

О СВЕРХЗВУКОВОМ ОБТЕКАНИИ ЗАТУПЛЕННЫХ ТЕЛ ПРИ НАЛИЧИИ БЫСТРЫХ НЕРАВНОВЕСНЫХ ПРОЦЕССОВ

В. П. СТУЛОВ, Л. И. ТУРЧАК

(Москва)

При численном интегрировании системы уравнений релаксационной газовой динамики решение может стать неустойчивым. Неустойчивость возникает в тех условиях, когда характерное время неравновесного процесса становится меньше характерного времени течения. Для обеспечения устойчивости приходится уменьшать шаг интегрирования. По мере приближения к равновесным условиям, когда скорость процесса возрастает, уменьшение шага может привести к необозримому времени вычислений. В предыдущих работах указанная трудность при решении одномерных [1-3] и двумерных [4] задач преодолевалась различными способами, основная идея которых сводится к использованию неявных разностных схем для аппроксимации уравнений релаксации.

В настоящей статье аналогичные соображения использованы для разработки схемы расчета сверхзвукового обтекания затупленных тел с быстрыми неравновесными процессами в рамках метода работы [5]. В качестве основной системы координат для аппроксимации уравнений применяются координаты ξ , θ , как и в [5]. Однако релаксационное уравнение решается вдоль элемента линии тока. Проведены расчеты обтекания сферы воздухом с учетом реакции диссоциации кислорода. Проверена справедливость закона бинарного подобия для этой модели. В качестве примера применимости метода проведен расчет обтекания сферы химически реагирующей смесью с тепловыделением.

§ 1. Численный метод. Система уравнений

$$\nabla \rho v = 0, \quad (v \cdot \nabla) v + \rho^{-1} \nabla p = 0, \quad v \cdot \nabla p - a^2 \rho v \cdot \nabla \rho = \gamma p \phi \omega, \quad v \nabla q = \omega \quad (1.1)$$

описывает стационарное движение релаксирующего газа. Функция ϕ выражает затраты тепловой энергии на поддержание неравновесного процесса. Скорость неравновесного процесса ω можно приближенно представить в виде

$$\omega = \tau^{-1}(q_e - q) \quad (1.2)$$

где q_e — локально равновесное значение параметра q . В безразмерных переменных величина τ представляет собой отношение времени релаксации к характерному времени течения. Основную трудность при решении конкретных задач представляет численное интегрирование последнего уравнения системы (1.1). В работах [6, 7] при решении задач об обтекании сферы система (1.1) сведена к системе обыкновенных дифференциальных уравнений, которая затем решается методом Рунге — Кутты. При малых τ (в работах [6, 7] это соответствовало достаточно большим значениям произведения $p_\infty R$, где p_∞ — давление перед ударной волной, R — радиус сферы) требования устойчивости приводили к быстрому уменьшению шага интегрирования и, следовательно, — к резкому увеличению времени счета.

В настоящей работе применяется другая разностная схема для аппроксимации последнего уравнения (1.1), позволяющая получить устойчивое решение при любых τ .

Рассмотрим задачу о сверхзвуковом обтекании затупленного тела. Введем сферическую систему координат r , θ . Область между ударной волной и поверхностью тела преобразуем в полосу путем перехода к новым переменным ξ , θ , используя соотношение

$$\xi = \frac{r - r_b(\theta)}{r_s(\theta) - r_b(\theta)} \quad (1.3)$$

Уравнение ударной волны $r = r_s(\theta)$ определяется в результате решения задачи. В новых переменных в ударном слое $0 \leq \xi \leq 1$. В области $\theta > 0$ (в исходных переменных это соответствует верхней части меридиональной плоскости течения) проводим n лучей $\theta = \text{const}$. Все газотермодинамические параметры аппроксимируются по их значениям на лучах в виде полиномов степени $2n$ — для четных функций и степени $2n + 1$ — для нечетной функции v (окружная скорость)

$$f = \sum_{j=0}^n f_j \theta^{2j}, \quad v = \sum_{j=0}^n v_j \theta^{2j+1} \quad (1.4)$$

Формулы (1.4) позволяют выразить производные искомых функций по θ через их значения на лучах. Потребовав выполнения системы (1.1), записанной в координатах (ξ, θ) , на всех лучах и выражая производные по θ через значения функций на лучах, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений с переменной ξ (см., например, работу [6]).

Уравнение релаксации в переменных ξ, θ имеет вид (в обозначениях работы [6])

$$q_{\xi} = A^{-1}(\varepsilon\omega - avq') \quad (1.5)$$

Объединяя производные по ξ и θ , перепишем (1.5) в виде

$$q_{\xi} + avA^{-1}q' = dq/ds = \varepsilon\omega/A \quad (1.6)$$

Производная по s — вдоль линии тока. Для удобства изложения выпишем в символической форме остальные уравнения, разрешенные относительно производных по ξ

$$u_{\xi} = f_1(u, v, p, \rho, q), v_{\xi} = f_2, p_{\xi} = f_3, \rho_{\xi} = f_4 - a_1q_{\xi} \quad (1.7)$$

В (1.7) производная q_{ξ} входит только в последнее уравнение.

На фиг. 1 изображен элемент разностной сетки, применявшейся для решения системы (1.6)–(1.7). Для наглядности ячейка сетки представлена в сферических переменных r, θ ; AF, BE, CD — элементы линий $\theta = \text{const}$ (лучей); AC, FD — линий $\xi = \text{const}$; AF, SE, HD — элементы линий тока. Сетка (ξ, θ) фиксируется заранее.

Пусть на слое $\xi = \xi_n$ (AC) все параметры u, v, p, ρ, q известны. Опишем алгоритм расчета параметров на слое FD .

Для решения системы (1.6), (1.7) применяется метод итераций. Изложим порядок выполнения k -й итерации. Напомним, что перед началом k -й итерации известно точное распределение параметров на слое $\xi = \xi_n$ (AC) и $k-1$ -е приближение для значений параметров на слое $\xi = \xi_{n+1}$ (FD).

Вначале интегрируется уравнение (1.6). Для его решения используется метод Эйлера с перерасчетом

$$(1.8)$$

$$(q_{n+1} - q_n) / \Delta s = \frac{1}{2} [A_n^{-1} \varepsilon_n \omega(p_n, \rho_n, q_n) + (A_{n+1}^{k-1})^{-1} \varepsilon_{n+1} \omega(p_{n+1}^{k-1}, \rho_{n+1}^{k-1}, q_{n+1})]$$

(верхний индекс $k-1$ указывает, что эти параметры известны в $k-1$ -м приближении).

Для определения q_{n+1} из (1.8) нужно знать следующее: 1) величину шага Δs (отрезок HD); 2) значение параметров $p_n, \rho_n, q_n, \varepsilon_n, A_n$ в точке H . Для решения этих двух вопросов достаточно определить θ_H . Эта величина находится при помощи уравнения для функции тока ψ

$$d\psi/ds = \varepsilon r v \sin \theta \quad (1.9)$$

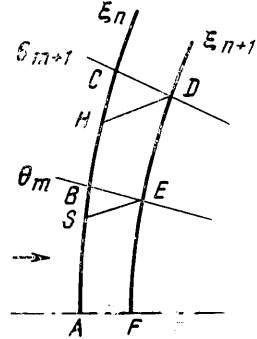
которое интегрируется совместно с системой (1.7). Координата θ_H находится из условия

$$\psi(\xi_H, \theta_H) = \psi^{k-1}(\xi_{n+1}, \theta_{m+1}) \quad (1.10)$$

Так как функция тока на слое $\xi = \text{const}$, как и другие переменные, аппроксимируется в виде полинома четвертой степени (для трехлучевой схемы), то определение θ_H из (1.10) сводится к решению биквадратного уравнения. Очевидно, при выполнении первой итерации следует положить $p_{n+1}^{k-1} = p_n$ и т. д. Зная θ_H , находим Δs :

$$\Delta s = [\Delta \xi^2 + (\theta_{m+1} - \theta_H)^2]^{1/2} \quad (1.11)$$

и значения всех параметров в точке H , подставляя в соответствующие полиномы значения аргумента $\theta = \theta_H$. После этого решение уравнения (1.8) дает k -е приближение значения q в узле $(\xi_{n+1}, \theta_{m+1})$. Уравнение (1.8) решается методом Ньютона. Аналогичным способом находится q_{n+1}^k во всех узлах слоя $\xi = \xi_{n+1}$. Подчеркнем, что при использовании линий тока расчет релаксационных параметров в каждом узле $n+1$ -го слоя происходит независимо от других узлов этого же слоя.



Фиг. 1

После нахождения q_{n+1}^k на отрезке $\Delta\xi$ решается система (1.7), (1.9). Для ее решения используется метод Рунге — Кутты. При этом распределение q на $\Delta\xi$, необходимое для решения (1.7), (1.9), представляется в виде линейной функции

$$q = q_n + (q_{n+1}^k - q_n)(\xi - \xi_n) / \Delta\xi \quad (1.12)$$

В результате решения находится k -е приближение для u, v, p, ρ, ψ на слое $\xi = \xi_{n+1}$. Итерации продолжают до тех пор, пока относительная разность двух соседних приближений не станет меньше заданной величины. После этого следует переходить к расчету параметров на $n+2$ -м слое.

Как было отмечено в [6, 7], при подходе к поверхности тела в системе уравнений (1.7) появляются малые знаменатели. Поэтому значения параметров на поверхности тела, т. е. при $\xi = 0$, находятся посредством квадратичной экстраполяции с некоторого расстояния $\Delta\xi^*$.

Алгоритм подбора положения ударной волны для удовлетворения граничного условия непроницаемости полностью аналогичен использованному ранее [5-7].

§ 2. Расчет обтекания сферы воздухом с учетом диссоциации кислорода. В работе [6] было показано, что в ограниченном диапазоне условий движения модель неравновесного воздуха может быть существенно упрощена. В данной работе в качестве первого применения изложенного в § 1 численного метода было исследовано обтекание сферы воздухом при учете одного неравновесного процесса — диссоциации кислорода. Таким образом, воздух рассматривался как смесь трех компонент: N_2, O_2, O , в которой происходит одна химическая реакция



Колебательные степени свободы N_2 и O_2 возбуждены равновесно. Такая модель воздуха пригодна для приближенного анализа неравновесного обтекания в диапазоне чисел M набегающего потока от 10 до 15.

Концентрация азота $\gamma(N_2)$ остается постоянной. Используется только одно уравнение типа четвертого уравнения (1.1) для $\gamma(O)$, так как $\gamma(O_2)$ выражается через $\gamma(O)$ и $\gamma(N_2)$:

$$\gamma(O_2) = [1 - \gamma(O)m(O) - \gamma(N_2)m(N_2)] / m(O_2) \quad (2.2)$$

Скорость реакции (2.1) записывается в виде

$$\omega = \rho \sum_x k_r(X) \gamma(X) (K_e \gamma(O_2) - \rho \gamma^2(O)) \quad (2.3)$$

где константа скорости рекомбинации $k_r(X)$ зависит от третьей частицы X в правой части (2.1). Константы $k_r(X)$ и константа равновесия K_e были взяты из [6].

При формулировке граничных условий на ударной волне следует учитывать, что колебательные степени свободы молекул возбуждены равновесно. Вычисление параметров за волной сводится к решению одного трансцендентного уравнения для температуры

$$(\lambda t + T_s)^2 - (1 - \lambda)^2 t = 0, \quad t = 1 + 2(h_\infty - h_s) / \lambda \quad (2.4)$$

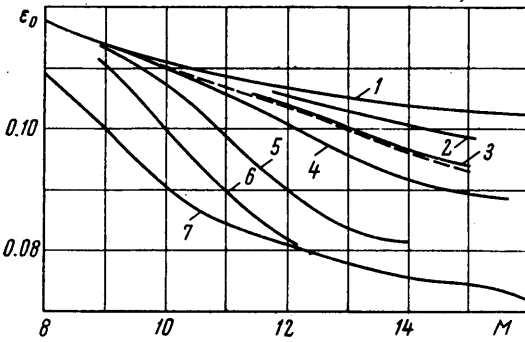
$$\lambda = \gamma_\infty M^2 \sin^2 \sigma_s, \quad h_s = h(T_s)$$

Здесь σ_s — угол наклона ударной волны.

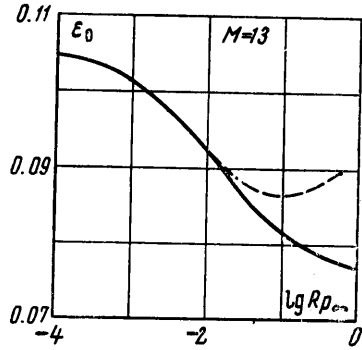
Приведем некоторые результаты расчетов обтекания сферы воздухом с использованием указанной выше модели. Зависимость отхода ударной волны вдоль оси симметрии ϵ_0 от числа M при различных значениях p_∞ приведена на фиг. 2. Кривая 1 изображает $\epsilon_0(M)$ в предположении, что в ударном слое колебательные степени свободы возбуждены равновесно, а реакция (2.1) заморожена; кривая 7 относится к полностью равновесному обтеканию сферы воздухом при $p_\infty = 10^{-2}$ атм. Кривые 2-6 дают значения отхода волны при неравновесном обтекании для $p_\infty = 10^{-5}, 3 \cdot 10^{-5}, 10^{-4}, 10^{-3}, 10^{-2}$ атм соответственно. Все расчеты проведены для $R = 50$ см, $T_\infty = 250^\circ$ К. Пунктирная кривая на фиг. 2 изображает функцию $\epsilon_0(M)$ при $p_\infty = 3 \cdot 10^{-5}$ атм, полученную в [6] с использованием более сложной модели неравновесного воздуха, нежели в настоящей работе. Сравнение с кривой 3 подтверждает справедливость сделанных упрощений. Кривые несколько расходятся при $M = 15$, где начинает влиять диссоциация азота. Очевидно, что применение новой схемы решения релаксационного уравнения позволило существенно расширить, по сравнению с [6], диапазон решений в сторону околоравновесных условий.

Известно [6], что для неравновесного течения воздуха приближенно справедлив закон бинарного подобия, состоящий в том, что характерный размер и характерное давление входят в безразмерные определяющие параметры только в произведении Rp_∞ . Нарушение бинарного подобия связано с увеличением роли процессов рекомбинации в тройных столкновениях и имеет место в околоравновесных условиях. Для

иллюстрации этого закона на фиг. 3 приведена зависимость отхода волны ϵ_0 от $\lg Rp_\infty$ при $M = 13$. Сплошная кривая получена для $R = 50$ см, пунктирная — для $R = 0.5$ см. По мере приближения к равновесию кривые быстро расходятся. Увеличение отхода с ростом p_∞ (пунктирная кривая) связано с изменением практически уже равновесного течения.



Фиг. 2

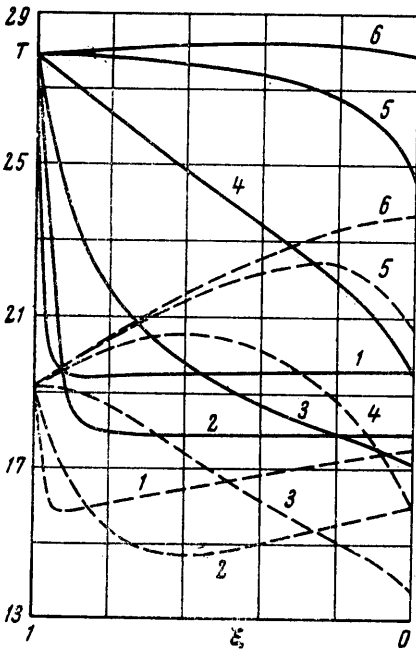


Фиг. 3

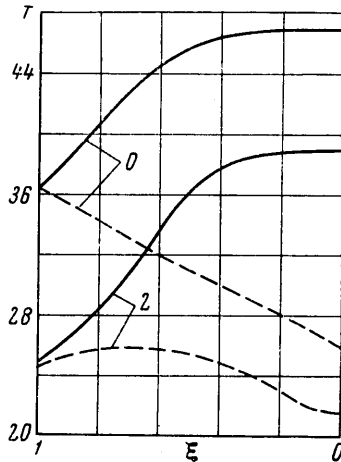
Распределение температуры вдоль оси симметрии (сплошные линии) и вдоль луча $\theta = 0.75$ (пунктирные линии) для $M = 13$, $R = 50$ см представлено на фиг. 4.

Кривые 1–6 относятся к давлению перед волной $p_\infty = 10^{-1} - 10^{-6}$ атм. Из графиков видно, что проведенные расчеты охватывают весь диапазон течения — от равновесного до замороженного.

Для расчета чисто равновесного обтекания (при больших Rp_∞) без области резких изменений вблизи волны (см. кривые 1, 2), следует видоизменить граничное условие (2.4): функцию h



Фиг. 4



Фиг. 5

нужно вычислить для равновесно диссоциирующего воздуха. Следует отметить, что при расчете изложенным выше методом отклонение от равновесия может быть получено не только вблизи ударной волны, но и в области расширения потока.

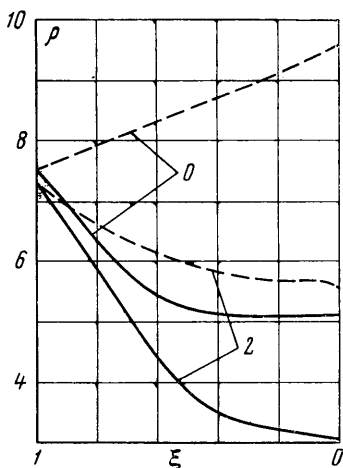
§ 3. Пример расчета обтекания сферы газом, в котором идет реакция с выделением тепла. В связи с большим интересом к проблемам сверхзвукового горения имеет смысл попытаться применить развитый выше метод к расчету обтекания затупленных тел газовой смесью с эндотермическими реакциями. Из опыта решения одно-

мерных задач движения таких смесей известно [3], что применение к ним обычного метода Рунге — Кутты не приводит к успеху. В самом деле, для газовых реакций с выделением тепла характерны этапы бурного протекания, в которых реакция носит лавинный характер (в предельном случае эти этапы образуют весьма узкие фронты горения). Обычно этот лавинный этап следует за медленным этапом, в котором происходит накопление активных центров реакции.

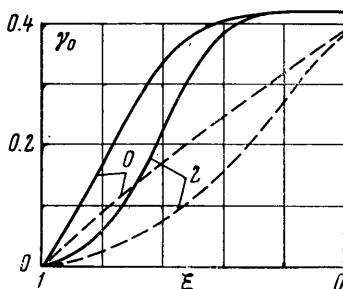
С целью проверки работоспособности метода в качестве простейшей модели была использована модель диссоциирующего воздуха, описанная в предыдущем разделе, с той разницей, что знак теплового эффекта реакции $h^\circ(O)$ был изменен на обратный.

Конечно, такая модель не соответствует никакой реальной горючей смеси, однако решение позволяет выявить основные свойства сверхзвукового обтекания с выделением тепла в химической реакции.

Был проведен расчет обтекания сферы при $M = 15$, $p_\infty = 10^{-3}$ атм,



Фиг. 6



Фиг. 7

$R = 1.5$ см, $T_\infty = 250^\circ$ К. Распределения температуры, плотности и концентрации продукта реакции вдоль оси симметрии (индекс O) и второго луча (индекс 2) приведены на фиг. 5—7. Там же пунктиром для сравнения указаны те же самые распределения для указанного выше варианта обтекания сферы с обычной реакцией диссоциации, идущей с поглощением тепловой энергии.

Отметим прежде всего существенное сокращение области неравновесного протекания реакции в случае выделения тепла по сравнению с реакцией диссоциации. Если в последнем случае газ во всем ударном слое (за исключением критической точки) находится в неравновесном состоянии, то при учете тепловыделения область неравновесности занимает лишь половину слоя, примыкающую к ударной волне. Распределение температуры и плотности на участке между серединой слоя и поверхностью тела носит такой же характер, как в случае равновесного обтекания (температура и плотность вдоль оси симметрии несколько увеличиваются за счет торможения). Убыстрение реакции связано, очевидно, с более высокой температурой в слое, чем в случае диссоциации. Увеличение скоростей реакций с ростом температуры является весьма общим свойством.

Из графика распределения продуктов реакции (фиг. 7) следует, что на крайнем луче область наиболее интенсивного протекания реакции отстоит от ударной волны несколько дальше, чем на оси симметрии.

В случае реакции с тепловыделением ударная волна отстоит от сферы существенно дальше (отход волны вдоль оси $\epsilon_0 = 0.14229$), чем при реакции диссоциации в слое ($\epsilon_0 = 0.09447$).

Характерная для процессов горения задержка области бурного протекания реакции в данном примере отсутствует, поскольку она связана с целным механизмом протекания реакций и соответствует медленному процессу накопления активных центров реакции горения. В использованной здесь простейшей модели цепной механизм не предусмотрен, поэтому реакция горения начинается сразу же за ударной волной. Очевидно, при увеличении параметра Rp_∞ изменение параметров от ударной волны будет более крутым.

ЛИТЕРАТУРА

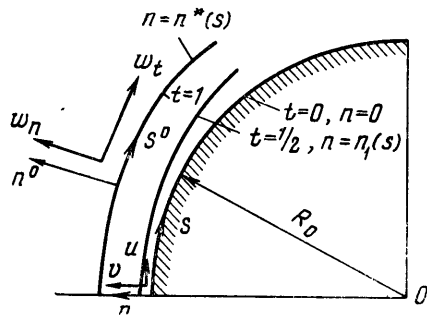
1. Галюн Н. С., Крайко А. Н. К расчету неравновесных течений. Изв. АН СССР. Механика и машиностроение, 1964, № 6.
2. Пирумов У. Г., Камзолов В. Н. Расчет неравновесных течений в соплах. Изв. АН СССР. МЖГ, 1966, № 6.
3. Моретти. Новый метод расчета неравновесных течений. Ракетная техника и космонавтика, 1965, № 2.
4. Громов В. Г. Химически неравновесный пограничный слой в диссоциированном воздухе. Изв. АН СССР. МЖГ, 1966, № 2.
5. Гилинский С. М., Теленин Г. Ф., Тиняков Г. П. Метод расчета сверхзвукового обтекания затупленных тел с отошедшей ударной волной. Изв. АН СССР. Механика и машиностроение, 1964, № 4.
6. Стулов В. П., Теленин Г. Ф. Неравновесное обтекание сферы сверхзвуковым потоком воздуха. Изв. АН СССР. Механика, 1965, № 1.
7. Стулов В. П., Турчак Л. И. Обтекание сферы сверхзвуковым потоком воздуха с учетом колебательной релаксации. Изв. АН СССР. МЖГ, 1966, № 5.

ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЕТ ТЕЧЕНИЯ В ОБЛАСТИ СФЕРИЧЕСКОГО ЗАТУПЛЕНИЯ ПРИ МАЛЫХ ЧИСЛАХ РЕЙНОЛЬДСА

В. С. ГОРИСЛАВСКИЙ, А. И. ТОЛСТЫХ

(Москва)

В [1, 2] рассматривалась задача об обтекании двумерных тел (в частности, кругового цилиндра) сверхзвуковым потоком вязкого газа. Ниже приводятся некоторые результаты для случая осесимметричных затупленных тел, полученные при помощи того же метода. Расчеты проводились с целью определения аэродинамических характеристик течения при малых числах Рейнольдса; предполагалось, что уравнения механики сплошной среды остаются справедливыми. В случае достаточно малых чисел Рейнольдса, когда могут быть нарушены условия применимости данного метода, полученные численные результаты естественно рассматривать как формальные. Существуют приближенные подходы к исследованию вязкого течения в области затупления ([3-5] и др.); в тех случаях, когда это оказывается возможным, производится сравнение с некоторыми из этих теоретических результатов, а также с экспериментальными данными.



Фиг. 1

1. Рассматривается симметричное обтекание затупленного тела вращения сверхзвуковым потоком вязкого совершенного газа. Как и в [1], исходная система уравнений интегрируется в полосе конечной ширины $0 \leq n \leq n^*(s)$, где s, n — ортогональные координаты, связанные с поверхностью тела (s отсчитывается от критической точки вдоль контура, n — вдоль нормали к поверхности, фиг. 1). Эта система, отличающаяся от системы уравнений Навье — Стокса отсутствием некоторых членов, имеющих порядок $O(1/R)$ и выше, имеет вид

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial}{\partial s}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial n}(H \rho v) + j \left(\frac{\rho u}{r} \frac{\partial r}{\partial s} + \frac{H \rho v}{r} \frac{\partial r}{\partial n} \right) = 0 \\
 & \rho u \frac{\partial u}{\partial s} + H \rho v \frac{\partial u}{\partial n} + k \rho u v = - \frac{\partial p}{\partial s} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial n} \left(\mu H \frac{\partial u}{\partial n} \right) - \\
 & - \frac{k}{R} \frac{\partial}{\partial n} (\mu u) + \frac{k \mu}{R} \frac{\partial u}{\partial n} + j \frac{\mu H}{R r} \frac{\partial r}{\partial n} \frac{\partial u}{\partial n} \\
 & \rho u \frac{\partial v}{\partial s} + H \rho v \frac{\partial v}{\partial n} - k \rho u^2 = - H \frac{\partial p}{\partial n} + \frac{4}{3R} \frac{\partial}{\partial n} \left(\mu H \frac{\partial v}{\partial n} \right) -
 \end{aligned} \tag{1.1}$$