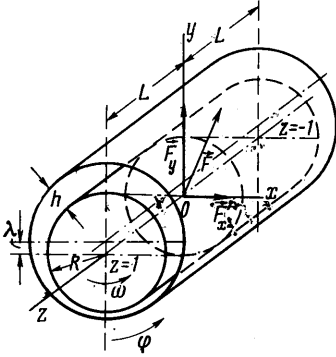


**ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ РЕЙНОЛЬДСА
ДЛЯ РАДИАЛЬНОГО ГАЗОВОГО ПОДШИПНИКА КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ**

Н. Д. ЗАБЛОЦКИЙ (Ленинград)

При решении задач газовой смазки обычно приходится иметь дело с нелинейным уравнением Рейнольдса. Рассмотрим один из возможных методов приближенного решения этого уравнения. На фиг. 1 приведена схема цилиндрического подшипника с газовой смазкой. Здесь же указаны системы координат (цилиндрическая и декартова), используемые в работе. Уравнение Рейнольдса для данной задачи в безразмерных величинах имеет вид [1]



Фиг. 1

Рассмотрим случай радиального смещения шипа. Тогда уравнение зазора запишется в следующей форме (λ — безразмерный эксцентриситет):

$$h = 1 - \lambda \cos \varphi \quad (2)$$

Перейдем в (1) к новой переменной $\psi = p^2 h^2$, будем иметь

$$h \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \gamma^2 h \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} - \gamma^2 \lambda \sin \varphi \frac{\partial \psi}{\partial \varphi} - 2\gamma^2 \lambda \psi \cos \varphi = 2H\gamma^2 \frac{\partial \sqrt{\psi}}{\partial \varphi} \quad (3)$$

Линеаризуем правую часть этого уравнения. Известно [1], что при $H \rightarrow \infty$ произведение ph стремится к постоянной величине. Обозначим через ψ_∞ значение ψ при $H = \infty$

$$\psi_\infty = \lim \psi = \lim (ph)^2 = \text{const}, \quad H \rightarrow \infty$$

Величину ψ_∞ можно определить из условия [2]

$$\int_0^{2\pi} p^2 h^3 d\varphi = \pi(2 + 3\lambda^2)$$

Используя последнее равенство, получим следующее выражение для постоянной ψ_∞ :

$$\psi_\infty = 1 + 1.5\lambda^2$$

Отметим, что функция ψ имеет наибольший интервал изменения (от $\psi_- = (1 - \lambda)^2$ до $\psi_+ = (1 + \lambda)^2$) при $H = 0$. С увеличением H этот интервал сокращается, и при $H = \infty$ функция ψ вырождается в константу ψ_∞ .

Обработка данных численного интегрирования плоской задачи [2] показывает, что при любом H среднее значение ψ , равное $1/2(\psi_- + \psi_+)$, мало отличается от величины ψ_∞ . В предельном случае при $H \rightarrow 0$ среднее значение ψ равно $1 + \lambda^2$, в то время как $\psi_\infty = 1 + 1.5\lambda^2$.

Имея в виду очевидное условие $\psi > 0$, можно, полагаясь на сказанное, предположить, что при любых значениях ψ выполняется неравенство

$$\left| \frac{\psi - \psi_\infty}{\psi_\infty} \right| < 1$$

Это позволяет разложить в степенный ряд входящую в правую часть уравнения (3) иррациональную функцию

$$\sqrt{\psi} = \sqrt{\psi_\infty} \left(1 - \frac{\psi_\infty - \psi}{\psi_\infty} \right)^{1/2} = \sqrt{\psi_\infty} \left[1 - \frac{\psi_\infty - \psi}{2\psi_\infty} - \frac{1}{8} \left(\frac{\psi_\infty - \psi}{\psi_\infty} \right)^2 - \dots \right]$$

Ограничиваясь двумя членами разложения, будем иметь

$$\sqrt{\psi} \approx 1/2(\sqrt{\psi_\infty} + \psi / \sqrt{\psi_\infty}) \quad (4)$$

Заменяя в (3) $\sqrt{\psi}$ только что полученной приближенной зависимостью, а также вводя новую переменную $\psi^* = \psi - h^2$, удовлетворяющую однородным условиям на торцах подшипника, перепишем уравнение (3) в форме

$$h \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial z^2} + \gamma^2 h \frac{\partial^2 \psi^*}{\partial \varphi^2} - (\gamma^2 \lambda \sin \varphi + H_1) \frac{\partial \psi^*}{\partial \varphi} - 2\gamma^2 \lambda \psi^* \cos \varphi = 2H_1 h \lambda \sin \varphi \quad (5)$$

$$(H_1 = \gamma^2 H / \sqrt{\psi_\infty})$$

В силу очевидной симметрии распределения давление относительно среднего сечения подшипника, можно искать решения уравнения (5) только для области $0 \leq z \leq 1$. Таким образом, функция $\psi^*(z)$ должна удовлетворять условиям

$$\partial \psi^* / \partial z |_{z=0} = 0, \quad \psi^*(z=1) = 0, \quad \psi^*(\varphi, z) = \psi^*(\varphi + 2\pi, z) \quad (6)$$

Для нахождения функции ψ^* воспользуемся методом Галеркина [3]. Представим n -е приближение, удовлетворяющее условиям (6), в виде

$$\psi^* = a_0(1 - z^2) + \sum_{k=1}^n (1 - z^2)^k (a_k \sin k\varphi + b_k \cos k\varphi) \quad (7)$$

Ограничимся в рассматриваемом решении двумя приближениями. Тогда, следуя методу Галеркина, подставив решение (7) в уравнение (5) и домножив результат подстановки поочередно на $(1 - z^2)$, $(1 - z^2) \sin \varphi$, $(1 - z^2) \cos \varphi$ и т. д., проинтегрируем полученные выражения по z в пределах от 0 до 1 и по φ в пределах от 0 до 2π . Для первого приближения получим систему трех алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} a_0 &= 1/2 \lambda b_1, & -(1 + 2/5 \gamma^2) a_1 + 2/5 H_1 b_1 &= H_1 \lambda, \\ 2/5 H_1 a_1 + [1 + 2/5 \gamma^2 - (1/2 - 2/5 \gamma^2) \lambda^2] b_1 &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

Для второго приближения будем иметь систему пяти уравнений

$$\begin{aligned} a_0 &= 1/2 \lambda b_1, & -(1 + 2/5 \gamma^2) a_1 + 2/5 H_1 b_1 + (2/5 + 2^4/35 \gamma^2) \lambda a_2 &= H_1 \lambda \\ 2/5 H_1 a_1 + [1 + 2/5 \gamma^2 - (1/2 - 2/5 \gamma^2) \lambda^2] b_1 - (2/5 + 2^4/35 \gamma^2) \lambda b_2 &= 0 \\ (1 - 6/7 \gamma^2) \lambda a_1 - (16/7 + 6^4/21 \gamma^2) a_2 + 3^2/21 H_1 b_2 &= -H_1 \lambda^2 \\ (1 - 6/7 \gamma^2) \lambda b_1 - 3^2/21 H_1 a_2 - (16/7 + 6^4/21 \gamma^2) b_2 &= 0 \end{aligned} \quad (9)$$

Отметим, что в системе (8) последние два, а в системе (6) последние четыре уравнения будут автономными (в них не входит неизвестное a_0). Таким образом, для нахождения первого приближения по существу надо решить систему двух уравнений с двумя неизвестными, а для второго приближения — систему четырех уравнений с четырьмя неизвестными.

Перейдем к вычислению главного вектора сил давления F , приложенного к штипу. Разложим силу F на две составляющие: F_x и F_y (фиг. 1) и введем коэффициенты сил C_f , C_x и C_y

$$C_f = \frac{F}{4RLp_a}, \quad C_x = \frac{F_x}{4RLp_a}, \quad C_y = \frac{F_y}{4RLp_a}$$

Из фиг. 1 следует, что коэффициенты C_x и C_y можно выразить через давление следующим образом:

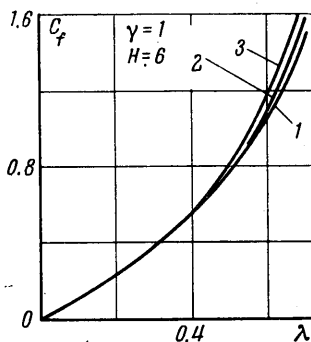
$$C_x = -\frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{2\pi} p \sin \varphi \, d\varphi \, dz, \quad C_y = \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{2\pi} p \cos \varphi \, d\varphi \, dz \quad \left(p = \frac{\sqrt{\psi}}{h} = \frac{\sqrt{\psi^* + h^2}}{h} \right) \quad (10)$$

Сложный характер зависимости давления p от координат не позволяет точно вычислить интегралы, входящие в выражения (10). Поэтому воспользуемся прибли-

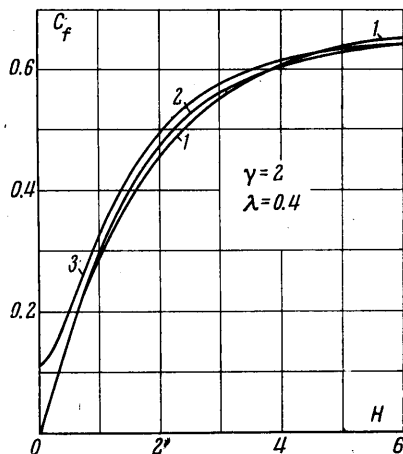
женным равенством (4). Перепишем формулу для C_x следующим образом:

$$C_x \approx -\frac{1}{4} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \left(\sqrt{\psi_\infty} + \frac{\psi^* + h^2}{\sqrt{\psi_\infty}} \right) \frac{\sin \varphi}{h} d\varphi dz$$

Вычисление интегралов в последнем выражении уже не вызывает затруднений. Опуская промежуточные выкладки, приведем окончательный результат. Для $\psi^* = \psi_1^*$ (ψ_1^* — значение функции ψ^* в первом приближении) бу-



Фиг. 2



Фиг. 3

дем иметь следующие формулы расчета коэффициентов C_x и C_y (последовательность действий при определении коэффициента C_y такая же, как и для C_x):

$$C_x = -\frac{\pi}{3 \sqrt{\psi_\infty}} a_1 \left[\frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}} \left(1 - \frac{1}{\lambda^2} \right) + \frac{1}{\lambda^2} \right] \quad (11)$$

$$C_y = -\frac{\pi}{2 \sqrt{\psi_\infty}} \left[\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{\lambda} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}} \right) \left(\psi_\infty + \frac{2}{3} a_0 + \frac{2}{3} \frac{b_1}{\lambda} \right) \right]$$

Здесь a_0 , a_1 , b_1 определяются из системы (8). Используя результаты второго приближения $\psi^* = \psi_2^*$, получим для C_x и C_y такие выражения:

$$C_x = -\frac{\pi}{3 \sqrt{\psi_\infty}} a_1 \left[\frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}} \left(1 - \frac{1}{\lambda^2} \right) + \frac{1}{\lambda^2} \right] + \frac{4\pi}{15\lambda \sqrt{\psi_\infty}} a_2 \left[1 - \frac{2}{\lambda} \frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}} \left(1 - \frac{1}{\lambda^2} \right) - \frac{2}{\lambda^3} \right] \quad (12)$$

$$C_y = -\frac{\pi}{2 \sqrt{\psi_\infty}} \left[\frac{\lambda}{2} + \frac{1}{\lambda} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}} \right) \right] \times \left(\psi_\infty + \frac{2}{3} a_0 + \frac{2}{3} \frac{b_1}{\lambda} + \frac{16}{15} \frac{b_2}{\lambda^2} \right) + \frac{8}{15} \frac{b_2}{\lambda} \frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}}$$

Здесь коэффициенты a_0 , a_1 , a_2 , b_1 , b_2 суть решения системы (9).

Для оценки точности решения (7) — (9) было проведено сравнение его с данными численного интегрирования Раймонди, заимствованными из монографии [4]. На фиг. 2 и 3 приведены зависимости коэффициента C_f соответственно от параметров λ и H . Цифрой 1 отмечены кривые, полученные Раймонди [4]. Кривые 2 на этих графиках соответствуют первому приближению ($n = 1$), полученному в настоящей работе, причем интегралы в формулах (10) определялись численным методом. Из сравнения кривых 1 и 2 на фиг. 2 и 3 видно, что предложенный в данной работе метод линеаризации уравнения Рейнольдса с последующим использованием метода Галеркина приводит к хорошим результатам уже в первом приближении. Расчет показал, что второе приближение ($n = 2$) практически совпадает с численным интегрированием.

На этих же фигурах кривые 3 — результаты расчета по формуле (11). Расхождение между кривыми 1 и 3 — небольшое во всем рассмотренном интервале изменения параметров λ и H , за исключением $H < 1$. При $H < 1$ (а также при $\gamma < 0.5$) необходимо пользоваться другими выражениями для C_f , полученными разложением в ряд подынтегральной функции $\sqrt{\psi}$ в формулах (10) в окрестности значения ψ при $H = 0$. Поскольку $\psi = p^2 h^2$, то из физических соображений ясно, что $\psi \rightarrow h^2$ при $H \rightarrow 0$. Не останавливаясь на выводе формулы для C_f при $H < 1$ и $\gamma < 0.5$, который аналогичен выводу равенств (11), приведем окончательный результат для первого приближения по методу Галеркина

$$C_x = -\frac{\pi a_1}{3\lambda^2} \left(\frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}} - 1 \right)$$

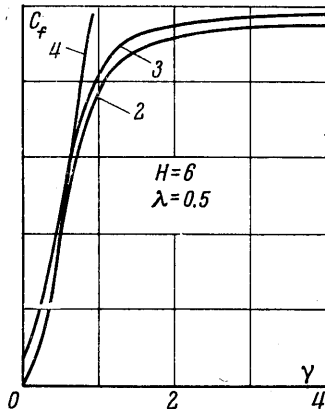
$$C_y = \frac{\pi \lambda a_0}{3(1-\lambda^2)\sqrt{1-\lambda^2}} + \frac{\pi b_1}{3} \times$$

$$\times \left[\frac{1}{(1-\lambda^2)\sqrt{1-\lambda^2}} - \frac{1}{\lambda^2} \left(\frac{1}{\sqrt{1-\lambda^2}} - 1 \right) \right] \quad (13)$$

где коэффициенты a_0 , a_1 и b_1 по-прежнему определяются из равенств (8). Результаты, полученные по формулам (13) при $H < 1$, отличаются от данных численного интегрирования Раймонди меньше, чем на 10%.

На фиг. 4 приведена зависимость несущей способности от удлинения подшипника; кривая 2 — численный расчет по формулам (10) с использованием первого приближения (7), (8); кривая 3 — расчет по формулам (11); кривая 4 — расчет по формулам (13).

Как видно из фиг. 4, при $\gamma > 2$ коэффициент несущей способности практически уже не зависит от удлинения подшипника. Таким образом, предложенный в работе метод решения уравнения Рейнольдса приводит к сравнительно простым расчетным формулам, позволяющим уже в первом приближении получать удовлетворительные результаты.



Фиг. 4

Поступило 13 VII 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Шейнберг С. А. Газовая смазка подшипников скольжения. Сб. «Трение и износ в машинах». Изд-во АН СССР, 1953, т. 8.
2. Elrod H., Burgdorfer A. Refinement of the theory of the infinitely-long, self-acting gas-lubricated journal bearing. Proc. First Intern. Symp. on gas-lubricated bearings. Washington, ONR/ACR-49, 1959.
3. Канторович Л. В., Крылов В. И. Приближенные методы высшего анализа. Физматгиз, 1962.
4. Constantinescu V. N. Lubrificatia cu gaze. Editura ARPR, 1963.

К РАСЧЕТУ ТЕПЛОПЕРЕДАЧИ НА ЛОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ ЗАТУПЛЕННОГО ТЕЛА В ГИПЕРЗВУКОВОМ ПОТОКЕ

Ю. Н. ЕРМАК, В. Я. НЕЙЛАНД

(Москва)

В работе рассматривается обтекание лобовой части тупоносого тела гиперзвуковым потоком вязкого газа при больших значениях числа Рейнольдса R ($R = \rho_0 u_0 \mu_0 / \tau$, где индексом 0 отмечены значения величин в набегающем потоке). Этой задаче посвящено достаточно много работ, из которых можно отметить [1-3]. Цель исследований обычно заключается в определении теплового потока в критической точке тела. Эти работы выполнены в рамках теории пограничного слоя в первом [1, 2] или во втором приближениях [3]. Если учесть, что при гиперзвуковой скорости потока отношение плотности газа до и после скачка уплотнения $\epsilon = \rho_0 / \rho_1$ мало, то для решения задачи можно использовать так называемую ньютоновскую теорию, в рамках которой отыскивается асимптотическое решение уравнений Навье — Стокса (см., например, [3]) при $M_0 \rightarrow \infty$, $\epsilon \rightarrow 0$ и $R \rightarrow \infty$. В рамках этой теории в первом приближении между телом и ударной волной образуется невязкий ударный слой с толщиной порядка ϵr . Течение в нем описывается вблизи критической точки уравнениями