210	$v=0$ $v=1$
$a_2^i$	0.0890423333 0.00205925926	0.227936507 0.0462222222	0.089841272 0.0353015872	-0.0080423333 -0.00440211639	0.001349205 0.000920634920	$v=0$ $v=1$
$a_3^i$	0.099223215 0.00714375	0.196071420 0.030375	0.220178580 0.0969107142	0.090714280 0.0485357143	-0.006830350 -0.0032544643	$v=0$ $v=1$
$a_4^i$	0.085417992 -0.00260740741	0.233650789 0.0568888889	0.157460322 0.0528253967	0.250582011 0.157121693	0.074920641 0.0573968254	$v=0$ $v=1$
$a_5^i$	0.128265556 0.036603023	0.124007938 -0.0434027778	0.310019841 0.192212301	0.082671958 0.004133606	0.294518055 0.252666165	$v=0$ $v=1$
$c_1^i$	-591/180	-5/12	5	-5/3	5/12	-1/20
$c_2^i$	167/120	-5	5/6	10/3	-5/8	1/15
$c_3^i$	-157/120	15/4	-15/2	10/3	15/8	-3/20
$c_4^i$	38/15	-20/3	10	-40/3	20/3	4/5
$c_5^i$	-149/12	125/4	-125/3	125/3	-125/4	149/12

при линейном изменении энтальпии стенки по ее длине. Начальные профили  $u$  и  $H$  задавались параболой шестой степени,  $M_0 = 0.1$ . На этом графике приведены также зависимости  $h_w / h_0$  и  $H_0 / h_0$  от  $x^2$ .

Поступило 1 IV 1967

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Williams J. C. Viscous Compressible and Incompressible Flow in Slender Channels. AIAA Journal, 1963, vol. 1, No. 1.
2. Жилин Ю. Л. Законы подобия для истечения газа в тонкое гиперзвуковое сопло. Инж. ж., 1963, т. 3, № 4.
3. Доронницын А. А. Об одном методе численного решения некоторых нелинейных задач аэрогидродинамики. Тр. III Всесоюз. матем. съезда, 1956, т. 3, Изд-во АН СССР, 1959.
4. Белоцерковский О. М., Чушкин П. И. Численный метод интегральных соотношений. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1962, т. 2, № 5.

### ТЕПЛОБМЕН ПРИ ТРЕХСЛОЙНОМ ТЕЧЕНИИ ЖИДКОСТИ В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ

Э. Г. Синайский (Москва)

Рассматривается теплообмен при трехслойном течении жидкости, симметричном относительно оси  $x$ , в плоском канале. Предполагается, что жидкость несжимаемая, скорости в каждом слое постоянны, а линии раздела слоев — прямые, параллельные оси канала. Сначала исследуется теплообмен за счет теплопроводности. Находятся распределение температуры в каждом слое и тепловой поток на линии раздела. Затем решается задача о теплообмене за счет излучения и теплопроводности. Так как эффективный коэффициент теплопроводности сильно зависит от температуры, то получающиеся уравнения нелинейны. Решение находится приближенным методом интегральных соотношений [1, 2]. Определяются температура и тепловой поток на линии раздела.

1. Рассмотрим теплообмен за счет теплопроводности в трехслойном потоке несжимаемой жидкости, симметричном относительно оси  $x$ , в плоском канале ( $x > 0$ ,  $|y| < h$ ), стенки которого поддерживаются при постоянной температуре  $T_w$ . Скорости жидкости в каждом слое постоянны и различны. Линии раздела слоев считаются прямыми  $y = \pm y_0$ . В силу симметрии будем рассматривать только область  $y \geq 0$ . Распределение температуры в жидкости определим из следующей краевой задачи:

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial \eta^2} \quad (0 < \eta < \eta_0), \quad \beta \frac{\partial \theta_2}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial \eta^2} \quad (\eta_0 < \eta < 1) \quad (1.1)$$