

На этих же фигурах кривые 3 — результаты расчета по формуле (11). Расхождение между кривыми 1 и 3 — небольшое во всем рассмотренном интервале изменения параметров λ и H , за исключением $H < 1$. При $H < 1$ (а также при $\gamma < 0.5$) необходимо пользоваться другими выражениями для C_f , полученными разложением в ряд подынтегральной функции $\sqrt{\psi}$ в формулах (10) в окрестности значения ψ при $H = 0$. Поскольку $\psi = p^2 h^2$, то из физических соображений ясно, что $\psi \rightarrow h^2$ при $H \rightarrow 0$. Не останавливаясь на выводе формулы для C_f при $H < 1$ и $\gamma < 0.5$, который аналогичен выводу равенств (11), приведем окончательный результат для первого приближения по методу Галеркина

$$C_x = -\frac{\pi a_1}{3\lambda^2} \left(\frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}} - 1 \right)$$

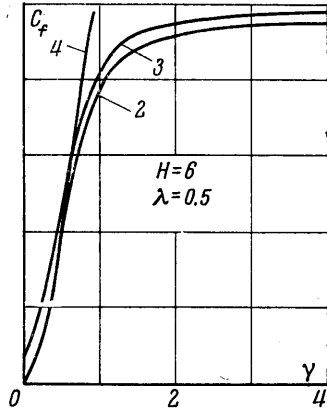
$$C_y = \frac{\pi \lambda a_0}{3(1-\lambda^2)\sqrt{1-\lambda^2}} + \frac{\pi b_1}{3} \times$$

$$\times \left[\frac{1}{(1-\lambda^2)\sqrt{1-\lambda^2}} - \frac{1}{\lambda^2} \left(\frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}} - 1 \right) \right] \quad (13)$$

где коэффициенты a_0 , a_1 и b_1 по-прежнему определяются из равенств (8). Результаты, полученные по формулам (13) при $H < 1$, отличаются от данных численного интегрирования Раймонди меньше, чем на 10%.

На фиг. 4 приведена зависимость несущей способности от удлинения подшипника; кривая 2 — численный расчет по формулам (10) с использованием первого приближения (7), (8); кривая 3 — расчет по формулам (11); кривая 4 — расчет по формулам (13).

Как видно из фиг. 4, при $\gamma > 2$ коэффициент несущей способности практически уже не зависит от удлинения подшипника. Таким образом, предложенный в работе метод решения уравнения Рейнольдса приводит к сравнительно простым расчетным формулам, позволяющим уже в первом приближении получать удовлетворительные результаты.



Фиг. 4

Поступило 13 VII 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Шейнберг С. А. Газовая смазка подшипников скольжения. Сб. «Трение и износ в машинах». Изд-во АН СССР, 1953, т. 8.
2. Elrod H., Burgdorfer A. Refinement of the theory of the infinitely-long, self-acting gas-lubricated journal bearing. Proc. First Intern. Symp. on gas-lubricated bearings. Washington, ONR/ACR-49, 1959.
3. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. Физматгиз, 1962.
4. Constantinescu V. N. Lubrificatia cu gaze. Editura ARPR, 1963.

К РАСЧЕТУ ТЕПЛОПЕРЕДАЧИ НА ЛОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ ЗАТУПЛЕННОГО ТЕЛА В ГИПЕРЗВУКОВОМ ПОТОКЕ

Ю. Н. ЕРМАК, В. Я. НЕЙЛАНД

(Москва)

В работе рассматривается обтекание лобовой части тупоносого тела гиперзвуковым потоком вязкого газа при больших значениях числа Рейнольдса R ($R = \rho_0 u_0 \mu_0 / \tau$, где индексом 0 отмечены значения величин в набегающем потоке). Этой задаче посвящено достаточно много работ, из которых можно отметить [1-3]. Цель исследований обычно заключается в определении теплового потока в критической точке тела. Эти работы выполнены в рамках теории пограничного слоя в первом [1, 2] или во втором приближениях [3]. Если учесть, что при гиперзвуковой скорости потока отношение плотности газа до и после скачка уплотнения $\epsilon = \rho_0 / \rho_1$ мало, то для решения задачи можно использовать так называемую ньютоновскую теорию, в рамках которой отыскивается асимптотическое решение уравнений Навье — Стокса (см., например, [3]) при $M_0 \rightarrow \infty$, $\epsilon \rightarrow 0$ и $R \rightarrow \infty$. В рамках этой теории в первом приближении между телом и ударной волной образуется невязкий ударный слой с толщиной порядка ϵr . Течение в нем описывается вблизи критической точки уравнениями

Эйлера, в которых исчезает член, учитывающий продольный градиент давления. Для получения этих уравнений необходимо ввести безразмерные координаты с учетом толщины ударного слоя и продольного размера минимальной области влияния вблизи скачка уплотнения

$$x = re^{1/2}\bar{x}, \quad y = re\bar{y} \quad (1)$$

где r — радиус кривизны контура тела, а x, y — ортогональная криволинейная система координат, связанная с поверхностью тела и направлением нормали к ней. Разложения для функции течения в окрестности критической точки можно представить в форме

$$u = u_0 \varepsilon^{1/2} [\bar{u}(\bar{y})\bar{x} + \dots], \quad v = u_0 \varepsilon [\bar{v}(\bar{y}) + \dots] \quad (2)$$

$$\rho = \rho_0 \varepsilon^{-1} [\bar{\rho}(\bar{y}) + \dots], \quad p = \rho_0 u_0^2 [\bar{p}(\bar{y}) + \dots], \quad h = 1/2 u_0^2 [\bar{h}(\bar{y}) + \dots]$$

Тогда из уравнений Навье — Стокса в первом приближении получаем

$$2u + v' = 0, \quad u^2 + uv' = 0 \quad (3)$$

Здесь отброшены черточки над безразмерными величинами. Учитывая граничные условия на скачке уплотнения, можно получить

$$u = \sqrt{-v}, \quad y = y_2 + \sqrt{-v} - 1, \quad p = g = 1 \quad (4)$$

Так как на волне $u = -v = 1$ при $y = y_2$. Вблизи поверхности тела $v \rightarrow 0$, $u \rightarrow 0$.

Инерционные члены в уравнении импульса в слое с толщиной порядка $re^{3/2}$ становятся того же порядка по величине, что и выпавший член с продольным градиентом давления. Поэтому для получения равномерно точного решения и в этой области необходимо ввести новые безразмерные координаты и функции течения

$$x = re^{1/2}\bar{x}, \quad y = re^{3/2}Y, \quad u = u_0 \varepsilon [U(Y)\bar{x} + \dots], \quad v = u_0 \varepsilon^2 [V(Y) + \dots] \quad (5)$$

Такой слой рассматривался в работе [4] при решении задачи об обтекании гиперзвуковым потоком невязкого газа плоской пластины, установленной поперек набегающего потока. После подстановки (5) в уравнения Навье — Стокса в первом приближении получаются уравнения

$$2U + V' = 0, \quad U^2 + UV' = 2 \quad (6)$$

Интегрируя (6), получаем

$$U = (Y + \sqrt{2C}) / C, \quad V = C(2 - U^2) \quad (7)$$

Использование известного принципа сращивания внешнего и внутреннего асимптотических разложений позволяет определить константы: $C = 1$ и $y_2 = 1 + 0(\varepsilon^{1/2})$. Таким образом, градиент скорости на поверхности тела получается равным $u_0 \sqrt{2\varepsilon} / r$. Это значение получается и в обычной ньютоновской теории. Его используют в качестве краевого условия для пограничного слоя, уравнения которого получаются при асимптотическом разложении уравнений Навье — Стокса в области с толщиной порядка $R^{-1/2}$, прилегающей непосредственно к поверхности тела.

Таким образом, при обычной схеме нахождения асимптотического решения уравнений Навье — Стокса предельный переход $\varepsilon \rightarrow 0$, $M_0 \rightarrow \infty$, $R \rightarrow \infty$ осуществляется так, чтобы весь ударный слой распадался на две невязкие области и пограничный слой. Такой предельный переход хорошо описывает режимы течений при умеренных значениях числа M_0 , ε и больших R .

В настоящей работе рассмотрен другой тип предельного перехода $M_0 \rightarrow \infty$, $\varepsilon \rightarrow 0$, $R \rightarrow \infty$, при котором вязкие эффекты остаются существенными во всем внутреннем слое с толщиной $\varepsilon^{3/2}r$. Это значит, что толщина пограничного слоя и внутреннего невязкого слоя имеют один порядок по величине.

Введем параметр $R_1 = R\mu_1 / \mu_0$. В рассматриваемом предельном переходе параметр $\Delta = 1 / R_1 \varepsilon^{5/2}$ остается конечным при $M_0 \rightarrow \infty$, $\varepsilon \rightarrow 0$ и $R_1 \rightarrow \infty$. Он характеризует отношение толщины пограничного слоя и внутреннего невязкого слоя. Толщина скачка уплотнения, как видно из оценок, остается пренебрежимо малой, т. е. переход через скачок уплотнения описывается по-прежнему решением Гюгонно. В слое с толщиной порядка er асимптотические разложения и решения сохраняют прежний вид (1) — (3).

Безразмерные координаты и функции в вязкой области течения имеют вид (5). Подставляя их в уравнения Навье — Стокса и учитывая условие $R_1 \varepsilon^{5/2} = \text{const}$, получаем в первом приближении следующие уравнения, разложенные по x :

$$2\rho U + (\rho V)' = 0, \quad \rho V g' = \Delta[(\mu / \sigma) g']', \quad \rho(U^2 + VU') = 2\Delta(\mu U')' \quad (8)$$

Граничные условия для системы (8) известны только на стенке $U = V = 0$, недостающие краевые условия получаются при сращивании с решением (4). Вводя функцию тока и переменные Дородницына, преобразуем систему к виду (9)

$$\Delta(Nf'')' + 2ff'' + 2/\rho - (\eta')^2 = 0, \quad \Delta[(N/\sigma)g']' + 2fg' = 0 \left(N = \frac{\rho\mu}{\rho_e\mu_e}, \quad \eta = \int_0^Y \rho dY \right)$$

Здесь дифференцирование проводится по переменной Дородницына. Граничные условия на стенке имеют обычный вид

$$f(0) = f'(0) = 0; \quad g(0) = g_w \tag{10}$$

Недостающее граничное условие для уравнения импульсов, полученное в результате сращивания решений системы (9) с решениями (4), имеет вид

$$(\partial^2 f / \partial \eta^2)_{\eta \rightarrow \infty} = (\partial u / \partial y)_{y \rightarrow 0} = 1, \quad \text{или} \quad f''(\infty) = 1 \tag{11}$$

Внешнее краевое условие для уравнения энергии осталось прежним

$$g(\infty) = 1 \tag{12}$$

Краевая задача (9) — (12) отличается от рассматривавшейся ранее в работах [1, 2] и других появлением нового параметра подобия Δ , физический смысл которого указан выше. Изменилось и внешнее краевое условие для уравнения импульсов. Из физического смысла очевидно, что асимптотическое решение (9) — (12) при $\Delta \rightarrow 0$ должно совпадать с решением, полученным в [1, 2] и других работах. Нетрудно показать, что это действительно имеет место, так как асимптотическое решение (9) — (12) при $\Delta \rightarrow 0$ имеет вид

$$f'' \rightarrow \varphi'' / \sqrt{\Delta}, \quad g' \rightarrow h' / \sqrt{\Delta} \tag{13}$$

где φ и h — решения краевой задачи

$$(N\varphi'')' + 2\varphi\varphi'' + 2/\rho - (\varphi')^2 = 0, \quad [(N/\sigma)h']' + 2\varphi h' = 0$$

$$\varphi(0) = \varphi'(0) = 0, \quad h(0) = h_w \equiv g_w, \quad \varphi'(\infty) = \sqrt{2}, \quad h(\infty) = 1$$

Уравнения (9) с граничными условиями (10), (11), (12) решались на ЭВМ М-20. Приводим результаты вычислений для различных Δ при трех значениях температурных факторов g_w (значение $g_w = 1$ соответствует адиабатической стенке).

| | | | | | | | |
|--|--|-----------------------|----------------|----------------|----------------------|----------------------|------|
| | $g_w = 0.1,$ | $\varphi_w'' = 0.88,$ | $h_w' = 0.41$ | | | | |
| | $\Delta = 10^{-2}$ | 0.37 | $10^{-1} 0.11$ | $10^{-1} 0.22$ | 0.11 | 0.43 | 0.51 |
| | $f_w'' = 14.82$ | | 8.76 | 6.31 | 3.11 | 1.80 | 1.70 |
| | $\sim \varphi_w'' / \sqrt{\Delta} = 14.39$ | | 8.39 | 5.40 | 2.67 | 1.33 | 1.23 |
| | $g_w' = 6.72$ | | 3.92 | 2.79 | 1.31 | 0.69 | 0.64 |
| | $\sim h_w' / \sqrt{\Delta} = 6.69$ | | 3.90 | 2.765 | 1.24 | 0.62 | 0.57 |
| | $\Delta = 0.63$ | 0.79 | 0.90 | 1.00 | 3.86 | 11.33 | |
| | $f_w'' = 1.58$ | 1.46 | 1.41 | 1.36 | 0.96 | 0.80 | |
| | $\varphi_w'' / \sqrt{\Delta} = 1.07$ | 0.98 | 0.92 | 0.88 | 0.447 | 0.262 | |
| | $g_w' = 0.58$ | 0.53 | 0.50 | 0.48 | 0.27 | 0.18 | |
| | $h_w' / \sqrt{\Delta} = 0.517$ | 0.45 | 0.43 | 0.41 | 0.209 | 0.13 | |
| | $g_w = 10^{-3},$ | $\varphi_w'' = 0.24,$ | $h_w' = 0.13$ | | | | |
| | $\Delta = 10^{-4}$ | 0.16 | $10^{-2} 0.24$ | $10^{-1} 0.17$ | $10^{-1} 0.19$ | $10^{-1} 0.51$ | 0.10 |
| | $f_w'' = 63.56$ | | 5.25 | 2.09 | 1.96 | 1.26 | 0.92 |
| | $\sim \varphi_w'' / \sqrt{\Delta} = 61.53$ | | 4.85 | 1.80 | 1.72 | 1.05 | 0.76 |
| | $g_w' = 34.51$ | | 2.80 | 1.09 | 1.02 | 0.63 | 0.45 |
| | $\sim h_w' / \sqrt{\Delta} = 33.33$ | | 2.61 | 1.01 | 0.93 | 0.57 | 0.41 |
| | $\Delta = 0.19$ | 0.48 | 0.88 | 1.00 | 2.39 | 4.48 | |
| | $f_w'' = 0.72$ | 0.51 | 0.42 | 0.40 | 0.32 | 0.28 | |
| | $\sim \varphi_w'' / \sqrt{\Delta} = 0.55$ | 0.347 | 0.256 | 0.24 | 0.15 | 0.11 | |
| | $g_w' = 0.34$ | 0.22 | 0.17 | 0.16 | 0.11 | $10^{-1} 0.89$ | |
| | $\sim h_w' / \sqrt{\Delta} = 0.298$ | 0.187 | 0.138 | 0.13 | $0.84 \cdot 10^{-1}$ | $0.61 \cdot 10^{-1}$ | |

| | | | | | |
|---|----------------------|----------------------|----------------------|-------|-------|
| $g_w = 1,$ | $h'_w = 0,$ | $\Phi''_w = 2.206$ | | | |
| $\Delta = 0.81 \cdot 10^{-3}$ | $0.44 \cdot 10^{-3}$ | $0.20 \cdot 10^{-1}$ | $0.46 \cdot 10^{-1}$ | 0.13 | 0.25 |
| $f''_w = 77.94$ | 33.79 | 16.24 | 10.91 | 6.82 | 5.10 |
| $\sim \Phi''_w / \sqrt{\Delta} = 77.40$ | 33.2 | 15.65 | 10.25 | 6.13 | 4.40 |
| $\Delta = 0.59$ | 0.7 | 0.814 | 1.00 | 1.988 | 10 |
| $f''_w = 3.57$ | 3.346 | 3.158 | 2.92 | 2.30 | 1.499 |
| $\sim \Phi''_w / \sqrt{\Delta} = 2.87$ | 2.63 | 2.44 | 2.206 | 1.56 | 0.69 |

Во всех расчетах принималось, что $\sigma = 0.74$ и закон изменения вязкости $\mu \sim g^0$, где $\omega = 0.76$.

Можно видеть, что при $\Delta = 1$ тепловой поток на 17—23% больше, чем соответствующая величина для обычного пограничного слоя. Величина $\Delta \sim 1$ соответствует, например, режимам полетов с числом $M > 20$, $\varepsilon = 0.1$ и числами R порядка 10^{+4} .

Поступило 23 XII 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Sibulkin M. Heat transfer near the forward stagnation point of a body of revolution. J. Aeronaut. Sci., 1952, vol. 19, No. 8.
2. Fay I. A., Riddell F. R. Theory of stagnation point heat transfer in dissociated air J. Aeronaut. Sci., 1958, vol. 25, No. 2.
3. Ван-Дайк М. Теория сжимаемого пограничного слоя во втором приближении с применением к обтеканию затупленных тел гиперзвуковым потоком. Сб. «Исследование гиперзвуковых течений». Изд. «Мир», 1964.
4. Коул Ж., Райнерд Ж. «Обтекание тонких крыльев гиперзвуковыми потоками при больших углах атаки». Сб. «Исследование гиперзвуковых течений». Изд. «Мир», 1964.

О РАСЧЕТЕ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОГО ГАЗА В КАНАЛЕ

А. П. БЫРКИН, И. И. МЕЖИРОВ

(Москва)

В работе рассмотрена постановка задачи о ламинарном течении газа в длинных каналах с плавным контуром. Установлены законы подобия, которым подчиняются такие течения. Методом интегральных соотношений получены численные решения для течения газа в круглой трубе и плоском канале постоянной высоты при различных температурных условиях на стенке.

§ 1. Постановка задачи. Законы подобия. Рассмотрим ламинарное стационарное течение газа в осесимметричном или плоском канале, характерный радиус поперечного сечения (или высота) которого δ много меньше длины канала l , так что $\delta/l \ll 1$. Будем предполагать также, что контур канала достаточно плавный, т. е. $r/l \ll 1$, где r — радиус продольной кривизны контура. При этом, как известно, в уравнениях Навье — Стокса, описывающих течение вязкого газа, может быть опущен ряд членов, и они переходят в более простые уравнения пограничного слоя

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{dp}{dx} + \frac{1}{y^\nu} \frac{\partial}{\partial y} \left(y^\nu \mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (y^\nu \rho u) + \frac{\partial}{\partial y} (y^\nu \rho v) = 0 \quad (1.2)$$

$$\rho u \frac{\partial H}{\partial x} + \rho v \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{1}{y^\nu} \frac{\partial}{\partial y} \left(y^\nu \mu \frac{\partial H}{\partial y} \right) + \frac{1}{y^\nu} \frac{\partial}{\partial y} \left[y^\nu \mu \left(\frac{1}{P} - 1 \right) \frac{\partial h}{\partial y} \right] \quad (1.3)$$

Здесь x, y — расстояния, измеряемое вдоль оси и по нормали к оси канала (в случае плоского несимметричного канала ось x может быть направлена вдоль одной из стенок, а ось y по нормали к ней); ρ — плотность газа; p — давление; u, v — продольная и поперечная составляющие скорости; h — энтальпия газа; H — энтальпия торможения; μ — коэффициент вязкости; P — число Прандтля; величина ν принимает значения 1 — в случае осесимметричного канала и 0 — в случае плоского канала.

В приближении пограничного слоя давление p постоянно по сечению канала. К уравнениям (1.1) — (1.3) должно быть добавлено уравнение состояния

$$h = h(p, \rho) \quad (1.4)$$

и соотношения, определяющие зависимость коэффициента вязкости μ и числа Прандтля P от параметров состояния газа (предполагается, что течение газа — термодинамически и химически равновесно).