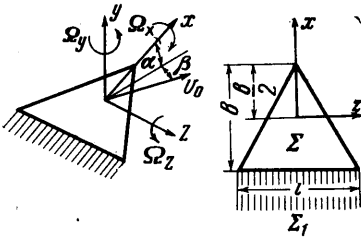


## МЕТОД РАСЧЕТА НЕСТАЦИОНАРНЫХ АЭРОДИНАМИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК НЕСУЩЕЙ ПОВЕРХНОСТИ, ДВИЖУЩЕЙСЯ С БОЛЬШОЙ ДОЗВУКОВОЙ СКОРОСТЬЮ

Г. А. КОЛЕСНИКОВ (Москва)

Излагается метод расчета нестационарных аэродинамических характеристик гармонически колеблющихся тонких крыльев, движущихся с большой дозвуковой скоростью. Среда предполагается идеальной. Аэродинамические коэффициенты выражаются через вращательные производные, которые определяются при числе Струхала, равном нулю. Расчет вращательных производных аэродинамических коэффициентов



в сжимаемой среде сводится к пересчету соответствующих характеристик преобразованного крыла, определенных в несжимаемой среде при измененных граничных условиях. Для расчета аэродинамических характеристик преобразованного крыла в несжимаемой среде применяется методика, основанная на замене несущей поверхности системой дискретных нестационарных вихрей. Задача решается в общем виде, и вместе с новыми соотношениями для вращательных производных с точками выводятся известные формулы для вращательных производных без точек.

**1. Постановка задачи.** Рассматривается тонкая слабо изогнутая деформируемая несущая поверхность, движущаяся поступательно с постоянной средней скоростью  $U_0$  и совершающая при этом малые гармонические вращательные и поступательные колебания. Среда предполагается идеально сжимаемой. Задача решается в линейной постановке.

Вводится прямоугольная правая система координат, связанная с несущей поверхностью (фигура). Ее начало помещается на середине корневой хорды, плоскость  $xz$  совмещается с плоскостью несущей поверхности, ось  $x$  направляется вперед, а ось  $z$  — вдоль правого полукрыла.

Кинематические параметры движения задаются следующими равенствами:

$$\begin{aligned} g_1 &= \alpha = A_1 \cos p_1 t, & g_2 &= \beta^* = A_2 \cos p_2 t \\ g_3 &= \Omega_x \frac{l}{U_0} = A_3 \cos p_3 t, & g_4 &= \Omega_y \frac{b}{U_0} = A_4 \cos p_4 t \\ g_5 &= \Omega_z \frac{b}{U_0} = A_5 \cos p_5 t, & g_6 &= \Delta(t) = A_6 \cos p_6 t \\ g_7 &= \frac{dg_v}{dt} \frac{b}{U_0} = -q_{vb} A_v \sin p_v t, & q_{vb} &= \frac{p_v b}{U_0} \end{aligned} \quad (1.1)$$

где  $\alpha$  — угол атаки;  $\beta^*$  — угол скольжения;  $\Omega_x \Omega_y \Omega_z$  — составляющие угловой скорости вращения;  $\Delta(t)$  — параметр деформации;  $b$  — корневая хорда;  $l$  — размах крыла;  $q_{vb}$  — число Струхала.

Геометрия крыла определяется удлинением  $\lambda$ , сужением  $\eta^*$ , углом стреловидности (по передней кромке)  $\chi$  и уравнением средней поверхности

$$\eta = f_0(\xi, \zeta) + f(\xi, \zeta) \Delta(t), \quad \xi = \frac{x}{b}, \quad \eta = \frac{y}{b}, \quad \zeta = \frac{z}{b} \quad (1.2)$$

где  $f_0, f$  — заданные функции.

**2. Уравнения, определяющие потенциал скоростей в сжимаемой среде.** Обозначим потенциал абсолютных скоростей, возмущаемых крылом, через  $\Phi(x, y, z, t)$ . В линейной постановке он удовлетворяет следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} \beta^2 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + 2 \frac{M_\infty}{a_\infty} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial t} - \frac{1}{a_\infty^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2} &= 0 \quad (\Sigma_2) \\ \frac{1}{U_0} \frac{\partial \Phi}{\partial y} &= -b \frac{\partial f_0}{\partial x} - g_1 - g_3 \frac{z}{l} + g_5 \frac{x}{b} - b \frac{\partial f}{\partial x} g_6 + f g_7 \quad (\Sigma) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial t} - U_0 \frac{\partial \Phi}{\partial x} &= 0 \quad (\Sigma_1), \quad \Phi(x, y=0, z, t) = 0 \quad (\Sigma_2) \\ \lim \Phi &= \lim \frac{\partial \Phi}{\partial x} = \lim \frac{\partial \Phi}{\partial y} = \lim \frac{\partial \Phi}{\partial z} = 0 \quad (R \rightarrow \infty) \\ \beta &= \sqrt{1 - M_\infty^2} \end{aligned} \quad (2.1)$$

где в скобках указаны области, в которых должны выполняться соответствующие равенства;  $\Sigma$  — проекция крыла на плоскость  $xz$ ;  $\Sigma_1$  — проекция вихревой пелены и задней кромки крыла на ту же плоскость;  $\Sigma_2$  — область вне  $\Sigma + \Sigma_1$ ;  $R$  — расстояние между рассматриваемой точкой  $xuz$  и ближайшей точкой, принадлежащей  $\Sigma + \Sigma_1$ .

Выразим потенциал через вращательные производные, представляя его в виде полинома

$$\varphi(x, y, z, t) = U_0 b \left\{ \varphi_0^{(1)}(\xi, \eta, \zeta) + \sum_{\nu=1}^6 [\varphi_\nu^{(1)}(\xi, \eta, \zeta) g_\nu + \varphi_\nu^{(2)}(\xi, \eta, \zeta) g_\nu'] \right\} \quad (2.2)$$

Следуя [1], введем новые функции  $\psi_\nu^{(i)}(\xi, \eta, \zeta)$ , полагая

$$\begin{aligned} \varphi_0^{(1)} &= \psi_0^{(1)}, & \varphi_\nu^{(1)} &= \psi_\nu^{(1)} \cos(\kappa_\nu \xi) + \frac{q_{vb}}{\beta^2} \psi_\nu^{(2)} \sin(\kappa_\nu \xi) \\ \varphi_\nu^{(2)} &= \frac{1}{\beta^2} \psi_\nu^{(2)} \cos(\kappa_\nu \xi) - \frac{1}{q_{vb}} \psi_\nu^{(1)} \sin(\kappa_\nu \xi) \\ \kappa_\nu &= q_{vb} \frac{M_\infty^2}{\beta^2} \end{aligned} \quad (2.3)$$

Подставляя (2.3) в (2.2), получаем

$$\varphi = U_0 b \left\{ \psi_0^{(1)} + \sum_{\nu=1}^6 A_\nu \left[ \psi_\nu^{(1)} \cos(p_\nu t - \kappa_\nu \xi) - \frac{q_{vb}}{\beta^2} \psi_\nu^{(2)} \sin(p_\nu t - \kappa_\nu \xi) \right] \right\} \quad (2.4)$$

Используя это представление, из (2.1) находим системы уравнений, определяющих функции  $\psi_\nu^{(i)}$

$$\begin{aligned} \beta^2 \frac{\partial^2 \psi_0^{(1)}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi_0^{(1)}}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \psi_0^{(1)}}{\partial \zeta^2} &= 0 \quad (\Sigma_2) \\ \beta^2 \frac{\partial^2 \psi_\nu^{(i)}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi_\nu^{(i)}}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \psi_\nu^{(i)}}{\partial \zeta^2} + q_{vb}^2 \frac{M_\infty^2}{\beta^2} \psi_\nu^{(i)} &= 0 \quad (\Sigma_2) \\ \frac{\partial \psi_0^{(1)}}{\partial \eta} = B_0, \quad \frac{\partial \psi_\nu^{(1)}}{\partial \eta} \cos(\kappa_\nu \xi) + \frac{q_{vb}}{\beta^2} \frac{\partial \psi_\nu^{(2)}}{\partial \eta} \sin(\kappa_\nu \xi) &= B_\nu \quad (\Sigma) \\ \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial \psi_\nu^{(2)}}{\partial \eta} \cos(\kappa_\nu \xi) - \frac{1}{q_{vb}} \frac{\partial \psi_\nu^{(1)}}{\partial \eta} \sin(\kappa_\nu \xi) &= E_\nu \quad (\Sigma) \\ \frac{\partial \psi_0^{(1)}}{\partial \xi} = 0, \quad \frac{\partial \psi_\nu^{(1)}}{\partial \xi} + \frac{q_{vb}^2}{\beta^2} \psi_\nu^{(2)} = 0, \quad \frac{\partial \psi_\nu^{(2)}}{\partial \xi} - \psi_\nu^{(1)} = 0 & \quad (\Sigma_1) \\ \psi_\nu^{(i)}(\xi, \eta = 0, \zeta) &= 0 \quad (\Sigma_2) \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \psi_\nu^{(i)} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\partial \psi_\nu^{(i)}}{\partial \xi} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\partial \psi_\nu^{(i)}}{\partial \eta} = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\partial \psi_\nu^{(i)}}{\partial \zeta} &= 0 \quad (r \rightarrow \infty) \\ B_0 = -\frac{\partial f_0}{\partial \xi}, \quad B_1 = -1, \quad B_2 = B_4 = 0 \\ B_3 = -\zeta \frac{b}{l}, \quad B_5 = \xi, \quad B_6 = -\frac{\partial f}{\partial \xi} \\ E_\nu = 0, \quad (\nu = 1, 2, \dots, 5), \quad E_6 = f, \quad r = \frac{R}{b} \end{aligned}$$

В результате проведенных преобразований задача отыскания потенциала сведена к определению функций  $\psi_\nu^{(i)}$  из уравнений (2.5).

В общем случае функции  $\psi_\nu^{(i)}$  и вращательные производные  $\varphi_\nu^{(i)}$  зависят от числа Струхала. Но на практике часто приходится иметь дело с движением при малых числах Струхала. Учитывая, что в этом случае вращательные производные слабо зависят от числа Струхала, в расчетах используют их значения, найденные при числе Струхала, стремящемся к нулю. Поэтому в дальнейшем будем искать функции  $\psi_\nu^{(i)}$

и вращательные производные аэродинамических характеристик при  $q_{vb} \rightarrow 0$ . Полагая в (2.5)  $q_{vb} \rightarrow 0$ , находим, что в этом случае функции  $\psi_v^{(i)}$  определяются следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} \beta^2 \frac{\partial^2 \psi_v^{(1)}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \psi_v^{(1)}}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \psi_v^{(1)}}{\partial \zeta^2} &= 0 & (\Sigma_2) \\ \frac{\partial \psi_v^{(1)}}{\partial \eta} &= B_v, & \frac{\partial \psi_v^{(2)}}{\partial \eta} &= \beta^2 E_v + M_\infty^2 \xi B_v & (\Sigma) \\ \frac{\partial \psi_v^{(1)}}{\partial \xi} &= 0, & \frac{\partial \psi_v^{(2)}}{\partial \xi} - \psi_v^{(1)} &= 0 & (\Sigma_1) \\ \psi_v^{(i)}(\xi, \eta = 0, \zeta) &= 0 & (\Sigma_2) \\ \lim \psi_v^{(i)} &= \lim \frac{\partial \psi_v^{(i)}}{\partial \xi} = \lim \frac{\partial \psi_v^{(i)}}{\partial \eta} = \lim \frac{\partial \psi_v^{(i)}}{\partial \zeta} = 0 & (r \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

3. Связь между вращательными производными потенциала в сжимаемой и несжимаемой средах. Из (2.6) следует, что при помощи преобразования Прандтля расчет функций  $\psi_v^{(i)}$  легко сводится к определению вращательных производных потенциала скоростей преобразованного крыла, движущегося в несжимаемой среде.

Ниже выводятся формулы, устанавливающие связь между этими величинами. Перейдем к новым переменным  $x_a y_a z_a, \xi_a \eta_a \zeta_a$ , полагая

$$\begin{aligned} x_a &= \frac{x}{\beta}, & y_a &= y, & z_a &= z, & \xi_a &= \xi, & \eta_a &= \eta\beta, & \zeta_a &= \zeta\beta \\ \xi_a &= \frac{x_a}{b_a}, & \eta_a &= \frac{y_a}{b_a}, & \zeta_a &= \frac{z_a}{b_a}, & b_a &= \frac{b}{\beta} \end{aligned} \quad (3.1)$$

Используя соотношения (3.1), из (2.6) находим, что в новой системе координат функции  $\psi_v^{(i)}$  определяются следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi_v^{(1)}}{\partial \xi_a^2} + \frac{\partial^2 \psi_v^{(1)}}{\partial \eta_a^2} + \frac{\partial^2 \psi_v^{(1)}}{\partial \zeta_a^2} &= 0 & (\Sigma_{2a}) \\ \frac{\partial \psi_v^{(1)}}{\partial \eta_a} &= \frac{1}{\beta} B_{va}, & \frac{\partial \psi_v^{(2)}}{\partial \eta_a} &= \beta E_{va} + \frac{M_\infty^2}{\beta} \xi_a B_{va} & (\Sigma_a) \\ \frac{\partial \psi_v^{(1)}}{\partial \xi_a} &= 0, & \frac{\partial \psi_v^{(2)}}{\partial \xi_a} - \psi_v^{(1)} &= 0 & (\Sigma_{1a}) \\ \psi_v^{(i)}(\xi_a, \eta_a = 0, \zeta_a) &= 0 & (\Sigma_{2a}) \\ \lim \psi_v^{(i)} &= \lim \frac{\partial \psi_v^{(i)}}{\partial \xi_a} = \lim \frac{\partial \psi_v^{(i)}}{\partial \eta_a} = \lim \frac{\partial \psi_v^{(i)}}{\partial \zeta_a} = 0 & (r_a \rightarrow \infty) \\ B_{0a} &= -\frac{\partial f_0}{\partial \xi_a}, & B_{1a} &= -1, & B_{2a} &= B_{4a} = 0 \\ B_{3a} &= -\zeta_a \frac{b_a}{l_a}, & B_{5a} &= \xi_a, & B_{6a} &= -\frac{\partial f}{\partial \xi_a} \\ E_{vn} &= 0 \quad (v = 1, \dots, 5), & E_{6a} &= f, & l_a &= l \end{aligned} \quad (3.2)$$

где  $\Sigma_a, \Sigma_{1a}, \Sigma_{2a}$  — области, в которые переходят  $\Sigma, \Sigma_1, \Sigma_2$  в результате преобразований (3.1)  $r_a$  — функция  $r$ , выраженная через переменные  $\xi_a, \eta_a, \zeta_a$ .

Рассмотрим теперь новое крыло, движущееся в пространстве  $x_a y_a z_a (\xi_a \eta_a \zeta_a)$ . Будем считать, что его форма в плане совпадает с формой, которую приобретает рассматриваемое крыло в результате преобразования (3.1), т. е. положим, что его удлинение  $\lambda_a$ , угол стреловидности  $\chi_a$  и сужение  $\eta_a^*$  равны

$$\lambda_a = \lambda\beta, \quad \text{tg } \chi_a = \frac{\text{tg } \chi}{\beta}, \quad \eta_a^* = \eta^* \quad (3.3)$$

Площадь этого крыла обозначим через  $S_a$ , размах — через  $l_a$ , корневую хорду — через  $b_a$ .

Уравнение средней поверхности нового крыла определим следующим образом:

$$\eta_a = f_0 \left( \xi_a, \frac{\zeta_a}{\beta} \right) + f \left( \xi_a, \frac{\zeta}{\beta} \right) \Delta_a(t) \quad (3.4)$$

Введенную таким образом несущую поверхность будем называть преобразованной. Будем считать, что преобразованное крыло движется в несжимаемой среде со средней поступательной скоростью  $U_{0a}$  и совершает малые колебания, определяемые следующими кинетическими параметрами:

$$\begin{aligned} g_{1a} &= \alpha_a = A_{1a} \cos p_{1a}t, & g_{2a} &= \beta_a^* = A_{2a} \cos p_{2a}t \\ g_{3a} &= \Omega_{xa} \frac{l_a}{U_{0a}} = A_{3a} \cos p_{3a}t \\ g_{4a} &= \Omega_{ya} \frac{b_a}{U_{0a}} = A_{4a} \cos p_{4a}t \\ g_{5a} &= \Omega_{za} \frac{b_a}{U_{0a}} = A_{5a} \cos p_{5a}t \\ g_{6a} &= \Delta_a(t) = A_{6a} \cos p_{6a}t, & g_{va} &= \frac{dg_{va}}{dt} \frac{b_a}{U_{0a}} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Примем еще, что преобразованное крыло движется в возмущенной среде, и на поверхности крыла вертикальная скорость равна

$$V_{ya} = -U_{0a} M_{\infty}^2 \sum_{v=1}^6 (\xi_a B_{va} - E_{va}) g_{va} \quad (3.6)$$

Обозначим через  $\theta$  потенциал скоростей, возмущаемых преобразованным крылом при движении в несжимаемой среде. Выразив его через вращательные производные, получаем

$$\theta = b_a U_{0a} \left[ \theta_0^{(1)} + \sum_{v=1}^6 (\theta_v^{(1)} g_{va} + \theta_v^{(2)} g_{va}') \right] \quad (3.7)$$

Вращательные производные  $\theta_v^{(i)}$  определяются следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \theta_v^{(1)}}{\partial \xi_a^2} + \frac{\partial^2 \theta_v^{(1)}}{\partial \eta_a^2} + \frac{\partial^2 \theta_v^{(1)}}{\partial \zeta_a^2} &= 0 \quad (\Sigma_{2a}) \\ \frac{\partial \theta_v^{(1)}}{\partial \eta_a} &= B_{va} \quad (\Sigma_a), & \frac{\partial \theta_v^{(2)}}{\partial \eta_a} &= \beta^2 E_{va} + \xi_a M_{\infty}^2 B_{va} \quad (\Sigma_a) \\ \frac{\partial \theta_v^{(1)}}{\partial \xi_a} &= 0 \quad (\Sigma_{1a}), & \frac{\partial \theta_v^{(2)}}{\partial \xi_a} - \theta_v^{(1)} &= 0 \quad (\Sigma_{1a}) \\ \theta_v^{(i)}(\xi_a, \eta_a = 0, \zeta_a) &= 0 \quad (\Sigma_{2a}) \\ \lim_{r_a \rightarrow \infty} \theta_v^{(i)} &= \lim_{r_a \rightarrow \infty} \frac{\partial \theta_v^{(i)}}{\partial \xi_a} = \lim_{r_a \rightarrow \infty} \frac{\partial \theta_v^{(i)}}{\partial \eta_a} = \lim_{r_a \rightarrow \infty} \frac{\partial \theta_v^{(i)}}{\partial \zeta_a} = 0 \quad (r_a \rightarrow \infty) \end{aligned} \quad (3.8)$$

Сравнивая (3.8) с (3.2), находим

$$\psi_v^{(i)} \left( \xi_a, \frac{\eta_a}{\beta}, \frac{\zeta_a}{\beta} \right) = \frac{1}{\beta} \theta_v^{(i)}(\xi_a, \eta_a, \zeta_a) \quad (3.9)$$

**4. Связь между коэффициентами давления в сжимаемой и несжимаемой средах.** В линейной теории коэффициент давления при неустановившемся движении определяется равенством

$$p' = \frac{p - p_{\infty}}{q} = \frac{2}{U_0} \left( \frac{\partial \Phi}{\partial x} - \frac{1}{U_0} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \right), \quad q = \frac{\rho_{\infty} U_0^3}{2} \quad (4.1)$$

Подставляя в формулу (4.1) потенциалы скоростей рассчитываемого (2.2) и преобразованного (3.7) крыльев, находим, что коэффициенты давлений в сжимаемой и

несжимаемой среде соответственно равны

$$p' = p_0^{(1)} + \sum_{v=1}^6 (p_v^{(1)} g_v + p_v^{(2)} g_{va})$$

$$p_a' = p_{0a}^{(1)} + \sum_{v=1}^6 (p_{va}^{(1)} g_{va} + p_{va}^{(2)} g_{va}) \quad (4.2)$$

Входящие в (4.2) вращательные производные при числе Струкала, стремящемся к нулю, имеют следующее значение:

$$p_v^{(1)} = 2 \frac{\partial \psi_v^{(1)}}{\partial \xi}, \quad p_v^{(2)} = \frac{2}{\beta^2} \left( \frac{\partial \psi_v^{(2)}}{\partial \xi} - \psi \right) - \xi \frac{M_\infty^2}{\beta^2} p_v^{(1)} \quad (4.3)$$

$$p_{va}^{(1)} = 2 \frac{\partial \theta_v^{(1)}}{\partial \xi_a}, \quad p_{va}^{(2)} = 2 \left( \frac{\partial \theta_v^{(2)}}{\partial \xi_a} - \theta_v^{(1)} \right)$$

Из последних соотношений при помощи (3.9) находим искомую связь между вращательными производными коэффициентов давлений в сжимаемой и несжимаемой среде

$$p_v^{(1)} = \frac{p_{va}^{(1)}}{\beta}, \quad p_v^{(2)} = \frac{p_{va}^{(2)}}{\beta^2} - \xi_a \frac{M_\infty^2}{\beta^2} p_{va}^{(1)} \quad (4.4)$$

**5. Расчет аэродинамических коэффициентов несущей поверхности в сжимаемой среде.** Выразим аэродинамические коэффициенты преобразованного крыла, движущегося в несжимаемой среде, следующим образом через вращательные производные:

$$c_{ya} = \frac{Y_a}{q_a S_a} = c_{y0a}^{(11)} + \sum_{v=1}^6 \{ c_{yva}^{(11)} g_{va} + [c_{yva}^{(21)} + M_\infty^2 c_{yva}^{(22)} + \beta^2 c_{yva}^{(23)}] g_{va} \}$$

$$m_{xa} = \frac{M_{xa}}{q_a S_a l_a} = \sum_{v=1}^6 \{ m_{xva}^{(11)} g_{va} + [m_{xva}^{(21)} + M_\infty^2 m_{xva}^{(22)} + \beta^2 m_{xva}^{(23)}] g_{va} \}$$

$$m_{za} = \frac{M_{za}}{q_a S_a b_a} = m_{z0a}^{(11)} + \sum_{v=1}^6 \{ m_{zva}^{(11)} g_{va} + [m_{zva}^{(21)} + M_\infty^2 m_{zva}^{(22)} + \beta^2 m_{zva}^{(23)}] g_{va} \}$$

$$q_a = \frac{\rho_\infty U_{0a}^2}{2} \quad (5.1)$$

Найдем вращательные производные, входящие в последние формулы. Используя методику, изложенную в работе [2], заменим крыло системой косых нестационарных вихрей. Напряженность вихря представим в виде суммы

$$\Gamma_{+ia} = U_{0a} l_{ia} \left[ \Gamma_{i0a}^{(11)} + \sum_{v=1}^6 \{ \Gamma_{iva}^{(11)} g_{va} + [\Gamma_{iva}^{(21)} + M_\infty^2 \Gamma_{iva}^{(22)} + \beta^2 \Gamma_{iva}^{(23)}] g_{va} \} \right] \quad (5.2)$$

$$l_{ia} = \frac{l_a}{2N}$$

Здесь  $N$  — число полос, на которое разбивается полукрыло.

Удовлетворяя граничным условиям в  $2m$  расчетных точках  $j$  преобразованного крыла (второму и третьему соотношениям системы 3.8), получаем следующие уравнения для расчета вращательных производных циркуляции:

$$\sum_{i=1}^m A_{ijva}^{(1)} \Gamma_{iva}^{(11)} = 2\pi B_{jva}, \quad \sum_{i=1}^m A_{ijva}^{(1)} \Gamma_{iva}^{(21)} = -\frac{1}{4N} \frac{l_a}{b_a} \sum_{i=1}^m A_{ijva}^{(2)} \Gamma_{iva}^{(11)}$$

$$\sum_{i=1}^m A_{ijva}^{(1)} \Gamma_{iva}^{(22)} = 2\pi \xi_{ja} B_{jva}, \quad \sum_{i=1}^m A_{ijva}^{(1)} \Gamma_{iva}^{(23)} = 2\pi E_{jva}$$

$$A_{ijva}^{(1)} = \omega_{yija}^{(1)} + \tau_\nu \delta \omega_{yija}^{(1)}, \quad A_{ijva}^{(2)} = \frac{\partial \omega_{yija}^{(2)}}{\partial q} + \tau_\nu \delta \frac{\partial \omega_{yija}^{(2)}}{\partial q} \quad (5.3)$$

$(j = 1, \dots, m)$

где

$$\omega_{yija}^{(1)}, \delta \omega_{yija}^{(1)}, \frac{\partial \omega_{yija}^{(2)}}{\partial q}, \delta \frac{\partial \omega_{yija}^{(2)}}{\partial q}$$

рассчитываются по формулам, приведенным в статье [2];  $B_{jva}, E_{jva}, \xi_{ja}$  — значения  $B_{va}, E_{va}, \xi_a$  в расчетных точках  $j$  крыла,  $\tau_\nu = +1$  — при  $\nu = 0, 1, 2, 4, 5$  и  $\nu = 6$  в случае симметричной деформации крыла,  $\tau_\nu = -1$  — при  $\nu = 3$  и  $\nu = 6$  в случае антисимметричной деформации крыла.

Согласно [2], вращательные производные аэродинамических коэффициентов преобразованного крыла определяются следующим образом:

$$c_{yva}^{(is)} = (1 + \tau_\nu) \frac{\lambda_a}{2N^2} \sum_{i=1}^m \Gamma_{iva}^{(is)}$$

$$m_{xva}^{(is)} = -(1 - \tau_\nu) \frac{\lambda_a}{4N^2} \sum_{i=1}^m \Gamma_{iva}^{(is)} \frac{2x_{ia}}{|l_a|}, \quad m_{zva}^{(is)} = (1 + \tau_\nu) \frac{\lambda_a}{2N^2} \sum_{i=1}^m \Gamma_{iva}^{(is)} \frac{x_{ia}}{b_a} \quad (5.4)$$

где  $x_{ia}, z_{ia}$  — координаты середины  $i$ -го присоединения вихря.

Покажем теперь, как от аэродинамических коэффициентов преобразованного крыла перейти к коэффициентам крыла в сжимаемой среде.

Представим аэродинамические коэффициенты крыла в сжимаемой среде в виде следующих сумм:

$$c_y = \frac{Y}{qS} = c_{y0}^{(1)} + \sum_{\nu=1}^6 (c_{y\nu}^{(1)} g_\nu + c_{y\nu}^{(2)} g_\nu')$$

$$m_x = \frac{M_x}{qSl} = \sum_{\nu=1}^6 (m_{x\nu}^{(1)} g_\nu + m_{x\nu}^{(2)} g_\nu'), \quad m_z = \frac{M_z}{qSb} = m_{z0}^{(1)} + \sum_{\nu=1}^6 (m_{z\nu}^{(1)} g_\nu + m_{z\nu}^{(2)} g_\nu') \quad (5.5)$$

где  $c_{y\nu}^{(i)}, m_{x\nu}^{(i)}, m_{z\nu}^{(i)}$  — вращательные производные.

Выражая аэродинамические коэффициенты в несжимаемой (5.1) и сжимаемой (5.5) средах через коэффициенты давления и учитывая соотношения (4.4), из сравнения находим, что вращательные производные аэродинамических коэффициентов связаны следующими зависимостями:

$$c_{y\nu}^{(1)} = \frac{c_{yva}^{(11)}}{\beta}, \quad m_{x\nu}^{(1)} = \frac{m_{xva}^{(11)}}{\beta}, \quad m_{z\nu}^{(1)} = \frac{m_{zva}^{(11)}}{\beta}$$

$$c_{y\nu}^{(2)} = \frac{c_{yva}^{(21)}}{\beta^3} + \frac{M_\infty^2}{\beta^3} [c_{yva}^{(22)} - m_{zva}^{(11)}] + \frac{c_{yva}^{(23)}}{\beta}$$

$$m_{x\nu}^{(2)} = \frac{m_{xva}^{(21)}}{\beta^3} + \frac{M_\infty^2}{\beta^3} [m_{xva}^{(22)} - I_{xzva}^{(11)}] + \frac{m_{xva}^{(23)}}{\beta}$$

$$m_{z\nu}^{(2)} = \frac{m_{zva}^{(21)}}{\beta^3} + \frac{M_\infty^2}{\beta^3} [m_{zva}^{(22)} - I_{zzva}^{(11)}] + \frac{m_{zva}^{(23)}}{\beta}$$

$$I_{xzva}^{(11)} = -\frac{b_a^3}{l_a S_a} \int_{\Sigma_a} [P_{va}^{(1)} |_{\eta_a=-0} - P_{va}^{(1)} |_{\eta_a=+0}] \xi_a \zeta_a d\xi_a d\zeta_a$$

$$I_{zzva}^{(11)} = \frac{b_a^2}{S_a} \int_{\Sigma_a} [P_{va}^{(1)} |_{\eta_a=-0} - P_{va}^{(1)} |_{\eta_a=+0}] \xi_a^2 d\xi_a d\zeta_a \quad (5.6)$$

При принятой модели крыла, когда оно заменяется системой дискретных вихрей, интегралы  $I_{xzva}^{(11)}$ ,  $I_{zzva}^{(11)}$  имеют следующее значение:

$$\begin{aligned}
 I_{xzva}^{(11)} &= m_{xzva}^{(11)} + m_{x\chi va}^{(11)} \\
 m_{xzva}^{(11)} &= -\frac{1}{4}(1-\tau_v) \frac{\lambda_a}{N^2} \sum_{i=1}^m \Gamma_{iva}^{(11)} \frac{2z_{ia}}{l_a} \frac{x_{ia}}{b_a} \\
 m_{x\chi va} &= \frac{1}{96}(1-\tau_v) \frac{\lambda_a}{N^4} \frac{l_a}{b_a} \sum_{i=1}^m \Gamma_{iva}^{(11)} \operatorname{tg} \chi_{ia} \\
 I_{zzva}^{(11)} &= m_{zzva}^{(11)} + m_{z\chi va}^{(11)} \\
 m_{zzva}^{(11)} &= \frac{1}{2}(1+\tau_v) \frac{\lambda_a}{N^2} \sum_{i=1}^m \Gamma_{iva}^{(11)} \left(\frac{x_{ia}}{b_a}\right)^2 \\
 m_{z\chi va}^{(11)} &= \frac{1}{96}(1+\tau_v) \frac{\lambda_a}{N^4} \left(\frac{l_a}{b_a}\right)^2 \sum_{i=1}^m \Gamma_{iva}^{(11)} \operatorname{tg}^2 \chi_{ia}
 \end{aligned} \tag{5.7}$$

где  $\chi_{ia}$  — угол между  $i$ -м присоединенным вихрем и осью  $z_a$ .

Аналогично получаем формулы для расчета аэродинамических коэффициентов сечений. Сначала аэродинамические коэффициенты рассматриваемого и преобразованного крыльев представляем через вращательные производные, т. е. полагаем

$$\begin{aligned}
 c_y' &= \frac{\Delta Y}{qb_{ki}} = c_{yki0}'^{(1)} + \sum_{v=1}^6 (c_{ykv}^{(1)'} g_v + c_{ykv}^{(2)'} g_v) \\
 m_z' &= \frac{\Delta M_z}{qb_{ki}^2} = m_{zki0}'^{(1)} + \sum_{v=1}^6 (m_{zkv}^{(1)'} g_v + m_{zkv}^{(2)'} g_v) \\
 c_{ya}' &= \frac{\Delta Y_a}{q_a b_{kia}} = c_{yki0a}'^{(11)} + \sum_{v=1}^6 \{c_{ykv}^{(1)'} g_{va} + \\
 &+ [c_{ykv}^{(2)'} + M_\infty^2 c_{ykv}^{(22)'} + \beta^2 c_{ykv}^{(23)'}] g_{va}\} \\
 m_{za}' &= \frac{\Delta M_{za}}{q_a b_{kia}^2} = m_{zki0a}'^{(11)} + \sum_{v=1}^6 \{m_{zkv}^{(1)'} g_{va} + \\
 &+ [m_{zkv}^{(2)'} + M_\infty^2 m_{zkv}^{(22)'} + \beta^2 m_{zkv}^{(23)'}] g_{va}\}
 \end{aligned} \tag{5.8}$$

Входящие в последние формулы вращательные производные преобразованного крыла вычисляются следующим образом:

$$c_{ykv}^{(is)'} = \frac{1}{N} \frac{l_a}{b_{kia}} \sum_{\mu=1}^n k_i \Gamma_{iva}^{(is)}, \quad m_{zkv}^{(is)'} = \frac{1}{N} \frac{l_a}{b_{kia}} \sum_{\mu=1}^n k_i \Gamma_{iva}^{(is)} \frac{x_{ia}}{b_{kia}} \tag{5.9}$$

где  $\sum_{\mu=1}^n k_i$  — знак суммирования по всем вихрям, расположенным на полосе  $k$ ,

$b_{kia}$  — хорда,  $n$  — число вихрей в сечении.

Представляя аэродинамические коэффициенты через коэффициент давления и учитывая связь (4.4) между вращательными производными коэффициентов давления, получаем следующие формулы для расчета вращательных производных аэродинамических коэффициентов в сжимаемой среде:

$$c_{ykv}^{(1)'} = \frac{c_{ykv}^{(11)'}}{\beta}, \quad m_{zkv}^{(1)'} = \frac{m_{zkv}^{(11)'}}{\beta}$$

$$\begin{aligned}
 c_{y_{kiv}}^{(2)} &= \frac{c_{y_{kiva}}^{(21)}}{\beta^3} + \frac{M_\infty^2}{\beta^3} \left[ c_{y_{kiva}}^{(22)} - \frac{b_{kia}}{b_a} m_{zkiva}^{(11)} \right] + \frac{c_{y_{kiva}}^{(23)}}{\beta} \\
 m_{zkiv}^{(2)} &= \frac{m_{zkiva}^{(21)}}{\beta^3} + \frac{M_\infty^2}{\beta^3} [m_{zkiva}^{(22)} - m_{zzkiva}^{(11)}] + \frac{m_{zkiva}^{(23)}}{\beta} \\
 m_{zzkiva}^{(11)} &= \frac{b_a^2}{b_{kia}^2} \int_{\xi_{a1}}^{\xi_{a2}} [P_{va}^{(1)}|_{\eta_a=-0} - P_{va}^{(1)}|_{\eta_a=+0}] \xi_a^2 d\xi_a \quad (5.10)
 \end{aligned}$$

где  $\xi_{a1}$ ,  $\xi_{a2}$  — соответственно координаты задней и передней кромок в рассматриваемом сечении.

Входящий в (5.10) интеграл рассчитываем, заменяя крыло дискретными вихрями. В результате получаем

$$m_{zzkiva}^{(11)} = \frac{1}{N} \frac{l_a}{b_a} \sum_{\mu=1}^n k_i \Gamma_{iva}^{(11)} \left( \frac{x_{ia}}{b_{kia}} \right)^2$$

Поступило 29 V 1967

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Франкль Ф. И., Карпович Е. А. Газодинамика тонких тел. ОГИЗ — Гостехиздат, 1948
2. Белоцерковский С. М. Метод расчета коэффициентов вращательных производных и присоединенных масс тонкого крыла произвольной формы в плане. Сб. статей по аэрогидродинамике. Тр. ЦАГИ, 1964, вып. 940.

### РАСЧЕТ ОБТЕКАНИЯ СВЕРХЗВУКОВЫМ ПОТОКОМ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ПРОФИЛЕЙ, СОВЕРШАЮЩИХ УГЛОВЫЕ КОЛЕБАНИЯ

В. И. КИРЕЕВ, Ю. М. ЛИПНИЦКИЙ

(Москва)

Получено численное решение на ЭЦВМ задачи об обтекании сверхзвуковым потоком совершенного газа с  $\gamma = 1.4$  плоских тел — эллиптических цилиндров с отношением главных полуосей  $\delta = b/a = 1 - 2$  (фиг. 1) в диапазоне углов атаки  $\beta_0$  от 0 до  $10^\circ$  при числах  $M$  набегающего потока  $M_\infty$  от 3 до  $\infty$ .

Расчет стационарного течения проводился по методу Г. Ф. Теленина [1], примененному, в отличие от работы [2], для случая несимметричного обтекания. Оценивается точность решения при различных  $\beta_0$ . Исследуется влияние  $M_\infty$  на положение и форму отошедшей ударной волны при  $\beta_0$  от 0 до  $10^\circ$ .

Приводятся результаты исследования нестационарного обтекания эллиптических цилиндров с  $\delta$  от 1 до 2 в диапазоне изменения параметров: безразмерной частоты колебания  $\omega L / \theta_\infty$  от 0 до 1,0; чисел  $M_\infty$  — от 3 до  $\infty$ .

Расчет нестационарных плоских течений с отошедшей ударной волной проводился в предположении малости нестационарных возмущений

$$[\alpha_0 \ll 1, \quad \alpha_0 \omega L / V_\infty \ll 1]$$

Возможность рассмотрения задачи о сверхзвуковом обтекании колеблющихся затупленных профилей в линейной постановке подтверждается сравнением расчетов обтекания эллиптического цилиндра с  $\delta = 2$ , полученных при решении нелинейной стационарной задачи и по методу малых возмущений.

§ 1. Приводятся результаты расчетов стационарного обтекания с отошедшей ударной волной эллиптических цилиндров с  $\delta$  от 1 до 2 при углах атаки  $\beta_0$  от 0 до  $10^\circ$ .

Пусть  $u$ ,  $v$  — проекции вектора скорости на радиальное и тангенциальное направления, отнесенные к скорости истечения в вакуум  $W_m$ ; давление  $p$  и плотность  $\rho$  отнесены к  $\rho_\infty W_m^2$  и к плотности в набегающем потоке  $\rho_\infty$ ;  $r$  отнесено к характерному линейному размеру  $L$ .

Полярная система координат  $r$ ,  $\theta$ , в которой решается задача, и необходимые обозначения изображены на фиг. 1. Постановка задачи, метод расчета и вывод аппроксимирующей системы дифференциальных уравнений изложены в работах