

ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ СМЕШАННЫЕ ТЕЧЕНИЯ В МАГНИТНОЙ ГАЗОДИНАМИКЕ

В. Б. ГОРСКИЙ

(Горький)

В отличие от обычной газовой динамики, в магнитной газодинамике существует несколько типов смешанных течений. Впервые детальное исследование таких плоских потоков было проведено М. Н. Коганом [1]. После этого началось интенсивное изучение магнитогазодинамических смешанных течений [2-13], причем во всех работах, кроме [9], рассматривается плоский случай. В [9] были получены в компонентах скорости возмущения уравнения возможных смешанных течений для осесимметричного случая.

В настоящей работе подробно исследуются осесимметричные смешанные течения. Найдены точные уравнения движения для потенциала скорости и функции тока и соответствующие приближенные уравнения всех переходных режимов (трансзвукового, гиперкритического, трансальфвеновского, трансзвукового-трансальфвеновского). Получены простые частные решения указанных приближенных уравнений.

Для большей общности все исследование проведено одновременно для плоского и осесимметричного случаев.

§ 1. Основные уравнения. Рассмотрим установившиеся адиабатические течения идеального газа с бесконечной проводимостью. Они описываются следующей системой уравнений [14]:

$$\begin{cases} \nabla \cdot \rho \mathbf{w} = 0, & \mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{w} = -\rho^{-1} \nabla p - \mathbf{H} / 4\pi \rho \times \operatorname{rot} \mathbf{H} \\ \nabla \mathbf{H} = 0, & \operatorname{rot}(\mathbf{w} \times \mathbf{H}) = 0, & \mathbf{w} \cdot \nabla p \rho^{-\kappa} = 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

Здесь \mathbf{w} и \mathbf{H} — векторы скорости и магнитного поля, p и ρ — давление и плотность газа, κ — отношение удельных теплоемкостей.

Ограничимся изучением изэнтропических газовых потоков, в которых векторы \mathbf{w} и \mathbf{H} коллинеарны. Тогда система (1.1) сводится к уравнениям [5]

$$\nabla \cdot \rho \mathbf{w} = 0, \quad \nabla \times (1 - A^{-2}) \mathbf{w} = 0, \quad \frac{1}{2} w^2 + \frac{\kappa}{\kappa - 1} p \rho^{-1} = \text{const} \quad (1.2)$$

$$A = w a^{-1} = w (4\pi \rho)^{1/2} H^{-1}$$

Здесь A — число Альфвена, a — скорость Альфвена. Первые два уравнения из (1.2) принимают в координатах для плоских ($\nu = 0$) и осесимметричных ($\nu = 1$) течений следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial x} (y^\nu \rho v_x) + \frac{\partial}{\partial y} (y^\nu \rho v_y) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} [v_y (1 - A^{-2})] - \frac{\partial}{\partial y} [v_x (1 - A^{-2})] = 0 \quad (1.3)$$

Здесь v_x, v_y — компоненты скорости; x, y — обычные декартовы координаты в плоском случае, а в осесимметричном случае x — координата вдоль оси симметрии потока, y — расстояние от этой оси. Из (1.3.1) следует существование обычной функции тока Ψ , а из (1.3.2) — потенциала скорости Φ , для которого

$$\partial \Phi / \partial x = (1 - A^{-2}) v_x, \quad \partial \Phi / \partial y = (1 - A^{-2}) v_y$$

Тогда уравнения (1.3) с использованием интеграла Бернулли из (1.2) приводятся к одному уравнению либо для функции тока Ψ , либо для потенциала Φ

$$\Psi_x^2 \Psi_{xx} + 2\Psi_x \Psi_y \Psi_{xy} + \Psi_y^2 \Psi_{yy} - \nu y^{-1} \Psi_y (\Psi_x^2 + \Psi_y^2) + (1 - A^{-2})(1 - M^{-2})(\Psi_x^2 + \Psi_y^2)(\nu y^{-1} \Psi_y - \Psi_{xx} - \Psi_{yy}) = 0 \quad (1.4)$$

$$\Phi_x^2 \Phi_{xx} + 2\Phi_x \Phi_y \Phi_{xy} + \Phi_y^2 \Phi_{yy} + A^{-2} M^{-2} (1 - A^2 - M^2) (\Phi_x^2 + \Phi_y^2) (\Phi_{xx} + \Phi_{yy} + \nu y^{-1} \Phi_y) = 0 \quad (1.5)$$

где M — число Маха.

Аналогичные нелинейные уравнения плоского потока для потенциала скорости были получены Имаи [15], Хида [16], И. М. Юрьевым [3], а для функции тока — Сибасом [6]. В переменных годографа соответствующие линейные уравнения для потенциала скорости и функции тока были найдены И. М. Юрьевым [16].

Легко видеть, что при исчезновении магнитного поля ($A \rightarrow \infty$) уравнения (1.4), (1.5) превращаются в известные уравнения обычной газодинамики.

§ 2. Изучение течений газа в переходных областях. Уравнения (1.4) и (1.5) — дифференциальные уравнения смешанного типа, причем принадлежность их к эллиптическому или гиперболическому типу определяется знаком произведения $(M^2 - 1)(A^2 - 1)(M^2 + A^2 - 1)$. В связи с этим представляет интерес исследовать магнитогазодинамический поток в переходных областях, а именно, в трансзвуковой области ($M \rightarrow 1$), в гиперкритической области ($M^2 + A^2 \rightarrow 1$) и трансальфвенновской области ($A \rightarrow 1$). Кроме того, полезно рассмотреть случай параболического вырождения уравнений в трансзвуковой — трансальфвенновской области ($M \rightarrow 1, A \rightarrow 1$).

Найдем приближенные уравнения для функции тока Ψ и потенциала скорости Φ , описывающие газовые течения в переходных областях. Для этого представим каждую из функций Φ и Ψ в виде двух слагаемых, из которых первое определяет однородный поток с критической скоростью w_* , а второе есть возмущение

$$\Phi = w_* [(1 - A_*^{-2})x + \varphi], \quad \Phi_x = w_* (1 - A_*^{-2} + \varphi_x), \quad \Phi_y = w_* \varphi_y \quad (2.1)$$

$$\Psi = \rho_* w_* (2^{-\nu} y^{\nu+1} + \psi), \quad \Psi_x = \rho_* w_* \psi_x, \quad \Psi_y = \rho_* w_* (y^\nu + \psi_y) \quad (2.2)$$

Здесь нижние индексы x и y означают дифференцирование по этим переменным, а звездочка — какой-либо критический режим. С другой стороны, из (1.3) имеем

$$\Phi_x = (1 - A^{-2})v_x, \quad \Phi_y = (1 - A^{-2})v_y; \quad \Psi_x = -y^\nu \rho v_y, \quad \Psi_y = y^\nu \rho v_x \quad (2.3)$$

Компоненты скорости v_x, v_y тоже можно выразить через компоненты u, v скорости возмущения

$$v_x = w_* (1 + u), \quad v_y = w_* v \quad (2.4)$$

Сравнивая теперь выражения соответствующих производных из (2.1) — (2.3) и учитывая, что $A^{-2} = A_*^{-2} \rho_*^{-1} \rho$, получаем

$$\varphi_x = u - A_*^{-2} [\rho_*^{-1} \rho (1 + u) - 1], \quad \varphi_y = (1 - A_*^{-2} \rho_*^{-1} \rho) v \quad (2.5)$$

$$\psi_x = -y^\nu \rho_*^{-1} \rho v, \quad \psi_y = y^\nu [\rho_*^{-1} \rho (1 + u) - 1] \quad (2.6)$$

Но отношение плотностей $\rho_*^{-1}\rho$ для адиабатического процесса имеет следующий вид:

$$\rho_*^{-1}\rho = [1 - 1/2(\kappa - 1)M_*^2(w_*^{-2}w^2 - 1)]^{1/(\kappa-1)} \quad (2.7)$$

Тогда, оставляя в правых частях соотношений (2.5), (2.6) ведущие члены, можно найти для каждого переходного режима выражения производных $\varphi_x, \varphi_y, \psi_x, \psi_y$ через компоненты u и v . Исключая затем u и v из этих производных, можно в конечном итоге получить приближенные уравнения движения отдельно для φ или ψ .

§ 3. Трансзвуковое течение. Введем следующие оценки порядков для координат и функций φ, ψ данного потока:

$$xy^{-1} = O(\varepsilon^{1/3}), \quad \varphi = O(\varepsilon^{2/3}), \quad \psi = O(\varepsilon^{1-1/3\nu}) \quad (3.1)$$

где ε — малый параметр. Тогда производные (2.5), (2.6) примут вид

$$\varphi_x = u, \quad \varphi_y = (1 - A_*^{-2})v, \quad \psi_x = -y^\nu v, \quad \psi_y = -1/2(\kappa + 1)y^\nu u^2 \quad (3.2)$$

Исключая отсюда u и v , а затем φ или ψ , находим уравнения трансзвукового потока для φ и ψ

$$\begin{aligned} 1/2(\kappa + 1)(1 - A_*^{-2})(\varphi_x^2)_x - \varphi_{yy} - \nu y^{-1}\varphi_y &= 0 \\ \pm(1 - A_*^{-2})\sqrt{-2(\kappa + 1)y^{-\nu}\psi_y\psi_{xx} - \psi_{yy} + \nu y^{-1}\psi_y} &= 0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

причем там, где стоят двойные знаки, верхний знак соответствует сверхзвуковому потоку, а нижний — дозвуковому.

Рассмотрим несколько частных решений уравнений (3.3). Так, уравнение (3.3.2) имеет простое решение

$$\psi = cxy^{\nu+1} \quad (c = \text{const}) \quad (3.4)$$

Соответствующее решение уравнения (3.3.1) имеет вид

$$\varphi = -1/2c(1 - A_*^{-2})y^2 + 1/3\sqrt{-2^{\nu+3}(\kappa + 1)^{-1}cx^3} \quad (3.5)$$

Отсюда находим $v = -cy, u^2 = -2^{\nu+1}(\kappa + 1)^{-1}cx$. Теперь видно, что произвольная постоянная c пропорциональна градиенту квадрата скорости в продольном направлении, причем $cx \leq 0$. Звуковая линия является прямой $x = 0$. Семейство линий тока определяется уравнением

$$x = c^{-1}y^{-\nu-1}(c_1 - 2^{-\nu}y^{\nu+1})$$

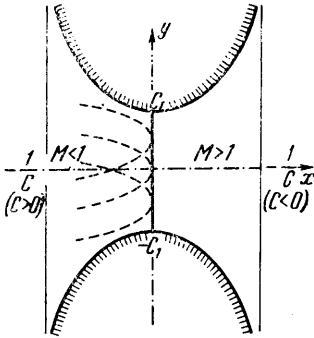
где $c_1 = \text{const}$, а характеристиками будут линии

$$y = \pm 1/3c^{-1}(\pm(1 - A_*^{-2})^{-1}\sqrt{-2^{-\nu-1}(\kappa + 1)^{-1}(-cx)^3})^{1/2}$$

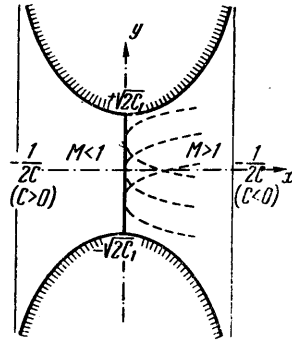
Здесь знак плюс в скобках соответствует сверхзвуковому потоку, а минус — дозвуковому.

Следовательно, доальфвеновский поток ($A_* < 1$) гиперболичен в дозвуковой части и эллипичен в сверхзвуковой, а сверхальфвеновский поток — наоборот. Таким образом, решения (3.4), (3.5) определяют течение в симметричном сопле Лавала с изломом стенки в его горле. Поток может быть чисто дозвуковым (кроме $x = 0$, где достигается звуковая скорость) или чисто сверхзвуковым, либо быть смешанным. Схемы практически более важных смешанных доальфвеновского ($A_* < 1$), трансзвукового и сверхальфвеновского ($A_* > 1$) трансзвукового течений представлены на фиг. 1 и 2, соответственно для плоского и осесимметричного потоков. Здесь (как и повсюду в дальнейшем) линия перехода изображена сплошной линией, а характеристики — штриховыми линиями. Интересно, что в обычной газодинамике ($A_* \rightarrow \infty$) аналогичный смешанный поток тоже может существовать, но только в форме, указанной на фиг. 2.

Рассмотрим еще одно решение уравнений (3.3). Для уравнения (3.3.1) легко находим автомодельное решение, являющееся магнитным аналогом



Фиг. 1



Фиг. 2

известного трансзвукового решения для аналитического сопла

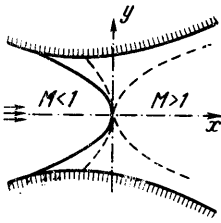
$$\varphi = \frac{1}{2} (\kappa + 1)^{-1/2} c x^2 + \frac{1}{2\nu + 2} (1 - A_*^{-2}) c^2 x y^2 + \frac{1}{40\nu + 24} (\kappa + 1)^{1/2} (1 - A_*^{-2})^2 c^3 y^4 \quad (3.6)$$

Соответствующее решение уравнения (3.3.2) получаем в виде

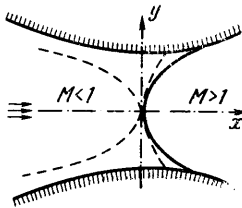
$$\psi = -c^2 \left(\frac{1}{2\nu + 2} x^2 y^{\nu+1} + \frac{1}{10\nu + 6} c \lambda x y^{\nu+3} + \frac{1}{152\nu + 40} c^2 \lambda^2 y^{\nu+5} \right) \quad (3.7)$$

$$\lambda = (1 - A_*^{-2}) \sqrt{\kappa + 1}$$

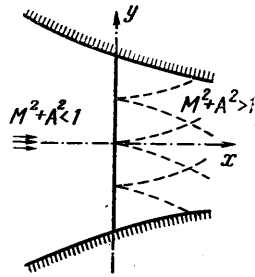
Здесь c — положительная произвольная постоянная, равная градиенту скорости в направлении потока в центре сопла (точка пересечения оси



Фиг. 3



Фиг. 4



Фиг. 5

симметрии сопла с линией перехода). Линии тока определяются уравнением $\psi + 2^{-\nu} y^{\nu+1} = \text{const}$, где ψ берется из (3.7). Звуковая линия получается в форме $x = -(2\nu + 2)^{-1} c \lambda y^2$, а характеристики, проходящие через центр сопла, суть параболы

$$x = 1/8 \{ 1 \pm [3(1 - \nu) + \nu \sqrt{5}] \} c \lambda y^2$$

Таким образом, для аналитического сопла сверхальфеновский трансзвуковой поток (фиг. 3) качественно подобен обычному околозвуковому течению. Доальфеновский же поток гиперболический в дозвуковой области и эллиптический в сверхзвуковой и имеет линию перехода, обращенную выпуклостью к набегающему потоку (фиг. 4).

§ 4. Гиперкритическое течение. Будем предполагать здесь следующие оценки порядков координат и функций φ , ψ :

$$xy^{-1} = O(\varepsilon^{-1/3}), \quad \varphi = O(\varepsilon^{1/3}), \quad \psi = O(\varepsilon^{1+1/3\nu}) \quad (4.1)$$

При этом производные (2.5), (2.6) примут вид

$$\varphi_x = 1/2 M_*^2 (1 - M_*^2) B u^2, \quad \varphi_y = -M_*^2 (1 - M_*^2)^{-1} v \quad (4.2)$$

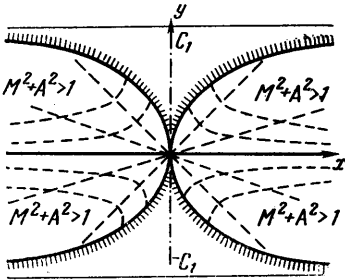
$$\psi_x = -y^\nu v, \quad \psi_y = (1 - M_*^2) y^\nu u, \quad B = (1 - M_*^2)^{-2} [3 + (\kappa - 2) M_*^2] \quad (4.3)$$

Исключая отсюда u и v , а затем φ или ψ , находим уравнения гиперкритического потока для φ и ψ

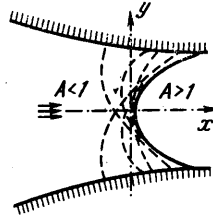
$$\pm \sqrt{2 M_*^2 (1 - M_*^2) B} \varphi_x (\varphi_{yy} + \nu y^{-1} \varphi_y) - \varphi_{xx} = 0 \quad (4.4)$$

$$\psi_{xx} - B (y^{-\nu} \psi_y \psi_{yy} - \nu y^{-2} \psi_y^2) = 0 \quad (4.5)$$

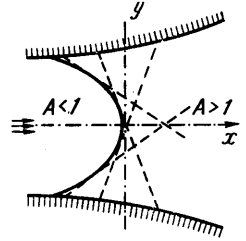
причем там, где стоят двойные знаки, верхний знак соответствует сверх-



Фиг. 6



Фиг. 7



Фиг. 8

критическому потоку ($M^2 + A^2 > 1$), а нижний знак — докритическому потоку. Уравнение (4.5) имеет простое частное решение

$$\psi = cxy^{\nu+1} \quad (4.6)$$

определяющее гиперкритический поток через сопло (фиг. 5), где c — произвольная постоянная, пропорциональная градиенту скорости в направлении потока. Линии тока этого течения описываются уравнением $2^{-\nu} y^{\nu+1} + cxy^{\nu+1} = \text{const}$. Линиями равных скоростей будут прямые $x = \text{const}$. В частности, линией перехода будет прямая $x = 0$. Характеристиками в потоке будут полукубические параболы

$$y = \pm \sqrt[4]{\nu + 1} B c x^3 + c_1 \quad (c_1 = \text{const})$$

Соответствующее решение уравнения (4.4) есть

$$\varphi = 1/2 c M_*^2 (1 - M_*^2)^{-1} [1/3 (\nu + 1)^2 B c x^3 + y^2] \quad (4.7)$$

Далее, рассмотрим еще одну пару соответствующих частных решений уравнений (4.4), (4.5):

$$\varphi = -3^\nu (26\nu + 6)^{-1} M_*^2 (1 - M_*^2)^{-1} B^{-1} x^{-3} y^4, \quad \psi = 3^{2\nu-1} 16^{-\nu} B^{-1} x^{-2} y^{\nu+3} \quad (4.8)$$

Линии тока определяются уравнением $\psi + 2^{-\nu} y^{\nu+1} = c_1$, где ψ берется из (4.8), а c_1 — произвольная постоянная. Уравнение двух семейств характеристик имеет вид

$$y = c_2 x^{\pm 1/2 \sqrt{4-\nu}} \quad (c_2 = \text{const})$$

Скорость потока постоянна на лучах, выходящих из начала координат. Линия перехода ($u = 0$) совпадает с осью x . Течение не может существовать вблизи $x = 0$, где возникает бесконечная скорость. Таким образом, оно может быть интерпретировано как поток в сужающемся или расширяющемся канале (фиг. 6 при $\nu = 0$) со сверхкритической скоростью ($M^2 + A^2 \geq 1$), причем при сужении канала скорость возрастает, и наоборот.

§ 5. Трансальфвеновское течение. Для этого течения аналогично выводим формулы

$$\begin{aligned} xy^{-1} &= O(\varepsilon), \quad \varphi = O(\varepsilon^2), \quad \psi = O(\varepsilon^{1-\nu}), \quad \varphi_x = M_*^2(u + 1/2v^2) \\ \varphi_y &= M_*^2v(u + 1/2v^2), \quad \psi_x = -y^\nu v, \quad \psi_y = y^\nu[(1 - M_*^2)u - 1/2M_*^2v^2] \end{aligned} \quad (5.1)$$

Тогда приближенные уравнения трансальфвеновских течений для φ и ψ получаем в виде

$$[(1 - M_*^2)\varphi_x^3 - \varphi_y^2]\varphi_{xx} + 2\varphi_x\varphi_y\varphi_{xy} - \varphi_x^2\varphi_{yy} - \nu y^{-1}\varphi_y\varphi_x^2 = 0 \quad (5.2)$$

$$(y^\nu\psi_y + 3/2\psi_x^2)\psi_{xx} + 2y^\nu\psi_x\psi_{xy} + y^{2\nu}\psi_{yy} - \nu(y\psi_y + \psi_x^2) = 0 \quad (5.3)$$

Для этих уравнений легко находится пара соответствующих автомодельных частных решений, описывающих трансальфвеновскую область сопла

$$\begin{aligned} \varphi &= M_*^2(1 - M_*^2)^{-1}(2^{-1}cx^2 - 2^{-\nu-1}c^2xy^2 + 2^{-2\nu-3}c^3y^4) \\ \psi &= 2^{-\nu}cxy^{\nu+1} - 3^{2\nu-1}32^{-\nu}c^2y^{\nu+3} \end{aligned} \quad (5.4)$$

Семейство линий тока для этого течения определяется уравнением $\psi + 2^{-\nu}y^{\nu+1} = \text{const}$, а линия перехода является параболой $x = (2\nu + 2)^{-1}cy^2$. Одна из характеристик потока совпадает с линией перехода, а остальными будут линии $x = 1/4(1 - \nu)cy^2 - my - c^{-1}m^2$ (m — произвольная постоянная), т. е. это параболы — в плоском случае ($\nu = 0$) и прямые — в осесимметричном ($\nu = 1$). Здесь повсюду c — произвольная постоянная, пропорциональная градиенту скорости в направлении течения, причем для ускоряющихся дозвуковых потоков $c > 0$, а для ускоряющихся сверхзвуковых потоков $c < 0$.

Таким образом, дозвуковой трансальфвеновский поток через сопло, пересекая линию перехода, попадает из гиперболической области в эллиптическую (фиг. 7), а сверхзвуковой поток, наоборот, переходит из эллиптической области в гиперболическую (фиг. 8). Заметим, что фиг. 7 соответствует плоскому течению, а фиг. 8 — осесимметричному.

Укажем еще одну соответствующую пару решений уравнений (5.2), (5.3) для осесимметричного случая ($\nu = 1$)

$$\varphi = M_*^2(1 - M_*^2)^{-1}(4/3cxy^{-2/3} + 2/27x^3y^{-2}), \quad \psi = 1/3x^2 + cy^{4/3} \quad (5.5)$$

Следует отметить, что аналогичного решения для плоского случая ($\nu = 0$) не существует.

Возмущенная скорость для (5.5) имеет вид

$$u + 1/2v^2 = (1 - M_*^2)^{-1}(4/3cy^{-2/3} + 2/9x^2y^{-2})$$

и, следовательно, такое течение не может существовать вблизи оси x , где возникает бесконечная скорость. Линия перехода имеет уравнение $x = \pm\sqrt[3]{-6cy^{4/3}}$. Отсюда заключаем, что $c \leq 0$, так как рассматриваемое приближение верно только в окрестности линии перехода. Линии тока здесь имеют форму $1/3x^2 + 1/2y^2 + cy^{4/3} = c_1 = \text{const}$. Характеристики, выходящие из начала координат, совпадают с линией перехода. В областях POQ и P_1OQ_1 (фиг. 9) поток всегда гиперболический и при $M_* < 1$ имеет доальфвеновскую скорость, а при $M_* > 1$ — сверхальфвеновскую. В оставшихся областях свойства течения противоположны указанным.

При $c = 0$ линиями тока будут эллипсы $1/3x^2 + 1/2y^2 = \text{const}$ и скорость Альфвена достигается на оси y .

§ 6. **Трансзвуковое-трансальфвеновское течение.** Для этого течения получаем следующие оценки и формулы:

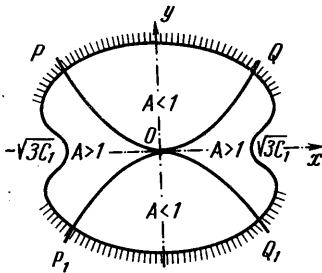
$$\begin{aligned} xy^{-1} &= O(\varepsilon), \quad \varphi = O(\varepsilon), \quad \psi = O(\varepsilon^{1-\nu}), \quad \varphi_x = u, \quad \varphi_y = uv \\ \psi_x &= -y^\nu v, \quad \psi_y = -1/2 y^\nu [(\kappa + 1)u^2 + v^2] \end{aligned} \quad (6.1)$$

Соответствующие приближенные уравнения этого потока для функций φ и ψ имеют вид

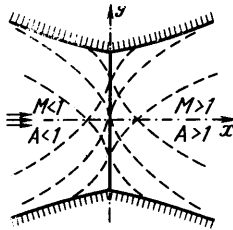
$$[(\kappa + 1)\varphi_x^2 - \varphi_y^2]\varphi_{xx} + 2\varphi_x\varphi_y\varphi_{xy} - \varphi_x^2\varphi_{yy} - \nu y^{-1}\varphi_y\varphi_x^2 = 0 \quad (6.2)$$

$$2(y^\nu\psi_y + \psi_x^2)\psi_{xx} + 2y^\nu\psi_x\psi_{xy} + y^{2\nu}\psi_{yy} - \nu(y\psi_y + \psi_x^2) = 0 \quad (6.3)$$

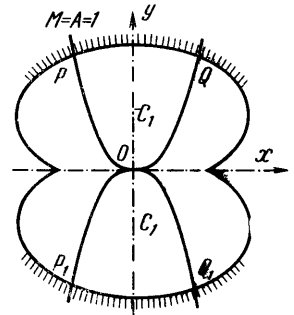
Нетрудно видеть, что оба этих уравнения во всей области потока гиперболичны с параболическим вырождением на линии $u = 0$. Соответствующие



Фиг. 9



Фиг. 10



Фиг. 11

решениями уравнений (6.2), (6.3), описывающими течение через сопло, будут

$$\begin{aligned} \varphi &= -(3c)^{-1}(\kappa + 1)^{-1/2}(-2cx + 2^{-\nu}c^2y^2)^{1/2} \\ \psi &= 2^{-\nu}cxy^{\nu+1} - 3^{2\nu-1}32^{-\nu}c^2y^{\nu+3} \end{aligned} \quad (6.4)$$

где произвольная постоянная c для ускоряющихся потоков подчинена условию $cx < 0$. Поэтому здесь линией перехода и характеристикой будет прямая $x = 0$. Кроме того, характеристиками будут линии

$$x = -(1/4)cvy^2 + my + 1/2c^{-1}m^2 \quad (m = \text{const})$$

Семейство линий тока определяется уравнением

$$\psi + 2^{-\nu}y^{\nu+1} = \text{const}$$

где ψ берется из (6.4). Существенно, что так как $cx < 0$, то стенки сопла имеют излом при встрече с осью y .

Течение может быть чисто дозвуковым и доальфвеновским или сверхзвуковым и сверхальфвеновским, лишь достигая значений $M = A = 1$ на линии вырождения $x = 0$; но оно может быть также и смешанным, оставаясь всюду гиперболичным.

Схема трансзвукового-трансальфвеновского потока через осесимметричное сопло с изломом стенки представлена на фиг. 10.

Приведем еще одну пару соответствующих решений уравнений (6.2), (6.3) для осесимметричного случая

$$\varphi = (\kappa + 1)^{-1/2} \left(\frac{x}{4y} \sqrt{-8cy - x^2} - 2c \arcsin \frac{x}{\sqrt{-8cy}} \right), \quad \psi = \frac{1}{4} x^2 + cy. \quad (6.5)$$

Здесь имеем

$$u = (-8cy - x^2)^{1/2} [4y^2(\kappa + 1)]^{-1/2}, \quad v = -1/2 xy^{-1}$$

Отсюда следует, что произвольная постоянная $c < 0$. Линия вырождения ($u = 0$) будет параболой $y = -(8c)^{-1} x^2$, а семейство линий тока определяется уравнением $1/4 x^2 + cy + 1/2 y^2 = \text{const} = c_1$.

На фиг. 11 представлены трансзвуковое и трансальфёновское течения (6.5).

Характеристики, выходящие из начала координат, совпадают с линией вырождения. Течение существует только в областях POQ и P_1OQ_1 , и невозможно вблизи $y = 0$, где возникает бесконечная скорость. В этих областях скорость либо дозвуковая доальфёновская, либо наоборот, сверхзвуковая сверхальфёновская.

В заключение отметим, что все полученные уравнения переходных режимов (3.3), (4.4), (4.5), (5.2), (5.3), (6.2), (6.3) точно соответствуют результатам Геффена [9]. Для плоского случая ($v = 0$), полагая в указанных формулах $v = 0$, получаем уравнения, найденные Сибассом [6].

Следует, правда, заметить, что уравнения (3.3.1) и (4.4) при $v = 0$ отличаются постоянными множителями от соответствующих уравнений из [6], что особенно сказывается на свойствах уравнения (3.3.1).

Наконец, после того как данное исследование было выполнено, стало известно о труднодоступной работе [17], в которой несколько другим методом была получена небольшая часть приведенных результатов (только для функции тока).

Автор благодарит С. В. Фальковича за внимание к работе и обсуждение.

Поступило 20 III 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Коган М. Н. О магнитогазодинамических течениях смешанного типа. ПММ, 1961, т. 25, вып. 1, стр. 132—137.
2. Рёурет R. Sur les regimes de transition dans certains ecoulements d'un fluide parfaitement conducteur. *Cand. rend. Acad. Sci.*, 1961, vol. 252, No. 49, p. 2816—2818.
3. Юрьев И. М. Некоторые решения уравнений плоского течения газа в параллельном магнитном поле. *Инж. ж.*, 1961, т. 1, No. 4, стр. 133—137.
4. Рёурет R. Regimes de transition elliptique-hyperbolique dans certains ecoulements de magnetodynamique des fluides. *J. Mecanique*, 1962, vol. 1, No. 2, p. 167—178.
5. Seebass R. On «transcritical» and «hypercritical» flows in magnetogasdynamics. *Quart. Appl. Math.*, 1961, vol. 19, No. 3, p. 231—237.
6. Seebass R. Mixed flows in magnetogasdynamics. *Symposium Transsonicum (Aachen, 1962)*. Springer — Verlag, Berlin, 1964, p. 471—490.
7. Chu C. K. Magnetohydrodynamic nozzle flow with three transitions. *Phys. Fluids*, 1962, vol. 5, No. 5, p. 550—559.
8. Tamada K. Transonic flow of a perfectly conducting gas with aligned magnetic field. *Phys. Fluids*, 1962, vol. 5, No. 8, p. 871—878.
9. Geffen N. Magnetogasdynamic flows with shock waves. *Phys. Fluids*, 1963, vol. 6, No. 4, p. 566—571.
10. Hida K. Hodograph method for treating the flow of a perfectly conducting fluid with aligned magnetic field. *J. Phys. Soc. Japan*, 1963, vol. 18, No. 6, p. 864—870.
11. Hida K. Extension of similarity rules for the magnetohydrodynamical flow. *Phys. Fluids*, 1964, vol. 7, No. 7, p. 1073—1074.
12. Geffen N. On transonic magnetogasdynamic and gasdynamic flow patterns. *Israel J. Technol.*, 1964, vol. 2, No. 1, p. 147—154.
13. Yamanaoka T. Sonic line of magnetohydrodynamic nozzle flow. *AIAA Journ.*, 1964, vol. 2, No. 12.
14. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. *Электродинамика сплошных сред*. Гостехиздат, 1957.
15. Imai I. On flows of conducting fluids past bodies. *Rev. Mod. Phys.*, 1960, vol. 32, p. 992.
16. Юрьев И. М. К решению уравнений магнитной газодинамики. ПММ, 1960, т. 24, вып. 1, стр. 168—170.
17. Tajiri M. The flow of a perfectly conducting gas through an axially symmetric Laval nozzle. *Bull. Univ. Osaka Prefect. A*, 1965, vol. 14, No. 1, p. 75—81.