

Возможность рассмотрения задачи о сверхзвуковом обтекании колеблющихся затупленных профилей в линейной постановке подтверждается сравнением расчетов обтекания эллиптического цилиндра с $\delta = 2$, полученных при решении нелинейной стационарной задачи и по методу малых возмущений.

На фиг. 6 пунктирными линиями изображена зависимость p_α и $p_{\alpha'}$ по поверхности цилиндра ($\beta_0 = 5^\circ$). На той же фигуре сплошные линии — распределение давления, определенного в результате решения нелинейной стационарной задачи при $\beta_0 = 5^\circ, 10^\circ$; $M_\infty = 6$; точками нанесены соответствующие значения, полученные при помощи решения α -задачи. Максимальное отличие не превышает 1,5%. Таким образом, метод малых возмущений для плоских затупленных тел дает хорошие результаты для амплитуды колебаний $\alpha_0 \leq 10^\circ$.

Авторы благодарят Г. Ф. Теленина за внимание и помощь, оказанные при выполнении работы.

Поступило 26 XII 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Гилинский С. М., Теленин Г. Ф., Гиняков Г. П. Метод расчета сверхзвукового обтекания затупленных тел с отошедшей ударной волной. Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1964, № 4.
2. Гилинский С. М., Лебедев М. Г. Расчет обтекания эллиптических цилиндров сверхзвуковым потоком совершенного газа. Изв. АН СССР, Механика, 1965, № 3.
3. Гилинский С. М., Лебедев М. Г. Исследование обтекания плоских и осесимметричных тел с отошедшей ударной волной потоком с малой сверхзвуковой скоростью. Изв. АН СССР, Механика, 1965, № 1.
4. Теленин Г. Ф., Липницкий Ю. М. Нестационарное сверхзвуковое обтекание затупленных тел с отошедшей ударной волной. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 4.

ПРОФИЛЬ МАКСИМАЛЬНОГО КАЧЕСТВА В ВЯЗКОМ ГИПЕРЗВУКОВОМ ПОТОКЕ

В. С. НИКОЛАЕВ (Москва)

Рассмотрено обтекание нижней поверхности тонкого профиля под малым углом атаки с учетом взаимодействия пограничного слоя с невязким гиперзвуковым потоком. При решении задачи обтекания используются метод касательных клиньев с учетом толщины вытеснения пограничного слоя и приближенный метод расчета пограничного слоя, основанный на использовании автоматических решений. Ставится вариационная задача определения формы кривой, обеспечивающей максимальное аэродинамическое качество. Форма оптимальной кривой и выражение для максимального качества получены в аналитическом виде.

В сборнике [1] опубликована серия статей, посвященных вариационным задачам сверхзвуковой и гиперзвуковой газовой динамики. В ряде работ [1] вариационные задачи поставлены с учетом трения, причем выражения для коэффициента трения принимались весьма приближенными.

Ниже задача определения оптимальной формы профиля рассматривается с учетом взаимодействия пограничного слоя с невязким гиперзвуковым потоком при таких режимах обтекания, когда пограничный слой оказывает существенное вытесняющее влияние на невязкий поток.

§ 1. Будем рассматривать только обтекание нижней поверхности профиля в связи с относительной малостью вклада верхней поверхности в суммарные аэродинамические характеристики при гиперзвуковых скоростях. Газ считаем совершенным. Принимаем

$$\left(\frac{dy}{dx} + \frac{d\delta}{dx}\right)^2 \ll 1, \quad M^2 \left(\frac{dy}{dx} + \frac{d\delta}{dx}\right)^2 \gg 1, \quad \sigma = \text{const}, \quad \frac{T_w}{T_0} = \text{const}$$

$$\mu \propto T^m, \quad m = \text{const}$$

Здесь ось x направлена по набегающему потоку, y — ордината тела, δ — толщина вытеснения пограничного слоя, M — число Маха набегающего потока, T — температура, T_0 — температура торможения набегающего потока, μ — коэффициент вязкости, σ — число Прандтля. В дальнейшем индексы ∞ и w будут относиться к параметрам набегающего потока и на поверхности тела. Давление на внешней границе

пограничного слоя определяем при помощи метода касательных клиньев

$$p_1 = \frac{2p}{\rho_\infty u_\infty^2} = (\kappa + 1) \left(\frac{dy}{dx} + \frac{d\delta}{dx} \right)^2 \quad (1.1)$$

Здесь p — давление, ρ — плотность, u — скорость, κ — показатель адиабаты.

Для решения уравнений пограничного слоя используем метод локальной автомодельности [2], позволяющий получить второе соотношение между давлением и толщиной вытеснения [3]

$$\delta = \frac{(\kappa - 1) I \chi x^{1/2}}{2^{1/2} M p} \left(p_\infty \int_0^x p dx \right)^{1/2}, \quad \chi = M^2 \left(\frac{C_1}{R_x} \right)^{1/2} \quad (1.2)$$

$$C_1 = \frac{\mu_w T_\infty}{\mu_\infty T_w}, \quad R_x = \frac{\rho_\infty u_\infty x}{\mu_\infty}$$

Численные значения $l = l(\kappa, T_w/T_0, \sigma, \beta)$ определяются из решения автомодельных уравнений пограничного слоя. В методе локальной автомодельности параметр β , зависящий от местного градиента давления, переименован по x

$$\beta = -\frac{(\kappa - 1)n}{\kappa(n + 1)}, \quad n = \frac{d \ln p}{d \ln x}$$

С учетом (1.1) уравнение (1.2) преобразуется после несложных выкладок к дифференциальному уравнению третьего порядка относительно δ

$$4\delta^2 \left[\left(\frac{dy}{dx} + \frac{d\delta}{dx} \right) \left(\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{d^2 \delta}{dx^2} \right) + x \left(\frac{dy}{dx} + \frac{d\delta}{dx} \right) \left(\frac{d^3 y}{dx^3} + \frac{d^3 \delta}{dx^3} \right) - \right. \quad (1.3)$$

$$\left. - x \left(\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{d^2 \delta}{dx^2} \right)^2 \right] \frac{dB}{dn} - 2\delta \left(\frac{dy}{dx} + \frac{d\delta}{dx} \right) \left[\frac{d\delta}{dx} \left(\frac{dy}{dx} + \frac{d\delta}{dx} \right) + 2\delta \left(\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{d^2 \delta}{dx^2} \right) \right] B + B^3 = 0$$

$$B = \frac{(\kappa - 1) I \chi x^{1/2}}{[\kappa(\kappa + 1)]^{1/2} M^2}$$

Для местного коэффициента трения в приближении локальной автомодельности получим

$$C_f = \frac{2\tau_w}{\rho_\infty u_\infty^2} = D p \left(p_\infty \int_0^x p dx \right)^{-1/2}, \quad D = \frac{\Phi \chi (2x)^{1/2}}{M^3} \quad (1.4)$$

Здесь τ — напряжение трения; $\Phi = \Phi(\kappa, T_w/T_0, \sigma, \beta)$ — безразмерный градиент скорости на стенке, определенный из решения автомодельных уравнений. Интегрируя (1.1) и (1.4), получим выражения для коэффициента подъемной силы C_y и коэффициента сопротивления C_x

$$C_y = \int_0^l p_1 \frac{dx}{l}, \quad C_x = \int_0^l \left(p_1 \frac{dy}{dx} + C_f \right) \frac{dx}{l}$$

где l — хорда профиля.

Сформулируем вариационную задачу. Требуется найти форму кривой $y(x)$ на отрезке $(0, l)$ такую, при которой аэродинамическое качество C_y/C_x было бы максимальным. При этом должна быть выполнена дифференциальная связь (1.3) между y и δ .

В связи со сложным видом (1.3) и зависимостей $B(n)$ и $D(n)$ решение поставленной вариационной задачи сталкивается со значительными трудностями. К существенным упрощениям приводит использование варианта метода локальной автомодельности, изложенного в работе [3]. Согласно этому методу, выражения для производных и интегралов от давления, входящие в (1.2) и (1.4) и используемые при выводе (1.3), берутся приближенные. Так,

$$\frac{dp}{dx} = n \frac{p}{x}, \quad \int_0^x p dx = \frac{px}{n+1},$$

где n — показатель степени в локальной зависимости $p(x)$.

Перейдем к безразмерным переменным t, λ, γ при помощи преобразования

$$x = lt, \quad y = l \sqrt{a} \lambda, \quad \delta = l \sqrt{a} \gamma, \quad a = \left(\frac{C_1}{R_l} \right)^{1/2} M, \quad R_l = \frac{\rho_\infty u_\infty l}{\mu_\infty}$$

Тогда, используя упрощения работы [3], вместо (1.3) получим дифференциальную связь между λ и γ , в которую уже не входят производные третьего порядка (штрих означает дифференцирование по t)

$$E\gamma'(\lambda' + \gamma')\sqrt{t} = 1, \quad E = \frac{2[\kappa(\kappa + 1)(1 + n)]^{1/2}}{(\kappa - 1)(1 - n)I} \quad (1.5)$$

Выражения для C_y и C_x преобразуются к виду

$$C_y = (\kappa + 1)a \int_0^1 (\lambda' + \gamma')^2 dt, \quad C_x = (\kappa + 1)a^{3/2} \int_0^1 (\lambda' + \gamma')^2 (\lambda' + A\gamma') dt \quad (1.6)$$

$$A = \frac{2\kappa(1 + n)\varphi}{(\kappa - 1)(1 - n)I}$$

Из-за наличия в формулах (1.5) и (1.6) A и E , зависящих от n , а следовательно и от t , вариационная задача остается весьма сложной и может быть решена только на ЭВМ.

§ 2. Примем в формулах (1.5) и (1.6) A и E равными постоянным, соответствующим некоторому фиксированному значению β , что равносильно более грубому определению толщины вытеснения и коэффициента трения и, строго говоря, может быть оправдано только для тел, эффективная граница которых имеет степенную форму. Это позволит выразить γ' через λ' , и функционалы (1.6) будут зависеть только от одной неизвестной функции λ' .

Обозначим $\lambda' = v$. Имеем

$$C_y = \frac{(\kappa + 1)a}{4} \int_0^1 F(v, t) dt, \quad C_x = \frac{(\kappa + 1)a^{3/2}}{4} \int_0^1 \Phi(v, t) dt$$

$$F(v, t) = (v + \sqrt{v^2 + ct^{-1/2}})^2, \quad c = 4/E$$

$$\Phi(v, t) = (v + \sqrt{v^2 + ct^{-1/2}})^2 [(1 - b)v + b\sqrt{v^2 + ct^{-1/2}}], \quad b = A/2$$

Обозначим $k = C_y\sqrt{a}/C_x$. Тогда

$$\int_0^1 F(v, t) dt = k \int_0^1 \Phi(v, t) dt \quad (2.1)$$

Необходимое условие экстремума $\delta k = 0$ приводит к дифференциальному уравнению экстремали ${}^1 F_v - k\Phi_v = 0$, или

$$(2 - b)v + (1 + b)\sqrt{v^2 + ct^{-1/2}} - 2/k = 0$$

где k остается неизвестным до решения задачи до конца. Для v получим

$$v = \lambda' = 2(b + 1) \frac{(b - 2)/(b + 1) + \sqrt{1 - 3(2b - 1)ck^2/(4t^{1/2})}}{3(2b - 1)k} \quad (2.2)$$

Знак плюс перед корнем выбран на основании анализа численных значений b и c . Из формулы (2.2) следует, что в окрестности $t = 0$ экстремаль не существует. Минимальное значение $t = t_1$, при котором подкоренное выражение положительно, равно $t_1 = 9/16(2b - 1)^2 c^2 k^4$. При этом $\lambda(t)$ описывает вогнутую кривую с монотонно увеличивающимся наклоном.

В связи с тем, что экстремаль на интервале $(0, t_1)$ не существует, модифицируем вариационную задачу. Разобьем отрезок $(0, 1)$ на два: $(0, t_0)$ и $(t_0, 1)$, где $t_0 \geq t_1$. Вариацию функционалов будем производить только на интервале $(t_0, 1)$. Выбор зависимости $\lambda(t)$ на интервале $(0, t_0)$, а также выбор t_0 подчиним некоторому заранее обусловленному правилу. При этом сопряжение двух отрезков дуги $\lambda(t)$ в точке $t = t_0$ должно быть плавным. Таким образом, решение задачи зависит от произвола в выборе t_0 и $\lambda(t)$ при $t \leq t_0$ и становится однозначным лишь при задании соответствующих правил выбора.

Итак, $\lambda(t)$ состоит из некоторой плавной кривой и дуги экстремали, сопряженных в точке $t = t_0$.

Ограничимся простейшим случаем задания $\lambda(t)$ при $t \leq t_0$, а именно, зададим $\lambda(t)$ в виде отрезка прямой: $\lambda = v_0 t$, где $v_0 = v(t_0)$. Тогда, используя также (2.2) при

¹ Здесь и ниже δ означает вариацию, $F_v \equiv \partial F / \partial v$.

$t \geq t_0$, получим

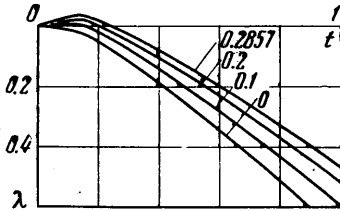
$$\int_0^1 F(v, t) dt = \frac{8}{9k^2} \left\{ t \left(1 - \frac{\sqrt{t_1}}{\sqrt{t}} \right) + t \left(1 - \frac{\sqrt{t_1}}{2\sqrt{t}} \right) \left(1 - \frac{\sqrt{t_1}}{\sqrt{t}} \right)^{1/2} - \right. \\ \left. - \frac{t_1}{4} \ln \frac{1 + (1 - \sqrt{t_1/t})^{1/2}}{1 - (1 - \sqrt{t_1/t})^{1/2}} \right\} \Big|_{t_0}^1 + \left\{ 2t \left(v_0^2 + \frac{c}{\sqrt{t}} \right) + \right. \\ \left. + \frac{2t}{v_0} \left(v_0^2 + \frac{c}{2\sqrt{t}} \right) \left(v_0^2 + \frac{c}{\sqrt{t}} \right)^{1/2} - \frac{c^2}{2v_0^2} \ln \frac{(v_0^2 + c/\sqrt{t})^{1/2} + v_0}{(v_0^2 + c/\sqrt{t})^{1/2} - v_0} \right\} \Big|_0^{t_0} \quad (2.3)$$

$$\int_0^1 \Phi(v, t) dt = \frac{8}{9k^3} \left\{ \frac{2}{3} t + \frac{2}{3} t \left(1 + \frac{\sqrt{t_1}}{2\sqrt{t}} \right) \left(1 - \frac{\sqrt{t_1}}{\sqrt{t}} \right)^{1/2} - \right. \\ \left. - \frac{t_1}{2} \ln \frac{1 + (1 - \sqrt{t_1/t})^{1/2}}{1 - (1 - \sqrt{t_1/t})^{1/2}} \right\} \Big|_{t_0}^1 + \left\{ 2v_0 t \left[v_0^2 + \frac{c(b+1)}{\sqrt{t}} \right] + \right. \\ \left. + 2t \left[v_0^2 + \frac{c(2b+1)}{2\sqrt{t}} \right] \left(v_0^2 + \frac{c}{\sqrt{t}} \right)^{1/2} + \frac{(2b-1)c^2}{2v_0} \ln \frac{(v_0^2 + c/\sqrt{t})^{1/2} + v_0}{(v_0^2 + c/\sqrt{t})^{1/2} - v_0} \right\} \Big|_0^{t_0}$$

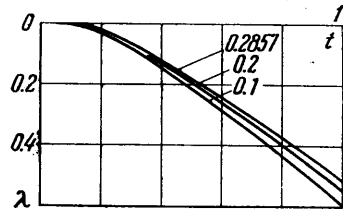
Для $\lambda(t)$ при $t \geq t_0$ имеем

$$\lambda(t) = \frac{2(b+1)}{3(2b-1)k} \left\{ \frac{(b-2)}{(b+1)} t + t \left(1 - \frac{\sqrt{t_1}}{2\sqrt{t}} \right) \left(1 - \frac{\sqrt{t_1}}{\sqrt{t}} \right)^{1/2} - \right. \\ \left. - \frac{t_1}{4} \ln \frac{1 + (1 - \sqrt{t_1/t})^{1/2}}{1 - (1 - \sqrt{t_1/t})^{1/2}} \right\} \Big|_{t_0}^1 + v_0 t_0 \quad (2.4)$$

Нетрудно проверить достаточное условие максимума для полученного решения



Фиг. 1



Фиг. 2

$\delta^2 k < 0$. Условие $\delta^2 k < 0$ при $\delta k = 0$ приводит к неравенству $F_{vv} - k\Phi_{vv} < 0$. При v , определенном по формуле (2.2), получим

$$F_{vv} - k\Phi_{vv} = -2 \left[v + \left(v^2 + \frac{c}{t^{1/2}} \right)^{1/2} \right]^2 \left(v^2 + \frac{c}{t^{1/2}} \right)^{-1/2} < 0$$

и достаточное условие выполнено для всех t в интервале $(t_0, 1)$.

Рассмотрим два варианта выбора t_0 :

$$(1) \quad t_0 = t_1 = \frac{9}{16}(2b-1)^2 c^2 k^4, \quad (2) \quad t_0 = t_2 = \frac{1}{16}(b+1)^4 c^2 k^4$$

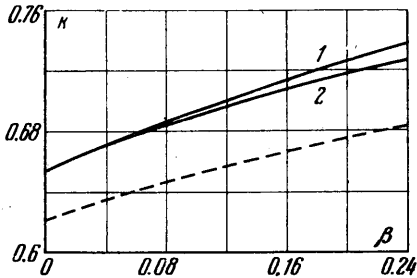
В первом случае экстремаль проводится до границы области существования, во втором — до точки, в которой $v = \lambda' = 0$, т. е. не допускаются так называемые «отрицательные» тела.

Численное значение k получим из решения трансцендентного алгебраического уравнения, к которому сводится (2.1) с учетом (2.3),

$$\ln \frac{(1+q)}{(1-q)} + \frac{2(5q-4)}{3(1-q)^2} + f = 0, \quad q = (1 - \sqrt{t_1})^{1/2} \quad (2.5)$$

$$f = f(b) = \left[2 \frac{(b+1)}{(2b-1)} - \frac{(2b-1)}{(b-2)} \ln \frac{(2b-1)}{3} \right] \frac{3}{(b-2)} \quad (t_0 = t_1)$$

По формулам (2.5), (2.4) можно рассчитывать как форму оптимальной кривой, так и максимальное значение $k = \sqrt{a} C_y / C_x$, если задать значения постоянных b , c (или A , E). При расчетах A и E принимались равными их значениям, полученным из решения авторемодельных уравнений пограничного слоя [3]. При этом считалось $\sigma = 0.7$, $m = 0.5$, $T_w / T_0 = 0.15$, $\kappa = 1.4$. Значения β выбирались равными 0, 0.1, 0.2, 0.2857, что соответствует полному диапазону значений β для плоской пластинки от слабого взаимодействия до сильного. На фиг. 1 представлены зависимости $\lambda(t)$ для различных β в случае $t_0 = t_1$. На фиг. 2 аналогичные зависимости приведены для $t_0 = t_2$ ($\lambda \geq 0$).



Фиг. 3

Для сравнения при тех же предположениях была рассчитана величина максимального аэродинамического качества для нижней поверхности плоской пластинки под углом атаки. На фиг. 3 приведены зависимости $k(\beta)$ для оптимальной пластинки (пунктирная кривая) и для оптимальной поверхности в случае $t_0 = t_1$ (кривая 1) и в случае $t_0 = t_2$ (кривая 2). Выигрыш в величине максимального аэродинамического качества в более реальном случае $t_0 = t_2$ составляет примерно 6% по сравнению с плоской пластинкой для всех значений β .

Автор благодарит М. Н. Когана, Г. И. Майкапара и В. В. Михайлова за полезные обсуждения.

Поступило 2 I 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Theory of optimum aerodynamic shapes. N. Y.— London, Acad. Press, 1965.
2. Hayes W. D., Probstein R. F. Hypersonic flow theory. N. Y.— London, Acad. Press, 1959.
3. Dewey C. F. Use of local similarity concepts in hypersonic viscous interaction problems. AIAA, Journal, 1963, vol. 1, No. 1.

АЭРОДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ТОНКОГО КЛИНА
В ГИПЕРЗВУКОВОМ НЕРАВНОВЕСНОМ ПОТОКЕ

О. Ю. ПОЛЯНСКИЙ

(Москва)

Получены выражения для коэффициента давления C_p , коэффициента сопротивления C_x , производных коэффициента подъемной силы и продольного момента по углу атаки C_y^α и m_z^α и положения фокуса аэродинамических сил для тонкого клина, обтекаемого гиперзвуковым потоком газа при неравновесности колебательных степеней свободы. Проведены расчеты, результаты которых представлены в форме, позволяющей легко рассчитать аэродинамические характеристики тонкого клина для конкретных условий движения. Показано, в частности, что такие характеристики, как производные C_y^α , m_z^α и фокус для тонкого клина в неравновесном потоке могут находиться вне вилки между их значениями для равновесного и замороженного потоков. Выход за эту «вилку» для C_y^α и m_z^α может быть порядка разности значений этих коэффициентов в равновесном и замороженном потоках, а смещение фокуса, обусловленное неравновесным возбуждением колебательных степеней свободы, может составлять примерно 1% длины клина.

1. Рассматривается обтекание тонкого клина гиперзвуковым потоком газа при неравновесном возбуждении колебательных степеней свободы. Предполагается, что угол при вершине клина 2θ и число Маха невозмущенного потока M_∞ таковы, что выполняются условия

$$\theta \ll 1, \quad \theta M_\infty \gg 1 \tag{1.1}$$

Принимается также, что параметр энергоемкости e_i , равный отношению колебательной энергии к энтальпии, много меньше единицы.