

РАСЧЕТ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ В РАДИАЛЬНО-ОСЕВОЙ ТУРБИНЕ

А. Ф. МАКАРОВ

(Ленинград)

Известен ряд работ по расчету пространственного течения жидкости в турбомашинах [1-9, 11].

На идеи, высказанные в работах [9] и [12], о возможности представления линии тока при помощи двух поверхностей тока, основаны результаты работы [13]. В ней краевая задача для системы уравнений движения (второго порядка) сводится к вариационной задаче. Автор применил метод работы [9] для расчета потока в межлопаточном канале радиально-осевого рабочего колеса гидротурбины.

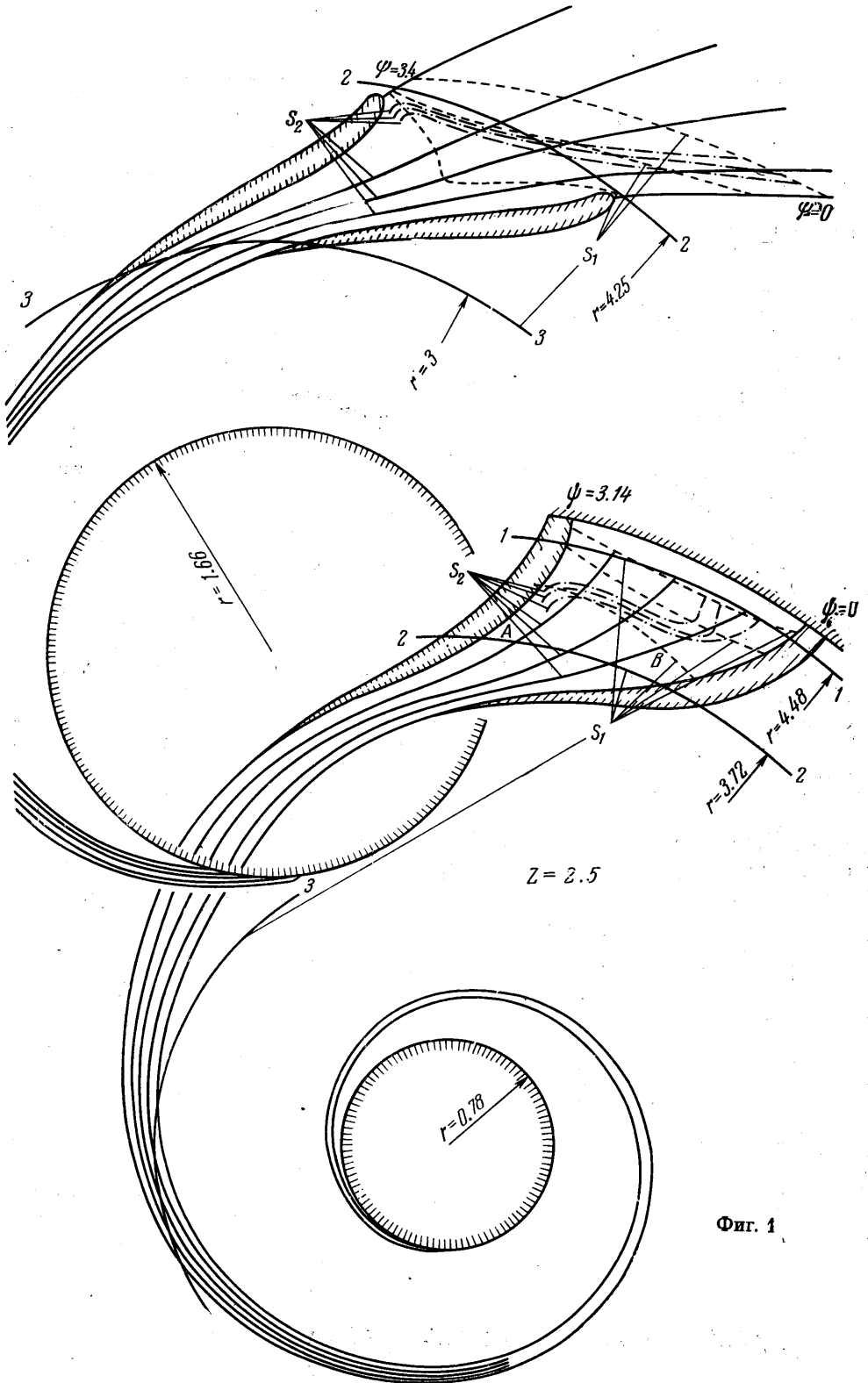
Вместо цилиндрической системы координат вводится криволинейная неортогональная система координат. За первое семейство координатных поверхностей взяты поверхности вращения, близкие по форме к кожуху турбины, а за второе семейство — цилиндрические поверхности тока, которые имеют направляющими в плоскости, перпендикулярной к оси турбины, логарифмические спирали. Введение криволинейной неортогональной системы координат усложнило вид уравнений, описывающих течение жидкости и увеличило объем вычислительной работы, но дало возможность рассчитать поток жидкости в турбомашине с радиально-осевым типом течения.

Представлены результаты расчета вихревого течения несжимаемой вязкой жидкости в турбине с градиентом полного давления на входе в канал.

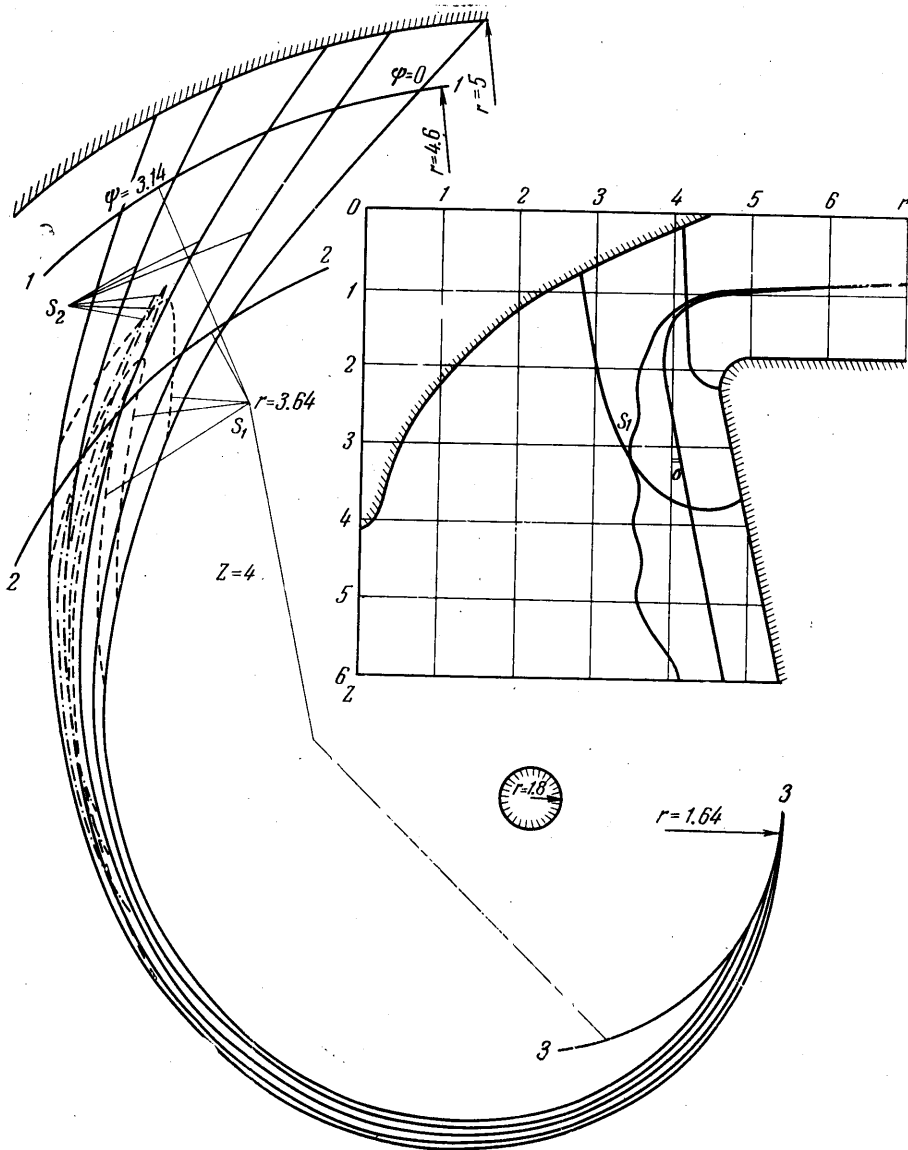
§ 1. Постановка задачи и основные уравнения. Допустим, что через турбину течет вязкая несжимаемая жидкость. Поток вихревой. На форму лопаток рабочего колеса, втулки и кожуха никаких ограничений не накладываем. Применяя метод работы [9], будем искать линии тока как пересечение поверхностей тока S_1 и S_2 относительного течения (фиг. 1, 2). К семейству S_1 поверхностей тока отнесем поверхности, совпадающие с поверхностями вращения на входе в осесимметричную полость турбины. Вниз по течению эти поверхности тока могут принимать произвольную форму, однако крайние линии тока поверхности S_1 остаются лежать на противоположных стенках межлопаточного канала (на соседних лопатках). Крайние поверхности тока семейства S_1 совпадают со втулкой и кожухом. К другому семейству S_2 отнесем поверхности тока с заданным профилем $z = z(\varphi)$ в сечении $r = \text{const}$ на входе в осесимметричную полость турбины. Крайние линии тока любой поверхности S_2 лежат на втулке и кожухе турбины. При этом поверхности лопаток относятся к крайним поверхностям тока семейства S_2 .

Уравнения стационарного течения вязкой жидкости в цилиндрической системе координат, жестко связанной с вращающимся рабочим колесом, имеют вид

$$\begin{aligned} & -\frac{W_u^2}{r} - W_u \frac{\partial W_u}{\partial r} + \frac{W_u}{r} \frac{\partial W_r}{\partial \varphi} + W_z \left(\frac{\partial W_r}{\partial z} - \frac{\partial W_z}{\partial r} \right) - 2\omega W_u = -\frac{\partial J}{\partial r} \\ & \frac{W_r W_u}{r} + W_r \frac{\partial W_u}{\partial r} - \frac{W_r}{r} \frac{\partial W_r}{\partial \varphi} - \\ & \quad - W_z \left(\frac{1}{r} \frac{\partial W_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial W_u}{\partial z} \right) + 2\omega W_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial J}{\partial \varphi} \\ & \left(J = \frac{p}{\rho} + \frac{W^2}{2} - \frac{U^2}{2} \right) \\ & -W_r \left(\frac{\partial W_r}{\partial z} - \frac{\partial W_z}{\partial r} \right) + W_u \left(\frac{1}{r} \frac{\partial W_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial W_u}{\partial z} \right) = -\frac{\partial J}{\partial z} \end{aligned} \tag{1.1}$$



Фиг. 1



Фиг. 2

Здесь W — относительная скорость; $U = \omega r$ — переносная скорость; $\rho = \text{const}$ — плотность, p — давление.

Умножив уравнения (1.1) на L/V^2 , где L и V обозначают характерные длину и скорость, приведем их к безразмерному виду. Уравнение неразрывности записывается в виде

$$\frac{1}{r} \frac{\partial W_u}{\partial \varphi} + \frac{\partial W_z}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial r W_r}{\partial r} = 0 \quad (1.2)$$

Система уравнений (1.1), (1.2) замкнута, так как содержит четыре неизвестных: W_u , W_r , W_z , p .

Следуя работе [9], выведем уравнения, описывающие течение жидкости на поверхностях семейства S_1 . Пусть общее уравнение поверхности тока имеет вид

$$S(r, \varphi, z) = 0 \quad (1.3)$$

Условия перпендикулярности нормали к этой поверхности тока запишутся так:

$$n_r W_r + n_u W_u + n_z W_z = 0 \text{ или } n_r dr + n_u r d\varphi + n_z dz = 0 \quad (1.4)$$

где n_r, n_u, n_z — направляющие косинусы нормали.

Используя (1.4), исключим координату r из уравнений, описывающих течение жидкости на поверхностях S_1 . При этом отметим звездочкой частные производные по φ и z от любой переменной $q = q[\varphi, z, r(\varphi, z)]$, изменяющейся на выбранной поверхности. Тогда полная производная по времени от величины q выразится через вновь введенные частные производные по φ и z

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial^* q}{\partial \varphi} &= \frac{1}{r} \frac{\partial q}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial q}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial \varphi} = \frac{1}{r} \frac{\partial q}{\partial \varphi} - \frac{n_u}{n_r} \frac{\partial q}{\partial r} \\ \frac{\partial^* q}{\partial z} &= \frac{\partial q}{\partial z} + \frac{\partial q}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{\partial q}{\partial z} - \frac{n_z}{n_r} \frac{\partial q}{\partial r}, \quad \frac{dq}{dt} = \frac{W_u}{r} \frac{\partial^* q}{\partial \varphi} + W_z \frac{\partial^* q}{\partial z} \end{aligned} \quad (1.5)$$

Отношения n_u/n_r и n_z/n_r характеризуют форму каждой поверхности тока.

При помощи (1.5) преобразуем уравнение (1.1) к виду

$$\begin{aligned} -\frac{W_u^2}{r} + \frac{W_u}{r} \frac{\partial^* W_r}{\partial \varphi} + W_z \frac{\partial^* W_r}{\partial z} - 2\omega W_u &= -\frac{\partial p}{\partial r} + \omega^2 r \equiv F_{1r} \\ \frac{W_r W_u}{r} - \frac{W_r}{r} \frac{\partial^* W_r}{\partial \varphi} + W_z \frac{\partial^* W_u}{\partial z} - \frac{W_z}{r} \frac{\partial^* W_z}{\partial \varphi} + 2\omega W_r &= \\ &= -\frac{1}{r} \frac{\partial^* J}{\partial \varphi} - \frac{n_u}{n_r} \left(\frac{\partial p}{\partial r} - \omega^2 r \right) \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial^* J}{\partial \varphi} + F_{1u} \\ &- W_r \frac{\partial^* W_r}{\partial z} + W_u \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^* W_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial^* W_u}{\partial z} \right) = \\ &= -\frac{\partial^* J}{\partial z} - \frac{n_z}{n_r} \left(\frac{\partial p}{\partial r} - \omega^2 r \right) \equiv -\frac{\partial^* J}{\partial z} + F_{1z}, \quad F_1 = -\frac{n}{n_r} \left(\frac{\partial p}{\partial r} - \omega^2 r \right) \end{aligned} \quad (1.6)$$

где вектор F_1 направлен по нормали к поверхности S_1

$$F_{1r} W_r + F_{1u} W_u + F_{1z} W_z = 0 \quad (1.7)$$

Воспользовавшись формулами (1.5), представим уравнение неразрывности

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^* W_u}{\partial \varphi} + \frac{\partial^* W_z}{\partial z} = -\frac{n_u}{n_r} \frac{\partial W_u}{\partial r} - \frac{n_z}{n_r} \frac{\partial W_z}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial (r W_r)}{\partial r} \quad (1.8)$$

В уравнениях (1.6), (1.8) перейдем от переменной z к новой переменной l . Для каждой поверхности тока S_1 будем брать свою координатную поверхность вращения с образующей l . При этом считаем, что каждая поверхность S_1 совпадает со своей координатной поверхностью на входе в осесимметричный канал (фиг. 2). Обозначим угол, под которым касательная к l пересекается с осью z , через σ . Производные по z в (1.6) и (1.8)

заменяем на производные по l , заметив, что

$$\frac{\partial q}{\partial z} = \frac{\partial q}{\partial l} \frac{\partial l}{\partial z} = \frac{1}{\cos \sigma} \frac{\partial q}{\partial l} \quad (1.9)$$

Умножая обе части второго равенства в формулах (1.5) на $\cos \sigma$, получим

$$\frac{\partial^* q}{\partial l} = \frac{\partial q}{\partial l} + \frac{\partial q}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial l} \quad (1.10)$$

Напомним, что r — расстояние от оси турбины z до точки на поверхности тока, в которой берется производная по координате l .

Конформно отобразим координатную поверхность вращения на плоскость φ, ζ при помощи преобразования

$$d\zeta = R^{-1} dl = \text{const} \quad (1.11)$$

где R — расстояние от оси турбины z до координатной поверхности вращения.

Учитывая (1.9) — (1.11), в уравнениях движения перейдем к новой переменной ζ . При этом уравнения (1.6) примут вид

$$-\frac{W_u^2}{r} + \frac{W_u}{r} \frac{\partial^* W_r}{\partial \varphi} + \frac{W_z}{R \cos \sigma} \frac{\partial^* W_r}{\partial \zeta} - 2\omega W_u = F_{1r} \quad (1.12)$$

$$\frac{W_r W_u}{r} - \frac{W_r}{r} \frac{\partial^* W_r}{\partial \varphi} + \frac{W_z}{R \cos \sigma} \frac{\partial^* W_u}{\partial \zeta} - \frac{W_z}{r} \frac{\partial^* W_z}{\partial \varphi} + 2\omega W_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial^* J}{\partial \varphi} + F_{1u}$$

$$-\frac{W_r}{R \cos \sigma} \frac{\partial^* W_r}{\partial \zeta} + W_u \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^* W_z}{\partial \varphi} - \frac{1}{R \cos \sigma} \frac{\partial^* W_u}{\partial \zeta} \right) = \frac{1}{R \cos \sigma} \frac{\partial^* J}{\partial \zeta} + F_{1z}$$

Учитывая связь $W_z = W_l \cos \sigma$, а также (1.9) — (1.11), из (1.8) получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial^* W_u}{\partial \varphi} + \frac{1}{R} \frac{\partial^* W_l}{\partial \zeta} &= -\frac{n_u}{n_r} \frac{\partial W_u}{\partial r} - \frac{W_l}{R} \frac{\partial^* \ln \cos \sigma}{\partial \zeta} + \\ &+ \frac{1}{R \cos \sigma} \frac{\partial r}{\partial \zeta} \frac{\partial W_z}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial(rW_r)}{\partial r} \end{aligned} \quad (1.13)$$

Для того чтобы уравнение неразрывности (1.13) приняло известный вид для плоского течения жидкости

$$\frac{\partial^*(R\delta W_u)}{\partial \varphi} + \frac{\partial^*(r\delta W_l)}{\partial \zeta} = 0 \quad (1.14)$$

правую часть (1.13) приравняем величине

$$\frac{W_u}{r} \frac{\partial^* \ln \delta}{\partial \varphi} - \frac{W_l}{R} \frac{\partial^* \ln \delta}{\partial \zeta} - \frac{W_l}{rR} \frac{\partial^* r}{\partial \zeta}$$

Из способа введения величины δ с учетом (1.5) следует равенство

$$\begin{aligned} \frac{d \ln \delta}{dt} &= \frac{n_u}{n_r} \frac{\partial W_u}{\partial r} + \frac{W_l}{R} \frac{\partial^* \ln \cos \sigma}{\partial \zeta} - \frac{1}{R \cos \sigma} \frac{\partial r}{\partial \zeta} \frac{\partial W_z}{\partial r} + \\ &+ \frac{1}{r} \frac{\partial(rW_r)}{\partial r} - \frac{W_l}{R} \frac{\partial^* \ln r}{\partial \zeta} \equiv P(\varphi, \zeta) \end{aligned} \quad (1.15)$$

где правая часть уравнения обозначена для краткости функцией $P(\varphi, \zeta)$.

Вычисляя $\ln \delta$ вдоль линии тока, можем написать

$$\ln \delta = \int_0^P \frac{P}{W} dx \quad (1.16)$$

Из уравнения (1.14) вытекает, что существует функция тока ψ

$$\partial^* \psi / \partial \varphi = \delta r W_l, \quad \partial^* \psi / \partial \zeta = -\delta R W_u \quad (1.17)$$

Множитель δ имеет смысл толщины слоя тока.

Если в уравнении движения в проекции на ось φ от W_z перейти к W_l и подставить в него производные от функции тока (1.17), то получим

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^{*2} \psi}{\partial \zeta^2} + \frac{R^2 \cos^2 \sigma}{r^2} \frac{\partial^{*2} \psi}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial^* \ln(\delta R)}{\partial \zeta} \frac{\partial^* \psi}{\partial \zeta} - \frac{R^2 \cos^2 \sigma}{r^2} \frac{\partial^* \ln \delta r}{\partial \varphi} \frac{\partial^* \psi}{\partial \varphi} \\ & - \frac{\delta^2 R^2 r}{\partial^* \psi / \partial \varphi} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^* J}{\partial \varphi} - F_{1u} + \frac{W_r W_u}{r} - \frac{W_r}{r} \frac{\partial^* W_r}{\partial \varphi} + 2\omega W_r \right] = 0 \end{aligned} \quad (1.18)$$

Это уравнение описывает течение жидкости на поверхностях тока S_l .

Течение жидкости будем рассчитывать в канале, стенки которого образуют поверхности кожуха и втулки, две соседние лопатки и две поверхности тока, совпадающие с ними.

Вместо r введем координатную кривую, близкую по форме к профилям стенок канала в сечениях $z = \text{const}$. За такую координатную кривую возьмем обратную логарифмическую спираль s в плоскости $z = \text{const}$, которая делает бесконечное число витков в начале координат. Длина дуги s между двумя точками, лежащими на ней, равна

$$s = r_0 \sqrt{1 + k^2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} e^{k\varphi} d\varphi = \frac{r_0 \sqrt{1 + k^2}}{k} (e^{k\varphi_2} - e^{k\varphi_1}),$$

$$(\varphi_2 > \varphi_1, k = -\text{ctg } \varepsilon < 0)$$

Здесь ε — угол между радиусом — вектором, выходящим из полюса спирали до точки, лежащей на спирали, и касательной к спирали в той же точке. Увеличение угла φ соответствует повороту радиуса — вектора против часовой стрелки. Длина дуги s от оси турбины в сечении $z = \text{const}$ (от полюса логарифмической спирали) до точки, лежащей на спирали, запишется в виде ($\varphi_2 \rightarrow +\infty$)

$$s = r_0 e^{k\varphi_1} \sec \varepsilon = r \sec \varepsilon \quad (1.19)$$

После замены производных по r на производные по s уравнения (1.18) (1.15) примут вид

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^{*2} \psi}{\partial \zeta^2} + \frac{R^2 \cos^2 \sigma}{s^2 \cos^2 \varepsilon} \frac{\partial^{*2} \psi}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial^* \ln(\delta R)}{\partial \zeta} \frac{\partial^* \psi}{\partial \zeta} - \frac{R^2 \cos^2 \sigma}{s^2 \cos^2 \varepsilon} \frac{\partial^* \ln(\delta s \cos \varepsilon)}{\partial \varphi} \frac{\partial^* \psi}{\partial \varphi} \\ & - \frac{s \delta^2 R^2 \cos \varepsilon}{\partial^* \psi / \partial \varphi} \left[\frac{1}{s \cos \varepsilon} \frac{\partial^* J}{\partial \varphi} - F_{1u} + \frac{W_r W_u}{s \cos \varepsilon} - \frac{W_r}{s \cos \varepsilon} \frac{\partial^* W_r}{\partial \varphi} + 2\omega W_r \right] = 0 \\ & \frac{d \ln \delta}{dt} = \frac{n_u}{n_r} \frac{1}{\cos \varepsilon} \frac{\partial W_u}{\partial s} + \frac{W_l}{R} \frac{\partial^* \ln \cos \sigma}{\partial \zeta} - \frac{1}{R \cos \sigma} \frac{\partial r}{\partial \zeta} \frac{1}{\cos \varepsilon} \frac{\partial W_z}{\partial s} + \\ & + \frac{1}{\cos^2 \varepsilon} \frac{1}{s} \frac{\partial(r W_r)}{\partial s} - \frac{W_l}{R} \frac{\partial^* \ln r}{\partial \zeta} = P \end{aligned} \quad (1.21)$$

(1.20)

В задаче об определении течения на фиксированных поверхностях тока S_1 с заданной толщиной слоя тока δ число неизвестных $W_u, W_r, W_z, F_u, F_r, F_z$ равно числу уравнений (1.12), (1.14), (1.4) и (1.7). Поскольку распределение J задается на входе в канал и J сохраняет свое значение на каждой линии тока, то предварительно можно задать J на фиксированной поверхности тока.

Решение уравнения (1.20) будем искать в сетке φ_i, ζ_v , где $\varphi_i = ih, \zeta_v = \nu h, h$ — шаг сетки, $i = 0, 1, 2, \dots, \nu = 0, 1, 2, \dots$. Заменяя производные от величин, взятых на поверхности тока, конечными разностями, получаем разностный аналог уравнения (1.20)

$$\begin{aligned} \psi_{i,v} = & \frac{a_{i,v}[4 - (\ln \delta s \cos \varepsilon)_{i+1,v} + (\ln \delta s \cos \varepsilon)_{i-1,v}]}{8(1 + a_{i,v})} \psi_{i+1,v} + \\ & + \frac{a_{i,v}[4 + (\ln \delta s \cos \varepsilon)_{i+1,v} - (\ln \delta s \cos \varepsilon)_{i-1,v}]}{8(1 + a_{i,v})} \psi_{i-1,v} + \\ & + \frac{4 - (\ln \delta R)_{i,v+1} + (\ln \delta R)_{i,v-1}}{8(1 + a_{i,v})} \psi_{i,v+1} + \frac{4 + (\ln \delta R)_{i,v+1} - (\ln \delta R)_{i,v-1}}{8(1 + a_{i,v})} \psi_{i,v-1} \\ & - \frac{h^3 b_{i,v}}{(\psi_{i+1,v} - \psi_{i-1,v})(1 + a_{i,v})} \end{aligned} \quad (1.22)$$

$$\begin{aligned} a_{i,v} = & \left(\frac{R^2 \cos^2 \sigma}{s^2 \cos^2 \varepsilon} \right)_{i,v}, \quad b_{i,v} = (s \delta R^2 \cos \varepsilon)_{i,v} \left[\left(\frac{1}{s \cos \varepsilon} \right)_{i,v} \frac{J_{i+1,v} - J_{i-1,v}}{2} - \right. \\ & \left. - \left(\frac{W_r}{s \cos \varepsilon} \right)_{i,v} \frac{(W_r)_{i+1,v} - (W_r)_{i-1,v}}{2h} + \left(\frac{W_r W_u}{s \cos \varepsilon} - F_{1u} + 2\omega W_r \right)_{i,v} \right] \end{aligned}$$

Областью решения уравнения (1.22) будет канал в плоскости φ, ζ . На одной стенке канала граничные значения ψ равны нулю, а на противоположной — расходу жидкости на S_1 . На входе и выходе из канала граничные значения ψ задаются условиями однородности потока: по линейному закону от нуля до полного расхода жидкости на S_1 .

Вывод уравнения, описывающего течение жидкости на поверхностях S_2 , дан в работе [9].

Этим уравнением воспользуемся без каких-либо изменений

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = & \frac{\partial^* \ln \tau}{\partial r} \frac{\partial^* \psi}{\partial r} + \frac{\partial^* \ln \tau}{\partial z} \frac{\partial^* \psi}{\partial z} - \\ & - \frac{\tau^2 r^2}{\partial^* \psi / \partial r} \left[\frac{\partial^* J}{\partial r} + F_{2r} + \frac{W_u}{r} \frac{\partial^* (V_u r)}{\partial r} \right] \end{aligned} \quad (1.23)$$

Здесь V_u — окружная составляющая абсолютной скорости потока, τ — угловая толщина слоя тока, вектор

$$F_2 = - \frac{n}{n_u r} \frac{\partial p}{\partial \varphi}$$

Величина τ определяется уравнением

$$\frac{d \ln \tau}{dt} = \frac{n_z}{r n_u} \frac{\partial W_z}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{n_r}{n_u} \frac{\partial W_r}{\partial \varphi} + \frac{1}{r} \frac{\partial W_u}{\partial \varphi} \quad (1.24)$$

Производные со звездочкой берутся от величин, изменяющихся на поверхности тока S_2 , и вводятся по формулам, аналогичным формулам (1.5). Компоненты скорости выражаются через функцию тока

$$\partial^* \psi / \partial z = -\tau W_r, \quad \partial^* \psi / \partial r = \tau W_z \quad (1.25)$$

Условие ортогональности вектора F_2 и S_2 имеет вид

$$F_{2r}W_r + F_{2u}W_u + F_{2z}W_z = 0 \quad (1.26)$$

Уравнение (1.23) записывается в конечно-разностной форме в сетке r_i, z_v

Поверхность тока задана на плоскости меридионального сечения осесимметричной полосы турбины фиг. 2. На профиле втулки полагаем $\psi = 0$, а на кожухе ψ равно полному расходу жидкости на S_2 . На входе и выходе из области, изображенной на фиг. 2, задаем ψ из условия равного расхода жидкости через равные площади.

§ 2. Метод расчета. Задача решалась методом последовательных приближений. Расчет проводился на электронновычислительной машине БЭСМ-2.

После замены дифференциальных уравнений конечно-разностными получаем систему алгебраических уравнений в сетках $r_i, z_v; \varphi_i, \zeta_v$ с числом неизвестных функций ψ , равных числу уравнений. После вычисления невязок в узлах сеток и сведения их к нулю получаем в узлах сеток искомую функцию ψ .

В первом приближении определяем течение жидкости в осесимметричной полосе турбины при отсутствии рабочего колеса. При этом считаем течение жидкости потенциальным. Определив значение ψ в области, изображенной на фиг. 2, разбиваем всю полосу турбины на три осесимметричных канала с равными расходами. (Три канала взяты с целью уменьшения объема вычислительной работы.) Результаты расчета потенциального течения приведены в работе [10].

Вторым приближением в расчете пространственного течения жидкости в турбине было определение параметров безвихревого потока при допущении, что жидкость течет по поверхностям вращения в межлопаточном канале. При этом, так как R совпадает с r , $\delta \neq \delta(\varphi)$, $r \neq r(\varphi)$, $F_{1u} = 0$, $n_u = 0$, $\text{tg } \sigma = W_r / W_z$ уравнение (1.20) упрощается и принимает вид

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi^2} - \frac{\partial^* \ln \delta}{\partial \zeta} \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} - 2\omega \delta r^2 \sin \sigma = 0 \quad (2.1)$$

Это уравнение решаем на трех поверхностях тока S_1 , которые приняты на этой стадии расчета за поверхности вращения (на фиг. 1, 2 окружности 1, 2, 3) при крайних условиях, заданных в предыдущем параграфе. Поверхности тока строим, как средние поверхности осесимметричных каналов. По чертежу измеряем δ и $\sin \sigma$. Тем самым коэффициент и свободный член в уравнении (2.1) определены. В каналах, лежащих на трех поверхностях вращения (поверхностях тока), по найденным ψ строим три линии тока, разбивающие каждый канал на четыре канала с равным расходом. Затем соединяем линии тока разных поверхностей течения, соответствующие одинаковому расходу, отсчитываемому от одной лопатки к другой в сторону увеличения угла φ , получаем три поверхности тока семейства S_2 . Профили трех поверхностей S_2 в сечениях $z = \text{const}$ изображены на фиг. 1, 2 сплошными линиями спиралевидной формы. По формулам (1.17) определим W_r, W_u , следовательно, и W_z . В точках типа А (фиг. 1) восстанавливаем нормаль к поверхностям тока S_2 и определяем n_r, n_u, n_z . Из (1.4) находим W_r .

Третьим приближением будет расчет течения жидкости на поверхностях тока S_2 , заданных в области, данной на фиг. 2.

На данной стадии расчета уже можно учитывать завихренность потока. Задаем величину J по определенному закону на входе в осесимметричный канал. Поскольку эта величина сохраняется на каждой линии тока, а для каждой S_2 в плоскости r, z заданы три линии тока, то остается распространить значение J путем интерполяции на все узлы сетки r, z . Затем находим F_{2u} и F_{2z} из выражений

$$F_{2u} = \frac{W_r}{r} \frac{\partial^* (V_u r)}{\partial r} + \frac{W_z}{r} \frac{\partial^* (V_u r)}{\partial z}, \quad F_{2z} = \frac{\partial^* J}{\partial z} - W_r \left(\frac{\partial^* W_r}{\partial z} - \frac{\partial^* W_z}{\partial r} \right) - \frac{W_u}{r} \frac{\partial^* (V_u r)}{\partial z}$$

записанных в конечных разностях. Из (1.26) определяем F_{2r} . Величину τ на данном этапе расчета берем как толщину вытеснения, т. е. приравниваем отношению разности шага решетки и толщины лопатки к шагу решетки.

Все коэффициенты в уравнении (1.23) найдены. Уравнение нелинейное. Нелинейность создает производная $\partial^* \psi / \partial r$ в знаменателе последнего слагаемого уравнения (1.23). Поскольку ясно выраженной сходимости при решении уравнения (1.27) способом последовательных приближений не наблюдается, приходится уравнение линеаризировать. Для этого в последнем слагаемом уравнения (1.23) величину $1/\tau \partial^* \psi / \partial r$, равную искомой составляющей вектора скорости W_z на поверхности тока S_2 , заменяем на известную из предыдущего приближения (на поверхностях вра-

щения). В линеаризованном уравнении невязки быстро сводятся к нулю, и получаем значения ψ , W_r , W_z на трех поверхностях S_2 . На каждой S_2 берем линии тока такие, чтобы течение на каждой S_2 разбивалось на четыре канала с равным расходом. Одинаковые линии тока на трех поверхностях S_2 соединим между собой и получаем три новые поверхности S_1 , изображенные штриховыми линиями на фиг. 1, 2.

Четвертым приближением будет расчет течения жидкости на полученных поверхностях тока S_1 . В точках типа B (фиг. 1) по найденным направляющим косинусам нормали к поверхностям S_1 и известным W_r , W_z вычисляем W_u . Поверхности S_1 построены на трех линиях тока, на каждой из них известно J . Все известные в точках типа B геометрические и гидродинамические параметры сносятся по логарифмическим спиралям на координатные поверхности вращения, т. е., в конечном счете, на плоскость φ , ζ . Разместив параметры по углам φ_i , ζ_n , определяем F_{1r} , F_{1z}

$$F_{1r} = -\frac{W_u^2}{s \cos \varepsilon} + \frac{W_u}{s \cos \varepsilon} \frac{\partial W_r}{\partial \varphi} + \frac{W_z}{R \cos \sigma} \frac{\partial W_r}{\partial \zeta} - 2\omega W_u$$

$$F_{1z} = \frac{1}{R \cos \sigma} \frac{\partial J}{\partial \zeta} - \frac{W_r}{R \cos \sigma} \frac{\partial W_r}{\partial \zeta} + W_u \left(\frac{1}{s \cos \varepsilon} \frac{\partial W_z}{\partial \varphi} - \frac{1}{s \cos \varepsilon \cos \sigma} \frac{\partial W_u}{\partial \zeta} \right)$$

Из (1.7) вычисляем F_{1u} . Для определения $\ln \delta$ находим подынтегральную функцию P по формуле (1.21). Чтобы вычислить производную по s в какой-либо точке межлопаточного канала (фиг. 1, 2) при $z = \text{const}$, надо взять значения указанных функций в точках пересечения логарифмической спирали с поверхностями семейства S_1 . Производные по s определяются графически или по формулам в конечных разностях. Отметим, что в уравнение для определения линий тока на поверхностях S_1 входит величина δ , которая должна вычисляться вдоль искомым линий тока; в действительности она вычисляется вдоль линий тока, заданных на плоскости ζ , φ , по которым строилась поверхность S_1 .

Решив уравнение (1.22) по найденным линиям тока, можно найти $\ln \delta$, δ , снова произвести все вычисления и уточнить δ . Здесь этого не делалось. Разместив P/W по углам сетки ζ , φ , разбиваем линии тока, по которым строилась поверхность S_1 на отрезки длиной, равной шагу сетки. Интеграл в (1.16) заменяем суммой

$$\sum_0^x \frac{P}{W} \Delta x$$

Считаем, что P/W на каждом единичном отрезке сохраняет постоянное значение. Вычислив таким образом $\ln \delta$ и δ , размещаем их по углам φ_i , ζ_n . Все коэффициенты в (1.22) определены. Функции тока, полученные в результате решения уравнения (1.22) в каналообразной области плоскости φ , ζ , перенесем с этой плоскости на координатные поверхности вращения, а с них по логарифмическим спиралям — на поверхности тока. На трех поверхностях S_1 берем одинаковые линии тока ψ , характеризующие одинаковый расход жидкости, текущей по поверхности S_1 . Соединив ψ с равным расходом на трех поверхностях S_1 , получаем новые поверхности тока, которые показаны на фиг. 1, 2 штрих-пунктиром. Эти новые поверхности S_2 относятся к тому семейству поверхностей, которому принадлежит поверхности лопаток. Следующий шаг расчета повторит вышеописанный расчет течения жидкости на поверхностях S_2 .

§ 3. Пример расчета. За характерный линейный размер берем $L=0.05$ м, за характерную скорость — расходную составляющую вектора скорости на входе в осесимметричную полость турбины $V_r = W_r = 9,5$ м/сек, V — абсолютная скорость. Безразмерная ширина меридианального сечения осесимметричного канала на входе $\Delta L' = L \cdot \Delta L = 1.84$; безразмерная скорость $V_r' = 1$. Безразмерное $\Delta \varphi' = V' \Delta L' = 1.84$, т. е. на втулке $\varphi' = 0$, на кожухе $\varphi' = 1.84$. Эти граничные значения φ верны для расчета течения на поверхностях S_2 , так как $\tau = 1$. Все данные, необходимые для расчета примера, были взяты из эксперимента в сечении $r = 5$ и перенесены в сечение $r = 7$ без изменений. Скорость набегающего потока на рабочее колесо турбины тем самым была несколько превышена по сравнению с экспериментальными данными $p/\rho + V^2/2 = 766 \text{ м}^2/\text{сек}^2$, $\omega(V_{ur}) = 630 \text{ м}^2/\text{сек}^2$, $J = 136 \text{ м}^2/\text{сек}^2$, $J' = 136/9.5^2 = 1.51$.

На поверхности вращения (течения), ближайшей к втулке, задаем $J' = 0.65$, на средней поверхности тока $J' = 1.3$, на поверхности, ближайшей к кожуху, $J' = 1.05$. В примере бралось колесо с 14 лопатками.

Граничные значения ψ' для расчета течения жидкости в канальной области на поверхностях S_1 брались соответственно равными нулю и 3.14, так как ширина канальной области на поверхности вращения (поверхности тока) на входе в осесимметричную полость турбины $2/14 \pi r = 3.14$, а высота слоя тока δ , внутри которого лежит поверхность S_1 , равна единице. Расстояние входа в канал от оси турбины $r = 7$, $V_r' = 1$ на входе в канал. Поэтому $\Delta \varphi' = 3.14$. Цену клетки определим при отображении поверхности вращения на плоскость, если угол 2π разделим на число межлопаточных

каналов, а угол между носиками профилей лопаток в сечении рабочего колеса поверхностью вращения разделим на число берущихся клеток (взято четыре клетки). Итак шаг сетки $h = \frac{2}{\sqrt{36\pi}} = 0.112$. Разбиение образующей поверхности вращения $d\xi = dl/R$ завершит построение квадратной сетки в плоскости ζ, φ . Обратную логарифмическую спираль берем с $k = -0.505$.

По форме поверхностей тока, изображенных на фиг. 1, 2 можно судить о том, насколько отлично течение в турбине от общепринятых моделей.

Поверхности тока семейства S_1 отличаются от поверхностей вращения, а поверхности тока семейства S_2 — от формы скелетов лопаток.

На фиг. 1, 2 представлены два сечения плоскостями ($z = 1.5$ и $z = 2.5$) межлопаточного канала колеса турбины и одно сечение канала ($z = 4$), образованного поверхностями тока, сходящими с соседних лопаток. Расчет потенциального течения жидкости на поверхностях тока, имеющих форму поверхностей вращения, показывает, что линии тока с равным $\Delta\varphi$ распределены равномерно между лопатками. Поверхности тока S_2 , построенные по результатам расчета течения жидкости на поверхностях вращения, нанесены на фиг. 1, 2 сплошными линиями в виде спиралей, закручивающихся вокруг оси z . Эти поверхности поджаты к лопатке, обращенной выпуклой стороной к каналу, что соответствует большей скорости течения на выпуклой стороне лопатки.

Расчет вихревого течения жидкости по полученным поверхностям S_2 дал новые поверхности тока S_1 . Форма этих поверхностей отличается от поверхностей вращения. В сечении лопатки $z = 1.5$, близком к горизонтальному входу осесимметричного канала и к втулке, у передней кромки лопаток плоскостями $z = \text{const}$ (фиг. 1) поверхности тока по форме близки к поверхностям вращения. В нижней выходной части межлопаточного канала поверхности тока имеют четко выраженную форму дужек, обращенных выпуклостью в сторону кожуха. Форма профилей поверхностей течения S_1 сохраняется и в послелопаточном канале (сечение $z = 4$), приобретая еще более резко выраженную вытянутую форму дужек, обращенных выпуклостью к кожуху.

Все поверхности тока S_1 оказались сильно поджатыми к кожуху (сечение $z = 2.5$) в средней части лопатки, на повороте течения из горизонтальной полости турбины в вертикальную в месте наибольших скоростей. Расположение поверхностей тока S_1 в сечении $z = 1.5$ ближе к втулке, чем в сечениях $z = 2$ и $z = 2.5$, может свидетельствовать о существовании обратного тока жидкости в межлопаточном канале. В результате расчета течения на поверхностях S_1 и получены поверхности S_2 , изображенные на фиг. 1, 2 штрих-пунктирными линиями.

Поступило 1 III 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Степанов Г. Ю. Гидродинамика решеток турбомашин, Физматгиз, 1962.
2. Валландер С. В. О применении метода особенностей к расчету течений жидкости в радиально-осевых турбинах. Докл. АН СССР, 1958, т. 123, № 3.
3. Белехова Н. Г. Учет пространственности потока, обтекающего рабочее колесо турбомашин. Вестник ЛГУ, 1958, № 1. Сер. матем., механ. и астрон., вып. 1.
4. Сироткин Я. А. Численный метод расчета вихревого потока идеальной нежимаемой жидкости в осесимметричных криволинейных каналах. Изв. АН СССР, ОТН. Механ. и машиностр., 1961, № 5.
5. Сироткин Я. А. К постановке двумерных задач вихревого течения сжимаемой жидкости в турбомашинах. Инж. ж. 1964, т. 4, вып. 2.
6. Dreufus L. A. A three-dimensional theory of turbine flow and its application to the design of wheel vanes for propeller and Francis turbine. Stockholm, 1946.
7. Гохман А. М. Расчет рабочего колеса поворотной-лопастной турбины со сферическими втулкой и шахтой. Тр. Моск. энерг. ин-та, 1954, вып. 12 (Гидроэнергетический).
8. Симонов Л. А. О пространственном потоке в гидромашинах. ПММ, 1941, т. 5, вып. 3.
9. Wu C. H. A general theory of Three-Dimensional flow in Subsonic and Supersonic Turbomachines of axial, Radial, and Mixed-Flow Types. Trans. ASME, 1952, vol. 74, No. 8.
10. Макаров А. Ф. Пространственный поток жидкости в межлопаточном канале радиально-осевой турбины. Тр. Ленингр. политехн. ин-та, 1965, № 248.
11. Stanitz L. D. Some theoretical aerodynamic investigations of impellers in radial and Mixed-flow centrifugal compressors. Trans. ASME, 1952, vol. 74, No. 4.
12. Giese J. M. Stream functions for three-dimensional flows. J. Math. Phys., 1951, vol. 30, No. 1, p. 31—35.
13. Krajevskij B. Variational problems of the theory of three-dimensional flow through thermal turbomachinery. Arch. Mech. Stosowanej, 1963, vol. 15, No. 6.