

ЛИТЕРАТУРА

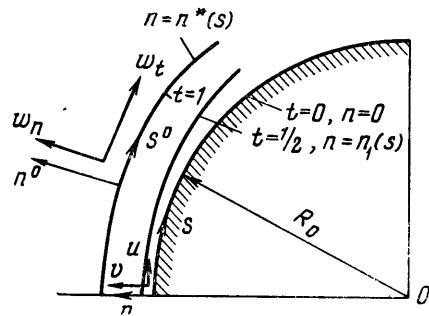
1. Галюн Н. С., Крайко А. Н. К расчету неравновесных течений. Изв. АН СССР. Механика и машиностроение, 1964, № 6.
2. Пирумов У. Г., Камзолов В. Н. Расчет неравновесных течений в соплах. Изв. АН СССР. МЖГ, 1966, № 6.
3. Моретти. Новый метод расчета неравновесных течений. Ракетная техника и космонавтика, 1965, № 2.
4. Громов В. Г. Химически неравновесный пограничный слой в диссоциированном воздухе. Изв. АН СССР. МЖГ, 1966, № 2.
5. Гилинский С. М., Теленин Г. Ф., Тиняков Г. П. Метод расчета сверхзвукового обтекания затупленных тел с отошедшей ударной волной. Изв. АН СССР. Механика и машиностроение, 1964, № 4.
6. Стулов В. П., Теленин Г. Ф. Неравновесное обтекание сферы сверхзвуковым потоком воздуха. Изв. АН СССР. Механика, 1965, № 1.
7. Стулов В. П., Турчак Л. И. Обтекание сферы сверхзвуковым потоком воздуха с учетом колебательной релаксации. Изв. АН СССР. МЖГ, 1966, № 5.

ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЕТ ТЕЧЕНИЯ В ОБЛАСТИ СФЕРИЧЕСКОГО ЗАТУПЛЕНИЯ ПРИ МАЛЫХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА

В. С. ГОРИСЛАВСКИЙ, А. И. ТОЛСТЫХ

(Москва)

В [1, 2] рассматривалась задача об обтекании двумерных тел (в частности, кругового цилиндра) сверхзвуковым потоком вязкого газа. Ниже приводятся некоторые результаты для случая осесимметричных затупленных тел, полученные при помощи того же метода. Расчеты проводились с целью определения аэродинамических характеристик течения при малых числах Рейнольдса; предполагалось, что уравнения механики сплошной среды остаются справедливыми. В случае достаточно малых чисел Рейнольдса, когда могут быть нарушены условия применимости данного метода, полученные численные результаты естественно рассматривать как формальные. Существуют приближенные подходы к исследованию вязкого течения в области затупления ([3-5] и др.); в тех случаях, когда это оказывается возможным, производится сравнение с некоторыми из этих теоретических результатов, а также с экспериментальными данными.



Фиг. 1

1. Рассматривается симметричное обтекание затупленного тела вращения сверхзвуковым потоком вязкого совершенного газа. Как и в [1], исходная система уравнений интегрируется в полосе конечной ширины $0 \leq n \leq n^*(s)$, где s, n — ортогональные координаты, связанные с поверхностью тела (s отсчитывается от критической точки вдоль контура, n — вдоль нормали к поверхности, фиг. 1). Эта система, отличающаяся от системы уравнений Навье — Стокса отсутствием некоторых членов, имеющих порядок $O(1/R)$ и выше, имеет вид

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial s}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial n}(H\rho v) + j \left(\frac{\rho u}{r} \frac{\partial r}{\partial s} + \frac{H\rho v}{r} \frac{\partial r}{\partial n} \right) = 0 \\
 & \rho u \frac{\partial u}{\partial s} + H\rho v \frac{\partial u}{\partial n} + k\rho uv = - \frac{\partial p}{\partial s} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial n} \left(\mu H \frac{\partial u}{\partial n} \right) - \\
 & - \frac{k}{R} \frac{\partial}{\partial n}(\mu u) + \frac{k\mu}{R} \frac{\partial u}{\partial n} + j \frac{\mu H}{Rr} \frac{\partial r}{\partial n} \frac{\partial u}{\partial n} \\
 & \rho u \frac{\partial v}{\partial s} + H\rho v \frac{\partial v}{\partial n} - k\rho v^2 = - H \frac{\partial p}{\partial n} + \frac{4}{3R} \frac{\partial}{\partial n} \left(\mu H \frac{\partial v}{\partial n} \right) -
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{2}{3R} \frac{\partial}{\partial n} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial s} \right) + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial s} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial n} \right) - \frac{7}{3R} \frac{\partial}{\partial s} \left(\mu \frac{ku}{H} \right) + \\
& + j \left[\frac{\mu}{Rr} \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial u}{\partial n} - \frac{2}{3R} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{\mu u}{r} \frac{\partial r}{\partial s} \right) - \frac{\mu ku}{3HRr} \frac{\partial r}{\partial s} - \frac{2\mu u}{Rr^2} \frac{\partial r}{\partial s} \frac{\partial r}{\partial n} \right] \\
\rho u \frac{\partial}{\partial s} \left(h + \frac{u^2 + v^2}{2} \right) + H\rho v \frac{\partial}{\partial n} \left(h + \frac{u^2 + v^2}{2} \right) &= \frac{1}{\sigma R} \frac{\partial}{\partial n} \left(H\mu \frac{\partial h}{\partial n} \right) + \\
& + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial n} \left(\mu H u \frac{\partial u}{\partial n} \right) + \frac{4}{3R} \frac{\partial}{\partial n} \left(\mu H v \frac{\partial v}{\partial n} \right) - \frac{k}{R} \frac{\partial}{\partial n} (\mu u^2) + \\
& + j \left(\frac{\mu H}{\sigma R r} \frac{\partial r}{\partial n} \frac{\partial h}{\partial n} + \frac{\mu H u}{R r} \frac{\partial r}{\partial n} \frac{\partial u}{\partial n} \right)
\end{aligned}$$

$$H = 1 + kn, \quad p = (\gamma - 1) \gamma^{-1} \rho h, \quad R = \rho_{\infty} \omega_{\infty} R_0 / \mu_*$$

Здесь $r(s, n)$ — расстояние от точки (s, n) до оси симметрии; u, v — составляющие скорости вдоль s и n (фиг. 1), отнесенные к скорости невозмущенного потока ω_{∞} ; ρ — плотность, отнесенная к плотности невозмущенного потока ρ_{∞} ; p — давление, отнесенное к $\rho_{\infty} \omega_{\infty}^2$; h — энтальпия, отнесенная к ω_{∞}^2 ; μ — коэффициент вязкости, отнесенный к своему значению μ_* при $h = 1$; переменные s, n, r и кривизна k отнесены соответственно к радиусу кривизны контура в критической точке R_0 и величине $1/R_0$. R, σ и γ — числа Рейнольдса, Прандтля и показатель адиабаты; значения $j = 0$ и $j = 1$ в правых частях (1.1) соответствуют плоским и осесимметричным течениям. Предполагается, что имеет место неравенство $M_{\infty} > 1$, где $M_{\infty} = \omega_{\infty} / (\gamma - 1) h_{\infty}$ — число Маха невозмущенного потока. Форма поверхности может быть достаточно произвольной (нужно лишь задать функцию $k = k(s)$). Однако все конкретные расчеты проводились лишь для случая сферического затупления.

Остановимся на обосновании выбора исходной системы. Уравнения (1.1) формально записаны с точностью, не меньшей $1/R$, однако путем апостериорного анализа можно показать, что в виду плавного характера изменения функций вдоль поверхности тела члены уравнений Навье — Стокса, не входящие в (1.1), вплоть до малых значений чисел Рейнольдса играют сравнительно незначительную роль; с другой стороны, как будет указано ниже, их отсутствие позволяет получить однозначное решение задачи, не используя какую-либо информацию о последующей истории течения. Вместе с тем, присутствие в (1.1) всех конвективных членов и всех членов с высшими производными по n из полной системы обеспечивает достаточно точное описание изменения параметров течения вдоль нормали к поверхности. Отметим, что члены с коэффициентом $7/3$ из правой части третьего уравнения системы (1.1) имеют порядок $O(1/R)$; тем не менее, как показали расчеты, при достаточно малых числах Рейнольдса ($R < 10$) они начинают играть существенную роль. «Внепорядковость» этих и некоторых других членов не имеет особого значения, поскольку решение системы (1.1) не связано с построением каких-либо асимптотических разложений по степеням числа Рейнольдса.

Рассмотрим граничные условия задачи. При $n = n^*$, как и в плоском случае [4], используются соотношения, полученные из уравнений для структуры криволинейной ударной волны в первом приближении (следующие приближения имеют порядок $O(1/R)$ и выше), а также соотношение, определяющее линию $n = n^*(s)$. В системе координат (s°, n°) , связанной с этой линией (фиг. 1), граничные условия имеют вид

$$\begin{aligned}
\rho w_n = w_{n\infty}, \quad \rho w_n w_t &= \frac{\mu}{R} \frac{dw_t}{dn^{\circ}} + w_{n\infty} w_{t\infty}, \quad \rho w_n^2 + p = \frac{4}{3} \frac{\mu}{R} \frac{dw_n}{dn^{\circ}} + w_{n\infty}^2 + p_{\infty} \\
\rho w_n \left(h + \frac{w_t^2 + w_n^2}{2} \right) &= \frac{\mu}{R\sigma} \frac{dh}{dn^{\circ}} + \frac{\mu}{R} w_t \frac{dw_t}{dn^{\circ}} + \\
& + \frac{4}{3} \frac{\mu}{R} w_n \frac{dw_n}{dn^{\circ}} + w_{n\infty} \left(h_{\infty} + \frac{1}{2} \right) \\
\frac{dw_n}{dn^{\circ}} &= 0
\end{aligned} \tag{1.2}$$

Здесь w_t и w_n — безразмерные составляющие скорости вдоль s° и n° , индекс ∞ относится к значениям параметров в невозмущенном потоке. Последнее из этих условий определяет положение линии $n = n^*(s)$ «позади» ударной волны, что является удобным для построения решений в области $0 \leq n \leq n^*(s)$ (выбор границы $n^*(s)$ —

скорее практический, чем принципиальный вопрос). На поверхности тела ($n = 0$) выполняются обычные условия прилипания и условие для температуры

$$u = 0, \quad v = 0, \quad \partial h / \partial n = 0$$

На оси симметрии ($s = 0$) имеют место очевидные условия

$$u = 0, \quad \partial v / \partial s = 0, \quad \partial h / \partial s = 0 \quad (1.3)$$

Ввиду того, что возмущения, описываемые системой (1.1), могут распространяться вверх по потоку, для получения единственного решения краевой задачи необходимы еще условия при $s > 0$; эти условия, как и в [1], следуют из существования особых точек у дифференциальных уравнений, аппроксимирующих (1.1).

2. Для численного интегрирования (1.1) используется схема 1 метода интегральных соотношений [6-7]; левые части уравнений (1.1) записываются в дивергентном виде; вводятся новые функции:

$$\varphi = \partial u / \partial n, \quad \psi = \partial v / \partial n, \quad \eta = \partial h / \partial n$$

эквивалентная система уравнений первого порядка почленно интегрируется от поверхности до границ $n_j(s)$ полос

$$n_0 \leq n_{j-1}(s) \leq n \leq n_j(s) \leq n_N, \quad n_0 = 0, \quad n_N = n^*(s), \quad j = 1, \dots, N$$

на которые разбивается область $0 \leq n \leq n^*(s)$. После замены подынтегральных выражений интерполяционными полиномами с узлами интерполяции на границах полос интегральные соотношения переходят в обыкновенные дифференциальные уравнения относительно значений искомых функций в узлах. Специфика применения схемы 1 остается той же, что и в плоском случае. При помощи преобразования

$$t(\xi, a) = c\xi + (1 - c) \frac{1 - \exp(-\xi/a)}{1 - \exp(-1/a)} \quad \left(\xi = \frac{n}{n^*}, \quad c = \text{const} \right) \quad (2.1)$$

производится такое растяжение области, соответствующей «пограничному слою» и такое сжатие области «внешнего течения», при котором характер изменения скорости u и связанных с ней выражений становится одинаковым во всей полосе $0 \leq n \leq n^*$. Параметр a , входящий в (1.1) и регулирующий степень растяжения «пограничного слоя», зависит от координаты s и является одной из искомых функций. После перехода к переменным s, t область $0 \leq n \leq n^*$ преобразуется в полосу постоянной ширины $0 \leq t \leq 1$, а разбиение области интегрирования на N полос производится линиями

$$t_j(\xi_j, a) = j/N \quad (j = 0, 1, \dots, N)$$

Прямолинейной расчетной сетке в фиктивной плоскости (s, t) соответствует некоторое неравномерное разбиение в физической плоскости (s, n). При этом постоянная c определяет количество полос в плоскости (s, t), соответствующих пограничному слою в физической плоскости. Преобразование типа (2.1) позволяет вести расчеты в широком диапазоне чисел Рейнольдса; однако в данной работе внимание уделяется лишь области малых чисел R , поэтому c полагается равной нулю.

При составлении интерполяционных полиномов по переменной t для функций $u, v, p, h, \varphi, \psi, \eta, \mu$ и комплексов $\rho u^2, \rho uv, \rho i(h + 1/2u^2 + 1/2v^2)$, ρi учитывается характер их поведения вблизи поверхности. Сумма наивысших степеней всех полиномов берется на единицу меньше, чем соответствующая сумма при обычной аппроксимации в физической плоскости. Это связано с введением параметра a в качестве искомой функции.

Для замыкания системы интегральных соотношений используются граничные условия (1.2), которые записываются в системе координат (s, n) и представляются в виде уравнений с независимой переменной s . С учетом соотношения

$$de / ds = (1 + ke) \operatorname{tg} \tau$$

(где $\varepsilon = n^*$, τ — угол наклона линии $n = n^*$ к направлению невозмущенного потока) аппроксимирующая система окончательно записывается в виде

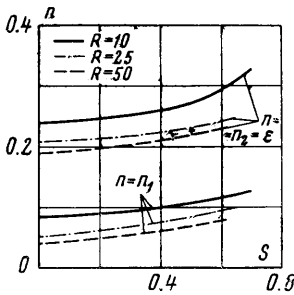
$$S(z, s) dz / ds = \mathbf{b}(z, s) \quad (2.2)$$

где S — матрица, \mathbf{b} — вектор правых частей, \mathbf{z} — вектор, компонентами которого будут искомые функции $u_i, v_i, p_i, h_i, a, \varepsilon, \tau$ ($i = 1, \dots, N$); индекс означает номер полосы, считая от тела ($u_0 = v_0 = 0$). Давление на поверхности тела p_0 не входит в (2.2) и определяется из соотношения

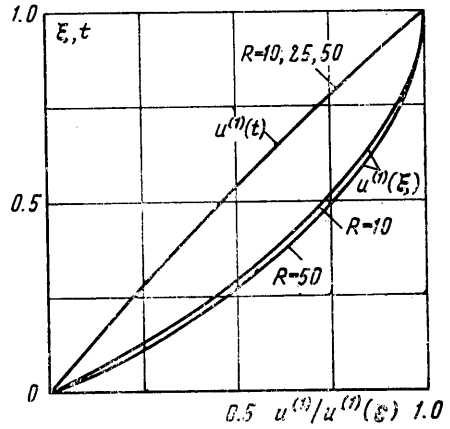
$$p_0 = \frac{\gamma - 1}{\gamma} h_0 \frac{(\rho u)^2_{t=0}}{(\rho u^2)_{t=0}}$$

Система (2.2) аналогична соответствующей системе для плоского случая и отличается от нее лишь наличием дополнительных членов главным образом в компонентах вектора \mathbf{b} ; достаточно сложные выражения для матрицы S и компонентов вектора \mathbf{b} здесь не приводятся.

Граничные условия для (2.2) при $s = 0$ вытекают из условий симметрии (1.3). После представления составляющих вектора \mathbf{z} в виде рядов по четным и нечетным степеням s уравнения (2.2) переходят в системы алгебраических уравнений относительно коэффициентов разложения. Эти системы оказываются незамкнутыми; в N -м приближении остаются неопределенными N параметров. Неизвестные параметры находятся из условий регулярности в N особых точках тех же, что и в плоском случае [1]. Таким образом, для системы (2.2) возникает краевая задача; при ее решении производилось многократное интегрирование уравнений от оси симметрии с проверкой выполнения условий в особых точках. Отход от



Фиг. 2



Фиг. 3

оси симметрии осуществлялся при помощи первых членов разложений в окрестности $s = 0$ после того, как задавались параметры $a(0)$, $\epsilon(0)$ при $N = 2$ и $a(0)$, $\epsilon(0)$, $v_j(0)$ ($j = 2, \dots, N - 1$) при $N > 2$.

3. При проведении расчетов на ЭЦВМ использовалась программа для произвольного номера приближения ($N \geq 2$); сходимость метода не исследовалась и все данные получены для $N = 2$. Предполагалось, что вязкость меняется по закону $\mu = h^{1/2}$.

Принимались следующие параметры невозмущенного потока: $M_\infty = 10$, $\sigma = 0,72$; $\gamma = 7/5$, кроме того, для сравнения с результатами работы [4] в одном случае использовалось значение $\nu = 5/3$. Соответствие между физической плоскостью и плоскостью (s, t) видно из фиг. 2, где для различных значений чисел R приведены границы полос $n_j(s)$, определенные линиями $t_j = j/N$ ($j = 1, 2$).

Для сравнения профилей продольной скорости в фиктивной и физической плоскостях на фиг. 3 представлены зависимости $u^{(1)}(t)$ и $u^{(1)}(\xi)$ ($u^{(1)}$ — коэффициент в разложении $u = u^{(1)}s + O(s^3)$, определяющий характер изменения скорости и в большей части области интегрирования). В соответствии с целями преобразования (2.1), функция $u(t)$ близка к линейной и в рассматриваемом диапазоне чисел R имеет универсальный характер.

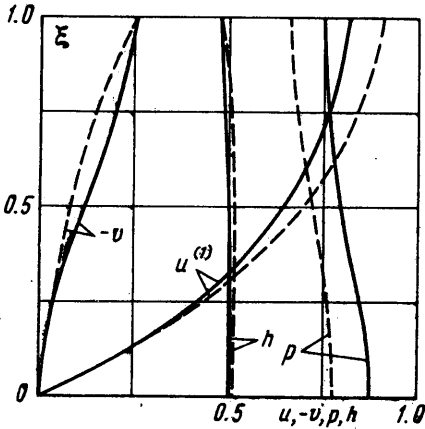
Типичное распределение параметров течения вдоль оси симметрии показано на фиг. 4 ($\gamma = 5/3$, $R = 20$); там же пунктирными линиями изображены данные приближенной теории [4] для случая теплоизолированной поверхности, полученные приблизительно при тех же значениях чисел R и σ ($M_\infty = 10$, $\nu = 5/3$, $\mu = h^{1/2}$).

Ввиду различия толщины ударного слоя (в данной работе $\epsilon \approx 0,3$, в [4] $\epsilon \approx 0,2$, если под ϵ во втором случае понимать расстояние, на котором скорость v совпадает с величиной $v(\epsilon)$ в первом случае) вместо координаты n использовалась $\xi = n/\epsilon$.

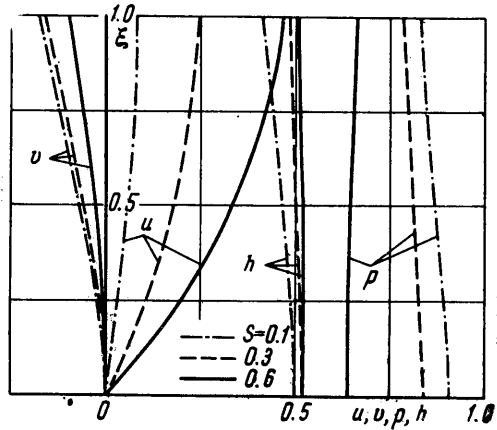
Типичное изменение параметров течения вдоль нормали к поверхности при различных значениях s приведено на фиг. 5 ($R = 10$); все распределения по n так же, как и при $s = 0$, получены при помощи интерполяционных полиномов.

Расчеты показали, что с уменьшением числа R форма профилей скорости, давления и энтальпии меняется незначительно: основное влияние разреженности среды проявляется в существенном увеличении толщины ударного слоя. На фиг. 6 представлено изменение давления, энтальпии и трения на поверхности сферы в виде функций $p_0(s)/p_0(0)$, $h_0(s)$ и $c_f(s)$ ($c_f = 1/R(\mu \partial u / \partial n)_{n=0} = \mu_0 \Phi_0 / R$). Там же пунктиром нанесены кривые, соответствующие предельным случаям $R = \infty$ (давление на сфере в потоке идеального газа, $M_\infty = 10$, $\gamma = 1.4$ [8]) и $R = 0$ (коэффициент трения в свободномолекулярном потоке c_f^0 , диффузное отражение, коэффициент аккомодации равен 1).

Рассмотрим функцию $p_0(s)$; как видно из фиг. 6, отношение $p_0(s) / p_0(0)$ слабо зависит от числа Рейнольдса и не сильно отличается от своего значения в потоке идеального газа. Однако величина $p_0(0)$ при малых значениях R начинает интенсивно



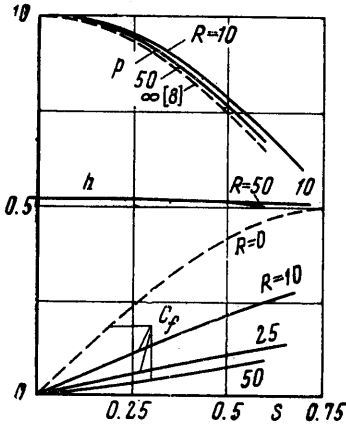
Фиг. 4



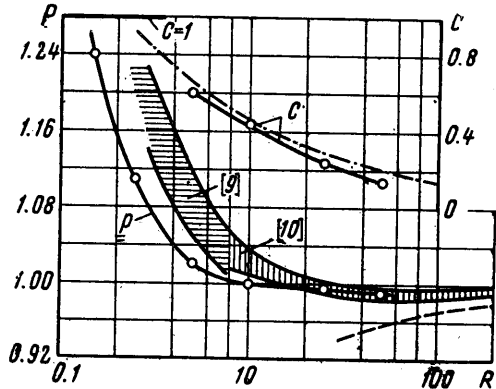
Фиг. 5

возрастать с увеличением разреженности среды. На фиг. 7 приведена зависимость $p_0(0) / p_{0i} = P(R)$ вместе с экспериментальными данными [9, 10] (заштрихованные области); здесь p_{0i} — значение $p_0(0)$ в случае идеального газа. Пунктирной линией отмечены результаты, полученные в работе [4] при $\gamma = 5/3$.

Расчетные значения P при $10 \leq R \leq 50$ оказываются несколько меньшими 1, что соответствует экспериментально установленному факту [10]; при $R < 10$ теоретичес-



Фиг. 6



Фиг. 7

кая кривая имеет ту же форму, что и экспериментальная зависимость, однако проходит немного левее последней (возможно, принятые в данной работе и измеренные числа Рейнольдса неэквивалентны). При пересчете чисел Рейнольдса из [10] использовался закон $\mu \sim h^\omega$, $\omega = 1/2$; в случае $\omega > 1/2$ экспериментальные точки фиг. 7 сдвигаются влево, и соответствие между теоретическими и экспериментальными данными оказывается лучшим. Отметим, что расчетные данные хорошо аппроксимируются однопараметрической кривой, проходящей при $R = 0$ через значение P в свободномолекулярном потоке ($P(0) = 1.64$ при $\gamma = 7/5$):

$$P \approx 0.99 + (P(0) - 0.99) \exp(-0.65R)$$

Зависимость коэффициента трения от числа Рейнольдса можно характеризовать величиной $C = (c_t / c_t^0)_{s=0}$; функция $C(R)$ приведена на фиг. 7; там же штрихпунктиром нанесена кривая $C = 1.47R^{-1/2}$ для пограничного слоя на затупленном теле, полученная при $\gamma = 7/5$ по формулам, использованным в работе [3]. Отметим, что

если интересоваться величинами $p_0(0)$, достаточно осуществить лишь грубый подбор задаваемых в начале счета параметров. Например, как показали численные эксперименты, $\partial p_0(0) / \partial \varepsilon(0) \approx 0.1$ и $\partial p_0(0) / \partial a(0) \approx 0.001$ ($1 \leq R \leq 50$). Этот факт использовался для построения теоретической кривой $P(R)$ на фиг. 7 при $R < 5$.

Поступило 3 II 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Толстых А. И. О численном расчете сверхзвукового обтекания затупленных тел потоком вязкого газа. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1966, т. 6, № 1, стр. 113—120.
2. Белоцерковский О. М. и др. Обтекание затупленных тел сверхзвуковым потоком газа. Тр. ВЦ АН СССР, 1966.
3. Но Н. Т., Пробштейн Р. F. The compressible viscous layer in rarefied hypersonic flow. Rarefied gas dynamics, Academic Press, 1961, p. 525—552.
4. Иосихара Х., Левинский Е. Обтекание сферы гиперзвуковым потоком разреженного газа. Изд. «Мир», 1964, стр. 58.
5. Cheng H. K. The blunt-body problem in hypersonic flow at low Reynolds number. JAS paper, 1963, p. 63—92.
6. Дородницын А. А. Об одном методе численного решения некоторых нелинейных задач аэродинамики. Тр. III Всесоюз. матем. съезда, 1956, т. 3, Изд-во АН СССР, 1958.
7. Белоцерковский О. М. Симметричное обтекание затупленных тел сверхзвуковым потоком совершенного и реального газа. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1962, т. 2, № 6, стр. 1062—1085.
8. Белоцерковский О. М. Расчет обтекания осесимметричных тел с отходящей ударной волной. ВЦ АН СССР, 1961.
9. Сухнев В. А. Об определении поправок к показаниям насадков полного напора в сверхзвуковом потоке разреженного газа. Изв. АН СССР. Механика и машиностроение, 1964, № 5.
10. Potter J. L. The transitional rarefied flow Regime. Paper presented at the Fifth international Symposium an Rarefied gas Dynamics, Oxford, England, 1966, July 4—8.

МЕТОД РАСЧЕТА ДВУМЕРНЫХ СВЕРХЗВУКОВЫХ ТЕЧЕНИЙ ХИМИЧЕСКИ РЕАГИРУЮЩЕГО НЕВЯЗКОГО ГАЗА

В. В. МИХАЙЛОВ (Москва)

В работе предложен численный метод расчета плоских и осесимметричных равновесных сверхзвуковых течений химически реагирующего невязкого газа.

Метод аналогичен методу интегральных соотношений при кусочной аппроксимации подинтегральных функций, но в качестве линий, разбивающих поле потока на полосы, в нем используются линии тока.

Число «полос» не влияет на вид аппроксимирующих уравнений и может быть выбрано любым.

Обозначения

x — координаты точки	u, v — составляющие скорости
a — скорость звука	p — давление
ρ — плотность	T — температура
r_k — координата y для k -той линии тока	h — энтальпия единицы массы газа
σ — угол наклона скачка уплотнения	R — координата y скачка уплотнения

Величина ν принимает значения 0 и 1 соответственно в плоском и осесимметричном случаях. Индексы ∞ означают значения в невозмущенном потоке; s — значения непосредственно за скачком уплотнения; $1, 2, \dots, k$ — значения на линиях тока.

§ 1. Рассмотрим плоское или осесимметричное течения около удлиненного тела. Направим ось x декартовой или цилиндрической системы координат вдоль направления набегающего потока.

Уравнения количества движения и неразрывности для равновесного течения невязкого газа можно записать в следующем дивергентном виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} [y^\nu (\rho u^2 + p)] + \frac{\partial}{\partial y} (y^\nu \rho uv) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} (y^\nu \rho uv) + \frac{\partial}{\partial y} [y^\nu (\rho v^2 + p)] &= \nu r y^{\nu-1}, \quad \frac{\partial}{\partial x} (y^\nu \rho u) + \frac{\partial}{\partial y} (y^\nu \rho v) = 0 \end{aligned} \quad (1.1)$$