

если интересоваться величинами $p_0(0)$, достаточно осуществить лишь грубый подбор задаваемых в начале счета параметров. Например, как показали численные эксперименты, $\partial p_0(0) / \partial \varepsilon(0) \approx 0.1$ и $\partial p_0(0) / \partial a(0) \approx 0.001$ ($1 \leq R \leq 50$). Этот факт использовался для построения теоретической кривой $P(R)$ на фиг. 7 при $R < 5$.

Поступило 3 II 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Толстых А. И. О численном расчете сверхзвукового обтекания затупленных тел потоком вязкого газа. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1966, т. 6, № 1, стр. 113—120.
2. Белоцерковский О. М. и др. Обтекание затупленных тел сверхзвуковым потоком газа. Тр. ВЦ АН СССР, 1966.
3. Но Н. Т., Пробштейн Р. F. The compressible viscous layer in rarefied hypersonic flow. Rarefied gas dynamics, Academic Press, 1961, p. 525—552.
4. Иосихара Х., Левинский Е. Обтекание сферы гиперзвуковым потоком разреженного газа. Изд. «Мир», 1964, стр. 58.
5. Cheng H. K. The blunt-body problem in hypersonic flow at low Reynolds number. JAS paper, 1963, p. 63—92.
6. Дородницын А. А. Об одном методе численного решения некоторых нелинейных задач аэродинамики. Тр. III Всесоюзн. матем. съезда, 1956, т. 3, Изд-во АН СССР, 1958.
7. Белоцерковский О. М. Симметричное обтекание затупленных тел сверхзвуковым потоком совершенного и реального газа. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1962, т. 2, № 6, стр. 1062—1085.
8. Белоцерковский О. М. Расчет обтекания осесимметричных тел с отходящей ударной волной. ВЦ АН СССР, 1961.
9. Сухнев В. А. Об определении поправок к показаниям насадков полного напора в сверхзвуковом потоке разреженного газа. Изв. АН СССР. Механика и машиностроение, 1964, № 5.
10. Potter J. L. The transitional rarefied flow Regime. Paper presented at the Fifth international Symposium an Rarefied gas Dynamics, Oxford, England, 1966, July 4—8.

МЕТОД РАСЧЕТА ДВУМЕРНЫХ СВЕРХЗВУКОВЫХ ТЕЧЕНИЙ ХИМИЧЕСКИ РЕАГИРУЮЩЕГО НЕВЯЗКОГО ГАЗА

В. В. МИХАЙЛОВ (Москва)

В работе предложен численный метод расчета плоских и осесимметричных равновесных сверхзвуковых течений химически реагирующего невязкого газа.

Метод аналогичен методу интегральных соотношений при кусочной аппроксимации подинтегральных функций, но в качестве линий, разбивающих поле потока на полосы, в нем используются линии тока.

Число «полос» не влияет на вид аппроксимирующих уравнений и может быть выбрано любым.

Обозначения

x — координаты точки	u, v — составляющие скорости
a — скорость звука	p — давление
ρ — плотность	T — температура
r_k — координата y для k -той линии тока	h — энтальпия единицы массы газа
σ — угол наклона скачка уплотнения	R — координата y скачка уплотнения

Величина ν принимает значения 0 и 1 соответственно в плоском и осесимметричном случаях. Индексы ∞ означают значения в невозмущенном потоке; s — значения непосредственно за скачком уплотнения; $1, 2, \dots, k$ — значения на линиях тока.

§ 1. Рассмотрим плоское или осесимметричное течения около удлиненного тела. Направим ось x декартовой или цилиндрической системы координат вдоль направления набегающего потока.

Уравнения количества движения и неразрывности для равновесного течения невязкого газа можно записать в следующем дивергентном виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} [y^\nu (\rho u^2 + p)] + \frac{\partial}{\partial y} (y^\nu \rho u v) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} (y^\nu \rho u v) + \frac{\partial}{\partial y} [y^\nu (\rho v^2 + p)] &= \nu r y^{\nu-1}, \quad \frac{\partial}{\partial x} (y^\nu \rho u) + \frac{\partial}{\partial y} (y^\nu \rho v) = 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$

Предположим теперь, что известны параметры потока в некотором начальном сечении $x = \text{const}$ и что вниз по потоку от этого сечения $M = u/a > 1$. В этом случае удается построить достаточно простой метод расчета указанных течений.

§ 2. Проинтегрируем уравнения (1.1) по y от линии тока r_1 до линии тока r_2 .

$$\frac{d}{dx} \int_{r_1}^{r_2} (\rho u^2 + p) y^v dy - p_2 r_2 r_2' + p_1 r_1 r_1' = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{d}{dx} \int_{r_1}^{r_2} \rho u^2 r' y^v dy + p_2 r_2^v - p_1 r_1^v = v \int_{r_1}^{r_2} p y^{v-1} dy, \quad \frac{d}{dx} \int_{r_1}^{r_2} \rho u y^v dy = 0$$

Здесь и ниже штрихом обозначены производные по x вдоль линий тока.

Будем считать теперь, что изменение параметров потока между двумя соседними линиями тока мало. Если обозначить это изменение через Δf , то, пренебрегая $(\Delta f/f)^2$ по сравнению с единицей, получим

$$\int_{r_1}^{r_2} \rho u y^v dy = \rho_{12} u_{12} \frac{r_2^{v+1} - r_1^{v+1}}{v+1} = Q = \text{const}, \quad v \int_{r_1}^{r_2} p y^{v-1} dy = p_{12} (r_2^v - r_1^v)$$

$$\int_{r_1}^{r_2} \rho u^2 r' y^v dy = Q u_{12} r_{12}', \quad \int_{r_1}^{r_2} (\rho u^2 + p) y^v dy = Q u_{12} + p_{12} \frac{r_2^{v+1} - r_1^{v+1}}{v+1}$$

Здесь параметры f , отмеченные индексами 1, 2, равны

$$f_1 = 1/2 (f_2 + f_1) \quad (2.3)$$

Подставив записанные выражения в (2.1)–(2.3) и, разрешив полученные уравнения относительно p_{12}' , u_{12}' , r_{12}'' , окончательно будем иметь

$$p_{12}' = \frac{v+1 (p_2 - p_1) (r_2^v r_2' + r_1^v r_1') + 2\rho_{12} u_{12} (r_2^v r_2' - r_1^v r_1')}{2 (r_2^{v+1} - r_1^{v+1}) (1 - M_{12}^2)} \quad (2.4)$$

$$u_{12}' = \frac{1}{\rho_{12} u_{12}} \left[\frac{v+1 (p_2 - p_1) (r_2^v r_2' - r_1^v r_1')}{2 (r_2^{v+1} - r_1^{v+1})} - p_{12}' \right],$$

$$r_{12}'' = -r_{12}' \frac{u_{12}'}{u_{12}} - \frac{p_2 - p_1}{\rho_{12} u_{12}^2 (r_2 - r_1)}$$

Используя изэнтропичность течения вдоль линий тока, для T' запишем следующее выражение:

$$T' (\partial h / \partial T) = p [1 / \rho - (\partial h / \partial p)] \quad (2.5)$$

Здесь $\partial h / \partial T$, $\partial h / \partial p$ — частные производные соответственно при постоянном давлении и температуре.

§ 3. Уравнения для расчета параметров за головным скачком уплотнения получим следующим образом.

Проинтегрируем уравнения (1.1) по y от скачка уплотнения до линии тока k

$$\frac{d}{dx} \int_{r_h}^R (\rho u^2 + p) y^v dy - (\rho_s u_s^2 + p_s) R^v R' + \rho_s u_s v_s R^v + p_k r_k^v r_k' = 0 \quad (3.1)$$

$$\frac{d}{dx} \int_0^R \rho u v y^v dy - \rho_s u_s v_s R^v R' + \rho_s u_s^2 R^v + p_s R^v - p_k r_k^v = v \int_{r_k}^R p y^{v-1} dy \quad (3.2)$$

$$\frac{d}{dx} \int_{r_k}^R \rho u y^v dy = \rho_\infty u_\infty R^v R' \quad (3.3)$$

При $r_k \rightarrow R$ из уравнения (3.3) получаем условие:

$$r_*' = R' \left(1 - \frac{\rho_\infty u_\infty}{\rho_s u_s} \right) \quad (3.4)$$

Здесь и в дальнейшем индексом * отмечены производные вдоль линии тока в месте пересечения ею скачка уплотнения, а индексом s — производные вдоль скачка.

Дифференцируя (3.3), (3.2), (3.1) по x и устремляя r_k к R с учетом условия (3.4) и уравнения (2.7), будем иметь

$$R'' = \frac{R'}{r_*'} \left[r_*'' - (R' - r_*') \left(v \frac{r_*'}{R} + \frac{\rho_s' + \rho_*'}{\rho_s} + \frac{u_s' + u_*'}{u_s} \right) \right], \quad p_* = w p_s' + S \quad (3.5)$$

$$u_*' = E p_s' + F, \quad T_*' (\partial h / \partial T)_s = p_*' [1 / \rho_s - (\partial h / \partial p)_s] \quad (3.6)$$

$$W = \frac{1 + r_*'^2}{1 + r_*' R'}, \quad S = \frac{\rho_\infty u_\infty u_s r_*'' R'}{1 + r_*' R'}, \quad E = \frac{-1}{(1 + r_*' R') \rho_s u_s}, \quad F = \frac{u_s r_*'' R'}{1 + r_*' R'}$$

Чтобы получить выражения для производных вдоль скачка уплотнения, выпишем уравнения для параметров за косым скачком

$$p_s = p_\infty + \rho_\infty u_\infty^2 \sin^2 \sigma (1 - \varepsilon), \quad h_s = h_\infty + \frac{p_s - p_\infty}{2 \rho_\infty} (1 + \varepsilon)$$

$$u_s = u_\infty - \frac{p_s - p_\infty}{\rho_\infty u_\infty}, \quad \varepsilon = \frac{\rho_\infty}{\rho_s}$$

и продифференцируем их по x вдоль скачка уплотнения.

Из уравнения для h_s получим

$$T_s' = B p_s', \quad B = \frac{\rho_s + \rho_s^2 [1 / \rho_\infty - 2 (\partial h / \partial p)_s] - (p_s - p_\infty) (\partial \rho / \partial p)_s}{2 (\partial h / \partial T)_s \rho_s^2 + (p_s - p_\infty) (\partial \rho / \partial T)_s} \quad (3.7)$$

Отсюда

$$\rho_s' = p_s' [B (\partial \rho / \partial T)_s + (\partial \rho / \partial p)_s] = C p_s'$$

Из уравнений для p_s и u_s будем иметь

$$R'' = D p_s', \quad D = \frac{1 + R'^2 (1 - \varepsilon^2 u_\infty^2 C)}{2 R' [\rho_\infty u_\infty^2 (1 - \varepsilon) + p_\infty - p_s]}, \quad u_s' = N p_s', \quad N = - \frac{1}{\rho_\infty u_\infty} \quad (3.8)$$

Таким образом, уравнения (3.6) — (3.9) позволяют вычислить все производные вдоль скачка уплотнения и вдоль линии тока, пересекающей скачок, если известны параметры за скачком (включая R' , r_*'), а также величины p_s' и r_*'' .

Значение p_s' можно найти, зная r_*'' и параметры потока, если приравнять выражения для R'' из уравнений (3.5), (3.8).

$$p_s' = \frac{r_*'' - (R' - r_*') (L / \rho_s + F / u_s + v r_*' / R)}{A + (R' - r_*') [(K + C) / \rho_s + (N + E) / u_s]} \quad (3.9)$$

$$\left(K = \frac{W}{a_s^2}, \quad L = \frac{S}{a_s^2}, \quad A = \frac{1 + R'^2 (1 - \varepsilon^2 u_\infty^2 C)}{2 R' (\rho_\infty u_\infty^2 + p_\infty - p_s)} \right)$$

§ 4. Система уравнений (2.4) — (2.7), (3.7) — (3.10) легко разрешается относительно производных вдоль линий тока и скачка уплотнения при известном значении r'' на теле для любого числа линий тока, если применить метод прогонки.

Для этого по известным значениям u , p , T , r , r' вычисляются $f'_{k,k+1} = (f_k' + f_{k+1}') / 2$ при помощи уравнений (2.4) — (2.7) и стандартной программы расчета термодинамических функций $\partial h / \partial p$, $\partial h / \partial T$, $\partial \rho / \partial p$, $\partial \rho / \partial T$, a . Затем, зная r'' на поверхности тела последовательно, двигаясь от тела к скачку, находятся все r_k'' , включая r_*'' . Зная r_*'' , из уравнений (3.7) — (3.10) определяются производные f_s' и f_s и последовательно, двигаясь от скачка к телу, находятся значения остальных производных вдоль линий тока и поверхности тела. Затем тем или иным способом делается шаг по направлению X .

При этом после каждого шага можно добавлять линию тока на скачке уплотнения или добавлять ее только в том случае, если расстояние от скачка до ближайшей линии тока превышает некоторую величину. Значение r_*' на этой линии тока определяется при помощи уравнения (3.4).

§ 5. Предлагаемым методом рассчитано обтекание затупленного по сфере конуса с углом полураствора $\theta = 10^\circ$ при $M_\infty = 23$ и высоте $H = 60$ км. Расчет проведен методом Эйлера до $\bar{x} = x/\delta = 25$ (начало координат находится в носике конуса, δ — радиус затупления).

Устойчивость счета исследовалась экспериментально путем варьирования величины шага. При этом оказалось, что величина шага, обеспечивающая устойчивый счет, примерно в десять раз меньше той, которая следует из оценки зоны влияния двух соседних точек $\Delta x \leq \Delta x_{\max}$. Эта оценка дает

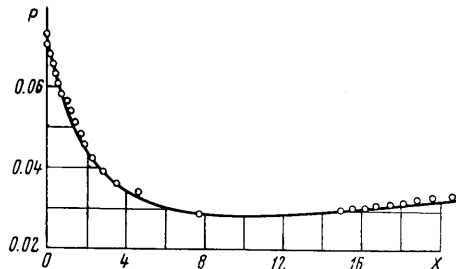
$$\Delta x_{\max} = \frac{r_{k+1} - r_k}{2} \frac{M_{k,k+1}^2 - 1}{\sqrt{M_{k,k+1}^2 (1 + r_{k,k+1}^2) - 1}}$$

Расчет велся с минимальным числом линий тока, равным 9. Когда число линий тока достигало 17, производилось выбрасывание промежуточных линий тока, т. е. число линий тока уменьшалось до 9.

Для контроля точности аппроксимации по направлению Y проводился расчет с меньшим числом линий тока. Для контроля точности численного интегрирования проверялось выполнение условий на скачке уплотнения. Согласно этим оценкам, ошибки расчета не превышали величины порядка 1%.

Было проведено также сравнение с результатами расчетов методом характеристик, которое дало отличие порядка 2% во всем поле течения.

На фигуре дается сравнение распределения давления $\bar{p} = p/\rho_\infty u_\infty^2$, полученного предложенным методом, с результатами расчетов П. И. Чушкина и Н. П. Шулишниковой [1] (газ термически совершенный, $\gamma = 1.4$, $M_\infty = 10$, $\theta = 10^\circ$). Данные из работы [1] нанесены кружками.



Поступило 5 II 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Чушкин П. И., Шулишникова Н. П. Таблицы сверхзвукового течения около затупленных конусов. ВЦ АН СССР, 1961.

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ПЛАСТИН В ПОТОКЕ, БЛИЗКОМ К СВОБОДНОМОЛЕКУЛЯРНОМУ

М. Н. КОГАН, О. Г. ФРИДЛЕНДЕР, Г. Е. ЦАРЬКОВА

(Москва)

Если пластина произвольной формы обтекается свободномолекулярным потоком, то на каждый элемент ее поверхности одинаковое количество молекул приносит одинаковые импульсы и энергию. Поэтому все пластины данной площади, но произвольной формы обладают в свободномолекулярном потоке одинаковым сопротивлением, подъемной силой, и на них приходят равные потоки тепла.

При учете столкновений набегающих и отраженных молекул форма пластины имеет существенное значение, и поэтому пластины разной формы обладают различными аэродинамическими характеристиками.

Будем следовать теории первых столкновений [1]. Рассмотрим в потоке, близком к свободномолекулярному ($K \gg 1$), при больших скоростях ($M \gg 1$) плоские пластины, имеющие один характерный линейный размер. Предположим, что температура диффузно отраженных молекул порядка температуры невозмущенного потока и постоянна ($T_e \sim T_\infty$, $T_e = \text{const}$). Так как $V_e \ll V_\infty$, можно считать, что налетающие со скоростью V_∞ молекулы сталкиваются с неподвижными отраженными молекулами. Для справедливости теории первых столкновений в предположении, что столкновения между молекулами происходят по закону столкновения упругих шаров, необходимо дополнительное условие $M/K \ll 1$. При этом столкновениями между отраженными молекулами можно пренебречь, а плотность набегающих и отраженных молекул