

ОБ ОБРАЗОВАНИИ СКАЧКОВ УПЛОТНЕНИЯ У ГРАНИЦЫ ЗВУКОВОЙ СТРУИ

Ю. Б. ЛИФШИЦ (Москва)

Автомодельные решения уравнений трансзвуковой газодинамики дают возможность построить течение в окрестности точки звукового контактного разрыва, в которой возникает скачок уплотнения. Результаты работ [1-3] показывают, что если звуковая линия не является контактными разрывом, то скачок уплотнения может возникнуть на ней только при отражении достаточно сильной особенности в производных вектора скорости. Такое течение может осуществляться лишь у тел специальной формы. В исследуемом ниже случае зарождение ударной волны не является следствием отражения разрывов в производных, а течение такого типа может возникнуть при обтекании произвольных гладких тел.

В этом смысле оно является асимптотическим течением в изучаемой окрестности звуковой линии тока.

Рассмотрим смешанное до- и сверхзвуковое обтекание профиля плоской звуковой струей (фиг. 1). Допустим, что образующаяся в потоке звуковая линия MN пересекает все линии тока и достигает границы струи. Сверхзвуковая область между обтекаемым профилем и границей струи должна замыкаться еще одной звуковой линией PQ . Можно показать, что к течению в полученной сверхзвуковой зоне $MNPQ$ применима теория А. А. Никольского и Г. И. Таганова [4] о несуществовании непрерывного течения при спрямлении сколь угодно малого отрезка профиля. Действительно, результат работы [4] следует только из теоремы о монотонном изменении угла наклона вектора скорости при движении вдоль звуковой линии и несуществовании течения типа простой волны в ограниченной сверхзвуковой области. Обе эти теоремы имеют место и в рассматриваемом случае. Следствием является неустойчивость непрерывного обтекания профиля звуковой струей. Поэтому построение течения в окрестности точки возникновения скачка уплотнения в таком потоке представляет определенный интерес.

Пусть скачок уплотнения возникает на границе звуковой струи. Поместим в эту точку начало координат, ось x направим вдоль линии тока, а ось y — перпендикулярно к ней (фиг. 2). Течение описывается системой уравнений трансзвуковой газодинамики

$$\begin{aligned} -u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \quad (1)$$

в которых координаты x и y считаются безразмерными, а безразмерные функции u и v пропорциональны составляющим вдоль осей x и y вектора возмущенной скорости частиц [5].

Разрывные решения системы уравнений (1) описывают течение со скачками уплотнения, на фронте которых нужно удовлетворить уравнению ударной поляры [6]

$$2(v_2 - v_3)^2 = (u_2 - u_3)^2 (u_2 + u_3) \quad (2)$$

и соотношению [6]

$$u_2 dx_2 / dy + v_2 = u_3 dx_2 / dy + v_3 \quad (3)$$

следующему из условия непрерывности тангенциальной составляющей вектора скорости. В равенствах (2) и (3) индексы относятся к величинам по разные стороны ударного фронта, $x_2 = x_2(y)$ — уравнение, задающее его положение.

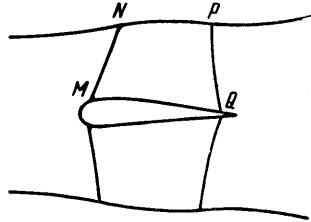
Будем искать решение задачи в классе автомодельных решений [7] исходной системы (1)

$$u = y^{2(n-1)} f(\xi), \quad v = y^{3(n-1)} g(\xi), \quad \xi = x / y^n$$

При этом уравнение ударного фронта принимает вид обобщенной параболы $\xi = \xi_2 = \text{const}$.

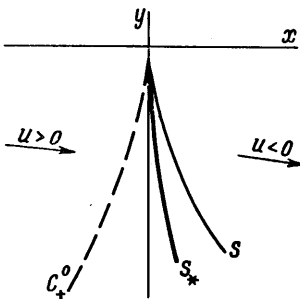
Подстановка написанных формул в уравнения (1) и исключение из полученных соотношений функций g приводят к дифференциальному уравнению второго порядка для определения f

$$(f - n^2 \xi^2) \frac{d^2 f}{d\xi^2} + \left(\frac{df}{d\xi} \right)^2 + n(3n - 5) \xi \frac{df}{d\xi} - 2(2n - 3)(n - 1)f = 0 \quad (4)$$



Фиг. 1

Для упрощения качественного исследования задачи положим [7]



Фиг. 2

$$f = \xi^2 F(\eta), \quad dF/d\eta = \Psi, \quad \eta = \ln |\xi|$$

В новых переменных порядок уравнения (4) понижается

$$\frac{d\Psi}{dF} = \frac{-6F - 5n\Psi + 6F^2 + 7F\Psi + \Psi^2}{(n^2 - F)\Psi} \quad (5)$$

Что касается граничных условий (2) и (3), то в плоскости $F\Psi$ они принимают простой вид

$$F_2 + F_3 = 2n^2, \quad \Psi_2 + \Psi_3 = -2n(7n-5) \quad (6)$$

Искомое течение имеет вдоль оси x звуковую линию, поэтому его изображением в плоскости $F\Psi$ служит интегральная кривая L , выходящая из узла $A(0, 0)$ (узел A соответствует оси x) и имеющая в нем исключительное направление. В окрестности A кривая L определяется разложением

$$\Psi = -\frac{3}{n}F - 3\frac{2n^2 - 7n + 6}{4n^3}F^2 + \frac{(2n^2 - 7n + 6)(6n^2 - 7n - 12)}{16n^5}F^3 + \dots \quad (7)$$

В дальнейшем удобно различать две ветви кривой L — ветвь L_1 , выходящую из A в правую полуплоскость, и ветвь L_2 , выходящую в левую полуплоскость $F\Psi$.

Течение перед скачком уплотнения между ним и осью x (фиг. 2) сверхзвуковое. В плоскости $F\Psi$ ему соответствует кривая L_1 . Движение вдоль L_1 из точки A приводит в особую точку $C(n^2, -n^2 - n)$, которая служит изображением выходящих из начала координат C_{\pm}^0 — характеристик.

Согласно анализу, проведенному в работе [8], при $n = 2, 3, 5$ и 11 все интегральные кривые плоскости $F\Psi$, проходящие через узел C , голоморфны в нем. При остальных значениях n голоморфным в C будет лишь один интеграл

$$\Psi = (n^2 - F)^{-1} [2F(F - n) - 2(n - 1)F^{3/2}] \quad (8)$$

Кривая (8) непригодна для построения искомого решения, так как в узле A касается обычного направления.

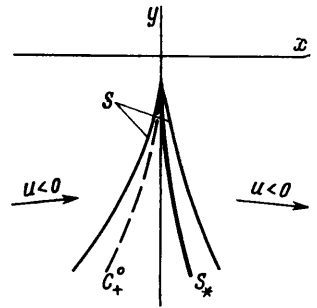
Будем рассматривать задачу лишь при указанных выше исключительных значениях n , так как только в этом случае можно пытаться построить течение, лишенное особенностей в производных скорости на приходящей характеристике C_{+}^0 , показанной на фиг. 2, там же приведена ударная волна S_* и звуковая линия S . Такое течение, как указывалось выше, возникает при обтекании произвольных гладких тел и будет асимптотическим в окрестности точки возникновения скачка уплотнения.

Течение за скачком изображается отрезком кривой L_2 , дающей дозвуковой поток у границы струи. В искомом решении кривая L_1 , аналитически продолженная через точку C в полуплоскость $F > n^2$, должна проходить через бесконечно удаленную точку E (она лежит в направлении $\Psi = -2F$ и соответствует оси y плоскости течения) и пересекать L_2^* -кривую, которая представляет состояние газа перед ударным фронтом и получается в результате применения формул (6) к кривой L_2 , изображающей течение за скачком уплотнения.

При $n = 2$ L -кривая является прямой $\Psi = -3/2F$ и не проходит через точку E . При $n = 3$ кривая L также имеет явное аналитическое выражение [9, 10]

$$\Psi = -2F - 6 \pm 2\sqrt{3}\sqrt{F+3} \quad (9)$$

и дает непрерывное решение исходных уравнений. Интеграл (9) описывает безударное течение в окрестности точки N или P фиг. 1 [11].



Фиг. 3

При $n = 5$, как показывает расчет на ЭВМ, продолжение L_1 -кривой в полуплоскость $F > n^2$ не пересекает L_2^* -кривую. Соответствующее решение имеет предельную линию и не является удовлетворительным.

При $n = 11$ кривая L_1 заключена между кривой (8) и кривой, изображающей течение в сопле Лавала [8], поэтому продолжение L -кривой в полуплоскость $F > n^2$ пересекает L_2^* -кривую. Таким образом, искомое течение существует при $n = 11$. Скорость потока в нем за скачком уплотнения сверхзвуковая, затем она убывает и становится дозвуковой (фиг. 2).

Построенное решение можно получить в параметрическом виде, если воспользоваться преобразованием годографа, позволяющим перейти от нелинейной системы (1) к линейному уравнению Трикоми для функции $y(u, v)$

$$\partial^2 y / \partial u^2 - u \partial^2 y / \partial v^2 = 0 \quad (10)$$

Вблизи границы струи при $x < 0$ искомое решение уравнения (10) имеет вид

$$y = auv^{-19/30} F\left(\frac{19}{60}, \frac{49}{60}, \frac{4}{3}; \frac{4u^3}{9v^2}\right) \quad (11)$$

Здесь $F(\alpha, \beta, \gamma; \zeta)$ означает, как обычно, гипергеометрическую функцию, и a — произвольный постоянный множитель. Дозвуковое течение у границы струи за скачком уплотнения представляется в виде

$$y = buv^{-19/30} \left(1 - \frac{4u^3}{9v^2}\right)^{-19/30} F\left(\frac{19}{60}, \frac{31}{60}, \frac{4}{3}; \frac{4u^3}{4u^3 - 9v^2}\right) \quad (12)$$

Здесь b — произвольная постоянная.

Вид решения в окрестности другой звуковой линии, предельной характеристики $v = -2/3u^{3/2}$ и линии $v = 0$ получается из равенств (11) и (12) при помощи формул аналитического продолжения гипергеометрических функций. Величина отношения b/a определяет интегральную кривую плоскости $F\Psi$, выходящую из C в полуплоскость $F > n^2$. Расчеты на ЭВМ дают в нашем случае соотношение $b = -0.705a$.

Вычисления, произведенные методом годографа, показывают, что аналитическое продолжение через узел C L_2 -кривой после прохождения точки E пересекает кривую L_2^* . Это означает, что имеет место течение, вид которого показан на фиг. 3. В нем сверхзвуковая зона ограничена двумя звуковыми линиями $\xi = \text{const}$, а решение как перед скачком уплотнения, так и за ним изображается отрезками кривой L_2 . В плоскости годографа решение при $x > 0$ и $x < 0$ дается формулой (12), но с различными значениями постоянного множителя.

Рассмотренные интегралы уравнения (5) позволяют построить еще два типа течения, которые получаются из описанных выше, если в них течение за скачком уплотнения изображается в плоскости $F\Psi$ кривой L_1 , а не L_2 . В таких потоках скорость за скачком сверхзвуковая. Второе из них является разрывным аналогом решения (9).

Автор благодарен О. С. Рыжову за ценные указания при обсуждении статьи.

Поступило 8 X 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Germain P., Gillon G. Ecoulements transsoniques an voisinage d'un point de rencontre d'une onde de choc et d'un linge sonic. 1961, Publ. O.N.E.R.A., No. 102.
2. Горьков Л. П., Питаевский Л. П. Возникновение ударной волны при отражении слабого разрыва от звуковой линии. Докл. АН СССР, 1962, т. 144, № 2.
3. Лифшиц Ю. Б. О течениях в окрестности точки встречи звуковой линии со скачком уплотнения. Инж. ж., 1965, т. 5, № 1.
4. Никольский А. А., Таганов Г. И. Движение газа в местной сверхзвуковой зоне и некоторые условия разрушения потенциального течения. ПММ, 1946, т. 10, № 4.
5. Von Karman Th. The Similarity Law of Transonic Flow. J. Math. and Phys., 1947, vol. 26, No. 3.
6. Busemann A. Die achsensymmetrische kegelige Überschallströmung. Luftfahrtforschung, 1942, B. 19, Lfg. 4.
7. Рыжов О. С. Некоторые вырожденные околосуперзвуковые течения. ПММ, 1958, т. 21, вып. 2.
8. Лифшиц Ю. Б., Рыжов О. С. Об асимптотическом типе плоскопараллельного течения в окрестности центра сопла Лавала. Докл. АН СССР, 1964, т. 154, № 2.
9. Фалькович С. В., Чернов И. А. Обтекание тела вращения звуковым потоком газа. ПММ, 1964, т. 28, вып. 2.
10. Лифшиц Ю. Б., Рыжов О. С. О некоторых точных решениях уравнений трансзвуковых течений газа. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1964, т. 4, № 5.
11. Баранцев Р. Г. Лекции по трансзвуковой газодинамике. Изд. Ленингр. ун-та, 1965.