

$$\begin{aligned}
 c_{y_{kiv}}^{(2)} &= \frac{c_{y_{kiva}}^{(21)}}{\beta^3} + \frac{M_\infty^2}{\beta^3} \left[ c_{y_{kiva}}^{(22)} - \frac{b_{kia}}{b_a} m_{zkiva}^{(11)} \right] + \frac{c_{y_{kiva}}^{(23)}}{\beta} \\
 m_{zkiv}^{(2)} &= \frac{m_{zkiva}^{(21)}}{\beta^3} + \frac{M_\infty^2}{\beta^3} [m_{zkiva}^{(22)} - m_{zzkiva}^{(11)}] + \frac{m_{zkiva}^{(23)}}{\beta} \\
 m_{zzkiva}^{(11)} &= \frac{b_a^2}{b_{kia}^2} \int_{\xi_{a1}}^{\xi_{a2}} [P_{va}^{(1)}|_{\eta_a=-0} - P_{va}^{(1)}|_{\eta_a=+0}] \xi_a^2 d\xi_a \quad (5.10)
 \end{aligned}$$

где  $\xi_{a1}$ ,  $\xi_{a2}$  — соответственно координаты задней и передней кромок в рассматриваемом сечении.

Входящий в (5.10) интеграл рассчитываем, заменяя крыло дискретными вихрями. В результате получаем

$$m_{zzkiva}^{(11)} = \frac{1}{N} \frac{l_a}{b_a} \sum_{\mu=1}^n k_i \Gamma_{iva}^{(11)} \left( \frac{x_{ia}}{b_{kia}} \right)^2$$

Поступило 29 V 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Франкль Ф. И., Карпович Е. А. Газодинамика тонких тел. ОГИЗ — Гостехиздат, 1948
2. Белоцерковский С. М. Метод расчета коэффициентов вращательных производных и присоединенных масс тонкого крыла произвольной формы в плане. Сб. статей по аэрогидродинамике. Тр. ЦАГИ, 1964, вып. 940.

РАСЧЕТ ОБТЕКАНИЯ СВЕРХЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ПРОФИЛЕЙ, СОВЕРШАЮЩИХ УГЛОВЫЕ КОЛЕБАНИЯ

В. И. КИРЕЕВ, Ю. М. ЛИПНИЦКИЙ

(Москва)

Получено численное решение на ЭЦВМ задачи об обтекании сверхзвуковым потоком совершенного газа с  $\gamma = 1.4$  плоских тел — эллиптических цилиндров с отношением главных полуосей  $\delta = b/a = 1 - 2$  (фиг. 1) в диапазоне углов атаки  $\beta_0$  от 0 до  $10^\circ$  при числах  $M$  набегающего потока  $M_\infty$  от 3 до  $\infty$ .

Расчет стационарного течения проводился по методу Г. Ф. Теленина [1], примененному, в отличие от работы [2], для случая несимметричного обтекания. Оценивается точность решения при различных  $\beta_0$ . Исследуется влияние  $M_\infty$  на положение и форму отошедшей ударной волны при  $\beta_0$  от 0 до  $10^\circ$ .

Приводятся результаты исследования нестационарного обтекания эллиптических цилиндров с  $\delta$  от 1 до 2 в диапазоне изменения параметров: безразмерной частоты колебания  $\omega L / \theta_\infty$  от 0 до 1,0; чисел  $M_\infty$  — от 3 до  $\infty$ .

Расчет нестационарных плоских течений с отошедшей ударной волной проводился в предположении малости нестационарных возмущений

$$[\alpha_0 \ll 1, \quad \alpha_0 \omega L / V_\infty \ll 1]$$

Возможность рассмотрения задачи о сверхзвуковом обтекании колеблющихся затупленных профилей в линейной постановке подтверждается сравнением расчетов обтекания эллиптического цилиндра с  $\delta = 2$ , полученных при решении нелинейной стационарной задачи и по методу малых возмущений.

§ 1. Приводятся результаты расчетов стационарного обтекания с отошедшей ударной волной эллиптических цилиндров с  $\delta$  от 1 до 2 при углах атаки  $\beta_0$  от 0 до  $10^\circ$ .

Пусть  $u, v$  — проекции вектора скорости на радиальное и тангенциальное направления, отнесенные к скорости истечения в вакуум  $W_m$ ; давление  $p$  и плотность  $\rho$  отнесены к  $\rho_\infty W_m^2$  и к плотности в набегающем потоке  $\rho_\infty$   $r$  отнесено к характерному линейному размеру  $L$ .

Полярная система координат  $r, \theta$ , в которой решается задача, и необходимые обозначения изображены на фиг. 1. Постановка задачи, метод расчета и вывод аппроксимирующей системы дифференциальных уравнений изложены в работах

[1-3], где в качестве новых переменных используются  $\xi$ ,  $\theta$

$$\xi = \frac{r - r_1(\theta)}{r_2(\theta) - r_1(\theta)} \quad (1.1)$$

Здесь  $r = r_1(\theta)$ ;  $r = r_2(\theta)$  — уравнения поверхности тела и ударной волны. Для расчета эллиптических цилиндров под углом атаки, в отличие от симметричного обтекания, граничные условия на волне принимают вид

$$\begin{aligned} u &= V_y \sin \theta - V_x \cos \theta, & v &= V_y \cos \theta + V_x \sin \theta \\ V_x &= V_\tau \cos \theta + V_n \sin \theta, & V_y &= V_\tau \sin \theta - V_n \cos \theta \\ V_\tau &= V_\infty \cos(\sigma - \beta_0), & V_n &= \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} \frac{(1 - V_\infty^2)}{V_\infty \sin(\sigma - \beta_0)} \end{aligned} \quad (1.2)$$

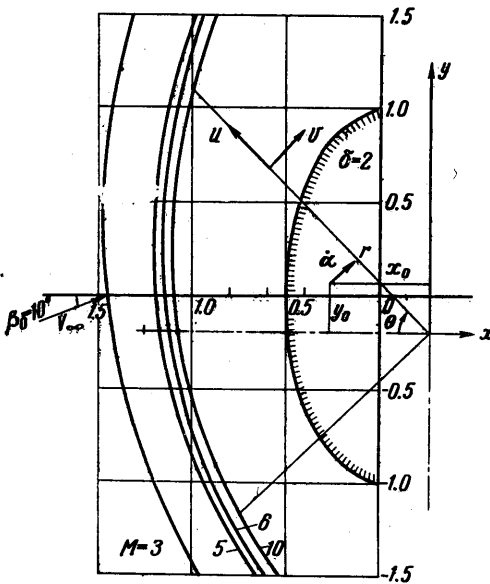
$$p = \frac{2}{\gamma + 1} \left[ V_\infty^2 \sin^2(\sigma - \beta_0) - \frac{(\gamma - 1)^2}{4\gamma} (1 - V_\infty^2) \right], \quad \psi = V_\infty r_2 \sin(\theta + \beta_0)$$

Здесь  $V_x$ ,  $V_y$  — проекции вектора скорости  $V$  на прямоугольные оси  $X$ ,  $Y$ ;  $\sigma$  — угол наклона ударной волны к оси  $X$ .

Проведенный анализ точности решения [2] показал, что погрешность большинства полученных расчетных данных не превышает 2,5%.

Приведем некоторые данные, характеризующие течение около эллиптических цилиндров в диапазоне углов атаки  $\beta_0$  от 0 до  $10^\circ$ .

Фиг. 1 показывает влияние числа  $M$  набегающего потока на положение и форму ударной волны при угле атаки  $\beta_0 = 10^\circ$ , а фиг. 2 иллюстрирует влияние угла атаки на распределение давления по поверхности в зависимости от ординаты  $Y$  при  $\beta_0 = 0, 5, 10^\circ$ .



Фиг. 1

Заметим, что с увеличением угла атаки характер зависимости параметров в поле течения становится более сложным: появляются области больших градиентов и более резких экстремумов внутри поля. Для примера на фиг. 3 приводится распределение давления  $p$  и окружной составляющей скорости  $v$  по  $\xi$  при обтекании эллиптического цилиндра с  $\delta = 2$  при  $\beta = 0, 5, 10^\circ$  вдоль луча  $\theta = 1.1827$ . Видно, что с увеличением угла атаки изменение параметров вдоль луча  $\theta = \text{const}$  становится более резким. На фиг. 3 сплошной линией обозначены распределения параметров на наветренной стороне, а пунктирной — на подветренной.

§ 2. Рассмотрим сверхзвуковое обтекание затупленного профиля, совершающего колебания с частотой  $\omega$  по закону

$$\alpha = \alpha_0 \cos \omega t \quad (2.1)$$

относительно среднего угла атаки  $\beta_0$ , так что суммарный угол атаки

$$\beta = \beta_0 + \alpha_0 \cos \omega t \quad (2.2)$$

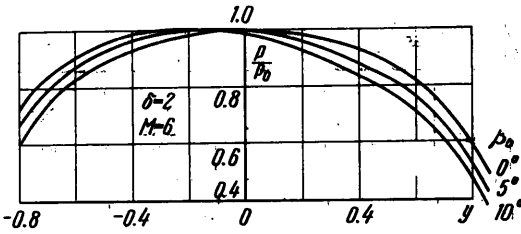
Центр колебаний с координатами  $X_0$ ,  $Y_0$  в жестко связанной с телом прямоугольной системе координат расположен произвольно.

В задачах аэродинамики обычно с большой точностью выполняются условия

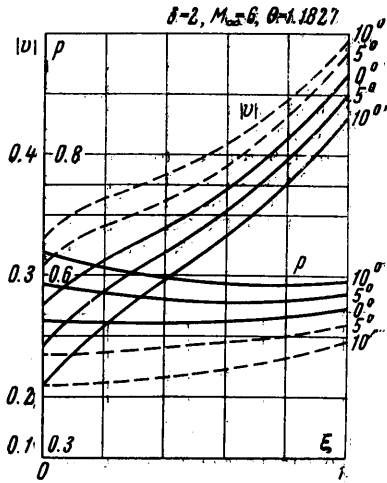
$$\alpha_0 \ll 1, \quad \alpha_0 \omega L / V_\infty \ll 1 \quad (2.3)$$

Эти условия обеспечивают малость возмущений угла атаки и малость скоростей перемещения точек поверхности тела в направлении нормали по сравнению со скоростью набегающего потока  $V_\infty$ .

Если центр колебаний находится внутри тела, то  $L$  — характерный размер тела. В случае, когда центр колебаний вынесен далеко за пределы тела (например, линейные колебания в направлении вектора скорости  $V_\infty$ ), то  $L$  — характерное расстояние от центра до тела. Условия (2.3) необходимы для того, чтобы нестационарные возмущения, вызываемые колебаниями тела, были малы.



Фиг. 2

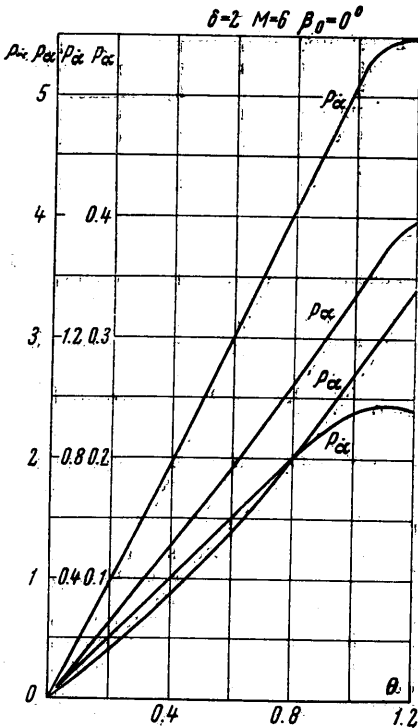


Фиг. 3

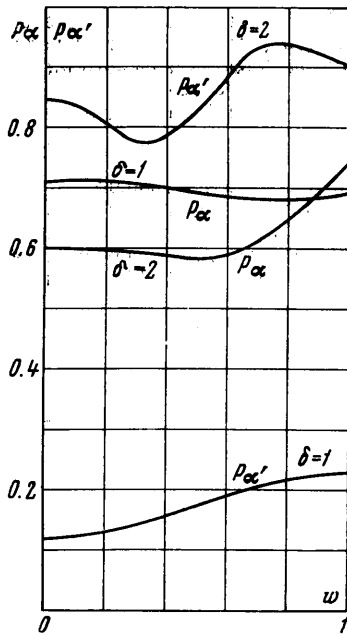
Ограничиваясь линейным приближением по амплитуде колебаний, представим параметры газа в виде

$$f = f_0 + \alpha f_\alpha + \alpha' f_{\alpha'}, \quad f = V, p, \rho \quad (2.4)$$

Параметры с индексом  $\theta$  описывают основное поле, возникающее при стационарном обтекании тела под углом атаки  $\beta_0$ ; параметры с индексами  $\alpha$  и  $\alpha'$  описывают для нестационарных возмущений, находящихся в фазе с углом атаки и угловой скоростью соответственно.



Фиг. 4



Фиг. 5

Системы дифференциальных уравнений и граничных условий для параметров с индексами  $\alpha$  и  $\alpha'$  в подвижной, жестко связанной с телом, системе координат приведены в работе [4].

В качестве такой системы координат выбирается полярная система координат  $r, \theta$ .

$\theta$ , полюс которой располагается исходя из удобства интегрирования нелинейной стационарной системы.

Отметим, что газодинамические функции стационарного течения определяют коэффициенты линейных дифференциальных уравнений для нестационарных возмущений, в силу чего повышаются требования к точности счета параметров с индексом 0 во всей рассматриваемой области от волны до тела. Поэтому, в отличие от работы [4], для получения стационарного решения использована система уравнений, не имеющая особенностей на теле [4]. Дифференциальные уравнения для возмущений были записаны в том же виде, что и в работе [4]. Разностная схема и расположение узлов аппроксимаций на поверхностях  $\xi = \text{const}$  при решении  $\alpha$ -задачи и  $\alpha'$ -задачи были взяты такими же, как в стационарной задаче.

$$M = 6 \quad \delta'_1 = 2$$

$\theta$	$p_0$	$\rho_0$	$p_\alpha$	$\rho_\alpha$	$p_{\alpha'}$	$\rho_{\alpha'}$	$\frac{p_\alpha}{p_0}$	$\gamma \frac{\rho_\alpha}{\rho_0}$	$\frac{p_{\alpha'}}{p_0}$	$\gamma \frac{\rho_{\alpha'}}{\rho_0}$
0	0.815	5.711	0	0	0	0	0	0	0	0
0.366	0.804	5.652	0.162	0.799	0.354	1.811	0.202	0.200	0.441	0.446
0.703	0.761	5.431	0.332	1.695	0.697	3.579	0.436	0.436	0.915	0.920
0.982	0.670	4.962	0.495	2.625	0.945	5.000	0.738	0.740	1.413	1.415
1.183	0.529	4.193	0.594	3.390	0.968	5.527	1.125	1.135	1.832	1.841
1.287	0.409	3.492	0.597	3.703	0.856	5.339	1.463	1.481	2.097	2.142

Приведем некоторые результаты расчетов нестационарного сверхзвукового течения около эллиптических цилиндров. Для кругового цилиндра, как и для сферы [4], имеют место равенства

$$f_\alpha = \partial f_0 / \partial \theta, \quad f_{\alpha'} = -x_0 f_\alpha / V_\infty, \quad f = p, \rho \quad (2.5)$$

Значения функций  $f_\alpha$  и  $f_{\alpha'}$ , полученные при интегрировании системы для нестационарных возмущений и определенные по формулам, хорошо согласуются между собой. Максимальная погрешность выполнения равенств (2.5) не превышает 3%.

На фиг. 4 показано распределение  $p_\alpha$ ,  $\rho_\alpha$ ,  $p_{\alpha'}$ ,  $\rho_{\alpha'}$  на поверхности тела  $\delta = 2$  при  $\beta_0 = 0^\circ$ . Центр колебаний и начало сферической системы координат лежат на пересечении осей эллиптического цилиндра.

Проведена проверка по интегралам, получающимся из уравнений адиабатичности для возмущений в фазе с  $\alpha$  и  $\alpha'$  при  $\omega \rightarrow 0$ ,  $\beta_0 = 0^\circ$

$$p_\alpha / p_0 = \gamma \rho_\alpha / \rho_0, \quad p_{\alpha'} / p_0 = \gamma \rho_{\alpha'} / \rho_0 \quad (2.6)$$

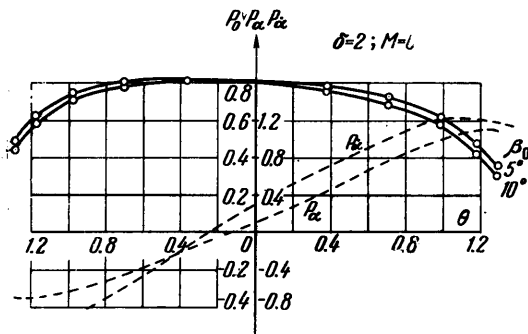
Точность удовлетворения приведенных равенств (2.6) для эллиптических цилиндров в диапазоне чисел  $M_\infty$  от 3 до  $\infty$  не хуже 2% (см. таблицу).

На фиг. 5 показана зависимость возмущений  $p_\alpha$  и  $p_{\alpha'}$  от безразмерной частоты колебаний  $\omega$  для точек, лежащих на поверхностях кругового и эллиптических цилиндров при  $\theta = 0.823$  ( $\delta = 1$ ) и  $\theta = 1.287$  ( $\delta = 2$ ). Колебания совершаются относительно нулевого угла атаки  $\beta_0 = 0$ ,  $M_\infty = 6$ .

Следует отметить, что связь между системами дифференциальных уравнений в фазе с  $\alpha$  и  $\alpha'$  осуществляется через выражения вида  $f_{\alpha'} \omega^2$  (см. [4]).

Таким образом, влияние частоты колебаний на нестационарные параметры с индексами  $\alpha$  и  $\alpha'$  увеличивается с возрастанием возмущений в фазе с  $\alpha'$ . Для кругового цилиндра при малых смещениях центра колебаний  $X_0$  величины  $f_\alpha$  малы, и влияние частоты колебаний должно быть слабым. Это подтверждается расчетами, проведенными как для кругового цилиндра ( $X_0 =$

$-0.2$ , фиг. 5), так и для сферы при том же смещении [4]. В соответствии с отмеченным выше, для эллиптического цилиндра  $\delta = 2$  ( $x_0 = 0$ ) влияние частоты на параметры  $p_\alpha$  и  $p_{\alpha'}$  более значительно и носит немонотонный характер (фиг. 5).



Фиг. 6

Возможность рассмотрения задачи о сверхзвуковом обтекании колеблющихся затупленных профилей в линейной постановке подтверждается сравнением расчетов обтекания эллиптического цилиндра с  $\delta = 2$ , полученных при решении нелинейной стационарной задачи и по методу малых возмущений.

На фиг. 6 пунктирными линиями изображена зависимость  $p_\alpha$  и  $p_{\alpha'}$  по поверхности цилиндра ( $\beta_0 = 5^\circ$ ). На той же фигуре сплошные линии — распределение давления, определенного в результате решения нелинейной стационарной задачи при  $\beta_0 = 5^\circ, 10^\circ$ ;  $M_\infty = 6$ ; точками нанесены соответствующие значения, полученные при помощи решения  $\alpha$ -задачи. Максимальное отличие не превышает 1,5%. Таким образом, метод малых возмущений для плоских затупленных тел дает хорошие результаты для амплитуды колебаний  $\alpha_0 \leq 10^\circ$ .

Авторы благодарят Г. Ф. Теленина за внимание и помощь, оказанные при выполнении работы.

Поступило 26 XII 1966

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гилинский С. М., Теленин Г. Ф., Гиняков Г. П. Метод расчета сверхзвукового обтекания затупленных тел с отошедшей ударной волной. Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1964, № 4.
2. Гилинский С. М., Лебедев М. Г. Расчет обтекания эллиптических цилиндров сверхзвуковым потоком совершенного газа. Изв. АН СССР, Механика, 1965, № 3.
3. Гилинский С. М., Лебедев М. Г. Исследование обтекания плоских и осесимметричных тел с отошедшей ударной волной потоком с малой сверхзвуковой скоростью. Изв. АН СССР, Механика, 1965, № 1.
4. Теленин Г. Ф., Липницкий Ю. М. Нестационарное сверхзвуковое обтекание затупленных тел с отошедшей ударной волной. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 4.

### ПРОФИЛЬ МАКСИМАЛЬНОГО КАЧЕСТВА В ВЯЗКОМ ГИПЕРЗВУКОВОМ ПОТОКЕ

В. С. НИКОЛАЕВ (Москва)

Рассмотрено обтекание нижней поверхности тонкого профиля под малым углом атаки с учетом взаимодействия пограничного слоя с невязким гиперзвуковым потоком. При решении задачи обтекания используются метод касательных клиньев с учетом толщины вытеснения пограничного слоя и приближенный метод расчета пограничного слоя, основанный на использовании автоматических решений. Ставится вариационная задача определения формы кривой, обеспечивающей максимальное аэродинамическое качество. Форма оптимальной кривой и выражение для максимального качества получены в аналитическом виде.

В сборнике [1] опубликована серия статей, посвященных вариационным задачам сверхзвуковой и гиперзвуковой газовой динамики. В ряде работ [1] вариационные задачи поставлены с учетом трения, причем выражения для коэффициента трения принимались весьма приближенными.

Ниже задача определения оптимальной формы профиля рассматривается с учетом взаимодействия пограничного слоя с невязким гиперзвуковым потоком при таких режимах обтекания, когда пограничный слой оказывает существенное вытесняющее влияние на невязкий поток.

§ 1. Будем рассматривать только обтекание нижней поверхности профиля в связи с относительной малостью вклада верхней поверхности в суммарные аэродинамические характеристики при гиперзвуковых скоростях. Газ считаем совершенным. Принимаем

$$\left(\frac{dy}{dx} + \frac{d\delta}{dx}\right)^2 \ll 1, \quad M^2 \left(\frac{dy}{dx} + \frac{d\delta}{dx}\right)^2 \gg 1, \quad \sigma = \text{const}, \quad \frac{T_w}{T_0} = \text{const}$$

$$\mu \propto T^m, \quad m = \text{const}$$

Здесь ось  $x$  направлена по набегающему потоку,  $y$  — ордината тела,  $\delta$  — толщина вытеснения пограничного слоя,  $M$  — число Маха набегающего потока,  $T$  — температура,  $T_0$  — температура торможения набегающего потока,  $\mu$  — коэффициент вязкости,  $\sigma$  — число Прандтля. В дальнейшем индексы  $\infty$  и  $w$  будут относиться к параметрам набегающего потока и на поверхности тела. Давление на внешней границе