

О ЧИСЛЕННОМ ИССЛЕДОВАНИИ ВЕТВЛЕНИЙ ПРИ СВОБОДНОЙ КОНВЕКЦИИ В ЗАМКНУТОЙ ПОЛОСТИ

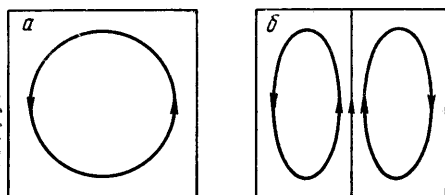
Е. Л. ТАРУНИН

(Пермь)

Если жидкость в замкнутой полости подогревается снизу, то существует, как известно, спектр критических чисел Рейля, при переходе через каждое из которых равновесие жидкости теряет устойчивость относительно малых характеристических возмущений. Судьба ветвлений, возникающих в критических точках, определяется нелинейными уравнениями конвекции.

Численное исследование нелинейных уравнений конвекции для полости квадратного сечения, проведенное в работе [1], показало, что стационарное движение, рождающееся в нижней критической точке, остается устойчивым в широком интервале чисел Рейля, начиная от первого критического R_1 до чисел R , значительно превышающих это значение.

Представляется весьма интересным исследовать численно ветвления, возникающие при переходе более высоких критических чисел R_2, R_3 и т. д. В данной работе приведены результаты численного исследования ветвления, возникающего во второй критической точке R_2 .



Фиг. 1

Рассматривается плоское движение жидкости в области, имеющей форму квадрата со стороной a . Температура на верхней горизонтальной границе принята за начало отсчета, температура на нижней границе равна θ ; на вертикальных границах температура изменяется по линейному закону

Критические числа Рейля и соответствующие критические движения жидкости определяются как собственные числа и собственные функции линейной краевой задачи для малых возмущений равновесия. Для двух нижних уровней спектра имеем (см. [1])

$$R_1 = 5099, \quad R_2 = 8495 \quad (R = g\beta\theta a^3 / \nu\chi - \text{число Рейля})$$

Соответствующие критические движения жидкости изображены схематически на фиг. 1, a и b .

Численное решение нелинейных уравнений конвекции, результаты которого приведены в [1], показало, в частности, что движение, возникающее в нижней критической точке R_1 , развивается при $R > R_1$ по закону Ландау, и для числа Нуссельта N_1 имеет место следующая зависимость от числа Грассгофа (число Прандтля P в расчетах принято равным единице, и потому числа Рейля и Грассгофа совпадают):

$$N_1 = 1 + 0.0179(G - G_1)^{1/2} \quad (1)$$

Корневой закон (1) справедлив примерно до $G = 1.5G_1$.

Предварительное исследование движения, возникающего во второй критической точке, показало, что это движение является неустойчивым. Его можно получить в результате переходного процесса лишь при специальной форме начального возмущения — типа второго критического движения — и в ограниченном интервале значений числа Грассгофа: $14 \cdot 10^3 \leq G \leq 28 \cdot 10^3$.

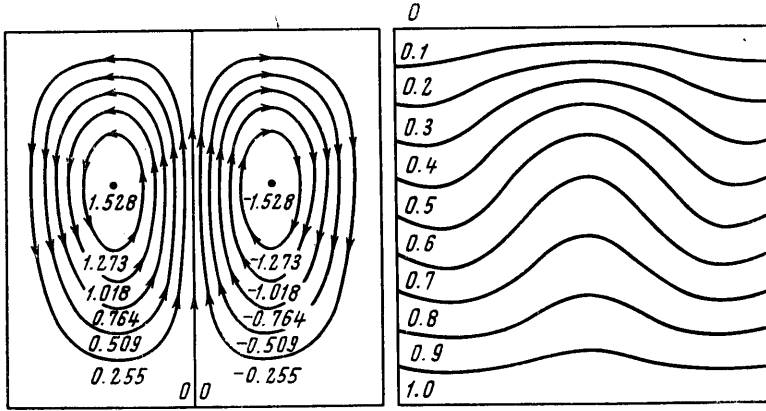
С целью более подробного исследования метастабильного движения, рождающегося во второй критической точке, был проведен специальный численный эксперимент. Использовался следующий прием. На численное решение накладывалось требование симметрии относительно вертикальной оси области (именно такой симметрией обладает второе критическое движение)

$$\psi(x, y, t) = -\psi(-x, y, t), \quad T(x, y, t) = T(-x, y, t) \quad (2)$$

Здесь ψ — функция тока; ось x направлена горизонтально, ось y — вертикально вверх; начало координат в центре области.

Условие (2) исключало возможность перехода исследуемого метастабильного движения в основное, имеющее иную симметрию. Это позволило получить неустойчивое движение, возникающее во второй критической точке, в значительно более широком интервале значений чисел Грассгофа.

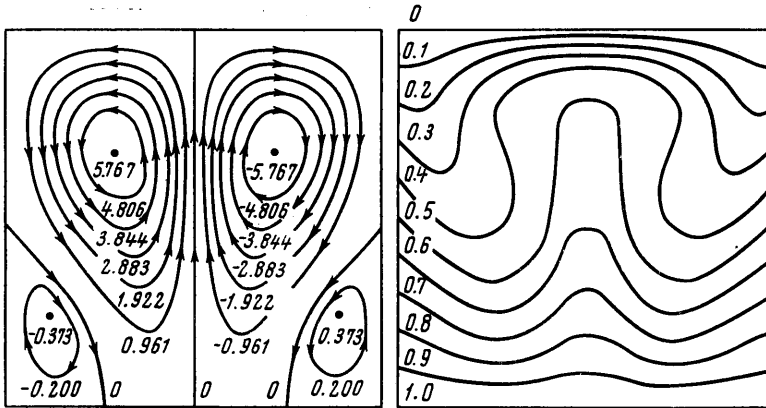
Для численного решения, как и в [1], использовался метод сеток; конечно-разностная форма нелинейных уравнений движения и граничных условий и процедура



Фиг. 2

решения описаны в работе [2]. Вычисления проводились на ЭВМ «Арагац». Условие (2) позволяло решать задачу для одной половины квадрата ($0 \leq x \leq 1/2$; $-1/2 \leq y \leq 1/2$). В расчетах использовалась сетка 25×25 .

В начальный момент задавалось линейное вдоль вертикали распределение температуры и возмущение вихря скорости в центре рассматриваемой половины области



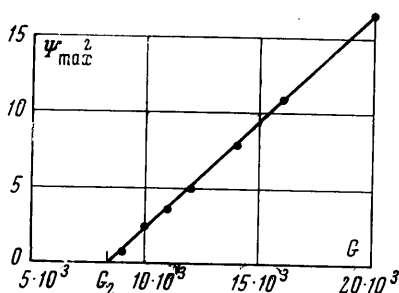
Фиг. 3

(точка $x = 1/4, y = 0$). При фиксированном значении числа Грассгофа после стадии переходного процесса наблюдался выход на метастабильное движение. Решения получены для чисел Грассгофа $9 \cdot 10^3, 10 \cdot 10^3, 11 \cdot 10^3, 12 \cdot 10^3, 14 \cdot 10^3, 16 \cdot 10^3, 20 \cdot 10^3, 24 \cdot 10^3, 28 \cdot 10^3, 32 \cdot 10^3, 34 \cdot 10^3, 38 \cdot 10^3, 40 \cdot 10^3$.

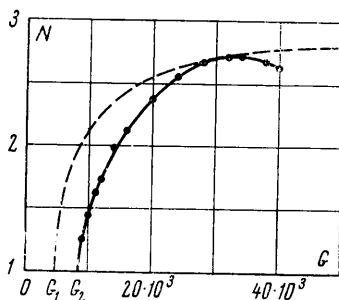
Время установления движения зависит от расстояния до критической точки R_2 и вблизи порога сравнительно велико, достигая 1.5 единиц безразмерного времени (за единицу времени принята величина a^2/ν). Выход на стационарный режим осуществляется через затухающие колебания всех параметров движения.

Вблизи точки R_2 движение жидкости слабое и по форме близко к движению, даваемому линейной теорией; линии тока и изотермы для $G = 10 \cdot 10^3$ изображены на фиг. 2. Нагретая жидкость поднимается в середине полости и, охлаждаясь в верхней части, опускается по краям полости. При увеличении G становятся более интенсивными вихри в углах области (фиг. 3 для $G = 38 \cdot 10^3$; линии тока и изотермы для промежуточного значения $G = 20 \cdot 10^3$ приводились в [1]).

Заметим, что при изменении знака вихря начального возмущения устанавливается движение, получающееся из изображенного на фигурах преобразованием $\psi(x, y, t) \rightarrow \psi(-x, -y, t)$. Соответственно изменяется и добавка к линейному распределению температуры: $\theta(x, y) \rightarrow -\theta(x, -y)$. В этом случае холодная жидкость опускается в центре, нагревается и поднимается по краям полости.



Фиг. 4



Фиг. 5

На фиг. 4 изображена оказавшаяся линейной зависимость квадрата максимального значения функции тока метастабильного движения ψ_{\max}^2 от G . Экстраполяция этой зависимости на нуль позволяет найти точку, в которой возникает исследуемое движение: $G_2 = 8400 \pm 200$. Это значение находится в хорошем соответствии с критическим числом, даваемым линейной теорией. Таким образом, имеет место корневой закон, справедливый до $G \approx 2G_2$

$$\psi_{\max} = 0.0375(G - G_2)^{1/2} \quad (3)$$

На фиг. 5 представлена зависимость числа Нуссельта N_2 метастабильного движения от G (для сравнения пунктирной линией изображена также зависимость от G числа Нуссельта N_1 основного движения). В численных расчетах получалось некоторое различие между значениями теплового потока, входящего в полость и выходящего из полости (соответствующие числа Нуссельта N_+ и N_-). Это различие быстро уменьшается с уменьшением пространственного шага сетки. Так, проверочные вычисления с сетками 15×15 и 25×25 для $G = 20 \cdot 10^3$ показали, что это различие уменьшается в три раза. На фиг. 5 точками изображены средние значения $N_2 = \frac{1}{2}(N_+ + N_-)$, слабо зависящие от шага сетки. До значения $G = 34 \cdot 10^3$ число Нуссельта N_2 увеличивается с ростом G , почти достигает величины N_1 , а затем уменьшается. Уменьшение N_2 обязано, видимо, росту вторичных вихрей в углах полости. До значений $G \approx 2G_2$ полученные результаты можно описать формулой

$$N_2 = 1 + 0.0127(G - G_2)^{1/2} \quad (4)$$

Таким образом, для метастабильного движения, возникающего во второй критической точке, как и для основного движения, имеет место закон Ландау.

В заключение заметим, что особенности конвективных движений, возникающих в кубической полости в первой и второй критических точках, исследовались экспериментально в работе [3].

Автор благодарен Е. М. Жуховицкому за постановку задачи и помощь в работе и Г. З. Гершуни — за полезные советы.

Поступило 19 V 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Тарунин Е. Л. Численное исследование конвекции жидкости, подогреваемой снизу. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 6.
2. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Тарунин Е. Л. Численное исследование конвективного движения в замкнутой полости. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 5.
3. Овчинников А. П. Конвективная устойчивость жидкости в кубической полости. ПМТФ, 1967, № 3.