№ 5 МЕХАНИКА ЖИДКОСТИ И ГАЗА 1967

АСИМПТОТИЧЕСКИЙ ХАРАКТЕР ГИПЕРЗВУКОВОГО ТЕЧЕНИЯ В КОНИЧЕСКОМ СОПЛЕ

В. П. АГАФОНОВ

(Москва)

В работе исследуется гиперзвуковое течение в коническом сопле на больших расстояниях от критического сечения с учетом взаимодействия с ламинарным пограничным слоем.

Исследование асимптотического характера гиперзвукового течения идеального газа в расширяющемся сопле, стенка которого близка к параболе k-й степени, было проведено М. Д. Ладыженским [1], который показал, в частности, что при $0 < k < 1/\gamma$ справедливо гидравлическое приближение, когда все газодинамические характеристики течения постоянны по сечению сопла. Некоторые особенности движения идеального газа в гиперзвуковых соплах (в том числе возможность образования зон с вакуумом) были ранее установлены А. А. Никольским [2]. Задача об асимптотическом характере гиперзвукового течения намного усложняется, если закон изменения границы изэнтропического ядра определяется вытесняющим действием пограничного слоя, как это имеет место при истечении в сопло заданной геометрической формы.

Ниже приближенно, на основе интегрального метода, рассмотрена задача о гиперзвуковом течении в коническом сопле с учетом взаимодействия с пограничным слоем. Указаны два возможных предельных случая течения на больших расстояниях от критического сечения сопла: 1) при числах Рейнольдса, меньших некоторого $(R_{0\alpha}')_*$, неравномерность в распределении всех газодинамических параметров в поперечном сечении ядра потока уменьшается, и течение носит гидравлический характер; максимальная величина числа Маха в этом случае определяется из условия смыкания пограничных слоев на оси сопла; 2) при числах Рейнольдса, намного больших $(R_{0\alpha}')_*$, когда основная масса газа сосредоточена вблизи внешней границы потенциального ядра, область изэнтропического течения ограничена вдоль по потоку взаимодействием сжатых слоев газа.

§ 1. В полярной системе координат (r°, θ°) рассмотрим осесимметричное движение совершенного газа в коническом сопле. Предполагаем, что угол полураствора сопла α мал (что часто имеет место на практике), т. е. вообще пренебрегаем членами $O(\alpha^2)$. Для простоты вычислений предположим также, что число Прандтля $P = 1$ и стенка сопла теплоизолирована, другими словами, известен интеграл уравнения энергии.

Будем искать зависимость газодинамических параметров течения в изэнтропическом ядре и размер самого ядра на больших расстояниях от критического сечения сопла приближенно, требуя интегрального выполнения законов сохранения в пограничном слое и потенциальном течении. По существу, используется аналог метода интегральных соотношений А. А. Дородницына [3], в котором одной полосой является пограничный слой, а другой — изэнтропическое ядро течения.

Воспользуемся интегральной формой записи уравнения неразрывности, уравнения импульса в вязкой области в радиальном направлении и уравнения импульса идеального газа на ось θ°, которые приведены в работе [4].

При $M \gg 1$ эти уравнения имеют следующий вид

$$\int\limits_0^{\Delta(r)} \rho\theta \, d\theta = \frac{Q(\gamma)}{2r^2} \tag{1.1}$$

$$\frac{d}{dr}[r^2 p(\Delta) I] + \frac{(\gamma-1)}{2\gamma} r^2 \frac{(1-\Delta^2)}{2} \frac{d}{dr} p(\Delta) + \frac{1}{R_{0\alpha}} \frac{1}{(1-\Delta)} = 1 \quad (1.2)$$

$$I = -(1-\Delta)\left[(1-\ln 2) - (1-\Delta)(\ln 2 - {}^1/_2)\right]$$

$$p(\Delta) - p(0) = -\alpha^2 \frac{2\gamma}{(\gamma-1)} \int\limits_0^{\Delta(r)} \rho \left[\frac{\partial}{\partial r}(r v_\theta) + v_\theta \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}\right] d\theta \quad (1.3)$$

$$\theta^\circ = \theta\alpha, \quad r^\circ = r_* r, \quad \Delta^\circ = \Delta\alpha, \quad \rho^\circ = \rho\rho_0, \quad p^\circ = p p_0$$

$$v_\theta{}^0 = v_\theta V_{\max}\alpha, \qquad V_{\max}^2 = 2c_p T_0, \qquad R_{0\alpha} = \frac{\rho_0 V_{\max} r_* \alpha^2}{\mu_0},$$

$$Q(\gamma) = \left(\frac{2}{\gamma-1}\right)^{1/(\gamma-1)} \left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\right)^{1/2}$$

Здесь α — угол полураствора сопла, r_* — расстояние критического сечения сопла до полюса системы координат, $\theta^\circ = \Delta^\circ(r)$ — граница изэнтропического ядра, ρ° — плотность, p° — давление, $v_\theta{}^\circ$ — составляющая скорости в направлении θ°, γ — отношение удельных теплоемкостей газа, $R_{0\alpha}$ — соответствующее число Рейнольдса, $Q(\gamma)$ — приведенный расход, нижний индекс 0 относится к параметрам адиабатически заторможенного газа.

В соответствии с гиперзвуковым приближением с точностью до $\sim O({}^1/M^2\Delta^2)$ расходом через пограничный слой пренебрегается, и безразмерная толщина вытеснения пограничного слоя полагается равной[1] $1-\Delta$. При вычислении интеграла I в уравнении (1.2) в пограничном слое использован линейный профиль скорости, близкий к действительному при $M \gg 1$.

Оценки показывают, что изменением давления p в пограничном слое в данной задаче с точностью до членов $O(\alpha^2)$ можно пренебречь всегда. Однако в изэнтропическом ядре течения при гиперзвуковых скоростях может быть $\alpha M \gtrless 1$, и поэтому уравнение (1.3) учитывает возможный поперечный градиент газодинамических величин, вызванный искривлением линий тока за счет влияния пограничного слоя [4].

§ 2. Из уравнения неразрывности (1.1), предполагая вначале, что в сопле не появляется областей с вакуумом, можно получить закон изменения средней по сечению плотности ρ_*, а из условия изэнтропичности — закон изменения остальных параметров течения, в частности, давления p_*

$$p_* = (\rho_*)^\gamma = Q(\gamma) \,/\, (r\Delta)^{2\gamma} \quad (2.1)$$

Подставляя это выражение в уравнение (1.2), получим обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка относительно Δ, из которого можно судить об асимптотическом изменении границы изэнтропического ядра $\Delta(r)$ при $r \to \infty$.

Предвосхищая окончательный результат, можно значительно упростить вычисления, если заранее предположить, что $(R_{0\alpha})^{-1+1/\gamma} \lessapprox \Delta \ll 1$ (нижняя граница для Δ соответствует условию смыкания пограничных слоев). В этом случае интегрирование уравнения (1.2) как обыкновенного дифференциального уравнения относительно $p(\Delta)$ дает

$$p(\Delta) = \frac{C}{R_{0\alpha}} \frac{1}{r}[1 + O(\Delta^l)] \quad (2.2)$$

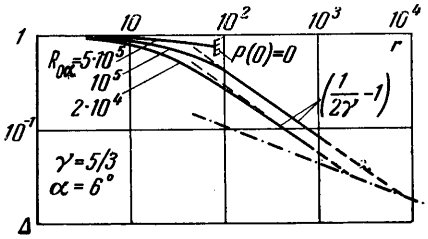
[1] Условие смыкания пограничных слоев на оси сопла рассматривается отдельно и определяется с учетом расхода газа через пограничный слой.

где при $\Delta \ll 1$ C и l — положительные постоянные, зависящие от величины γ, и $l > 1$.

Из выражений (2.1) и (2.2) следует

$$(r\Delta)^{2\gamma} = R_{0\alpha} r \quad \text{или} \quad \Delta \sim (r)^{1/2\gamma-1} \quad \text{при} \quad r \gg 1 \tag{2.3}$$

Приведенные на фигуре некоторые результаты численного интегрирования системы уравнений (1.1) — (1.3) подтверждают указанную зависимость. Прямая $\Delta = 1$ на этой фигуре соответствует идеальному течению от источника ($R_{0\alpha} = \infty$), пунктирная — зависимости (2.3), а штрихпунктирная кривая ограничивает при заданной величине $R_{0\alpha}$ максимальное значение $r_{\max}$, при котором еще существует потенциальное ядро.



Предполагая, что величина $R_{0\alpha}$ меньше некоторого значения $(R_{0\alpha})_*$, соответствующего появлению области вакуума (случай $R_{0\alpha} > (R_{0\alpha})_*$ рассмотрен ниже, § 3), из уравнения (1.3), используя для оценки линейный профиль для скорости v_θ и условие непротекания газа при $\theta° = \Delta°$, можно получить

$$\frac{p(\Delta) - p(0)}{p(\Delta)} \sim \alpha^2 R_{0\alpha} \frac{1}{r} \quad \text{при} \quad r \gg 1 \tag{2.4}$$

С другой стороны,

$$\frac{p(\Delta) - p(0)}{p(\Delta)} \sim r^{2(\gamma-1)+1/2(2\gamma-1)} \quad \text{при} \quad 1 - \Delta \ll 1$$

Таким образом, по мере расширения газа в коническом сопле степень неравномерности в распределении газодинамических параметров в поперечном сечении изэнтропического ядра сначала возрастает, достигает максимума, а затем уменьшается, стремясь к нулю [1]. При дальнейшем расширении газа в сопле область изэнтропического течения будет ограничена смыканием пограничных слоев на оси сопла. Так как справедливо гидравлическое приближение, для оценки максимально достижимой величины числа Маха можно воспользоваться зависимостью, полученной в работе [4] с учетом расхода газа через пограничный слой

$$\max M \sim [R_{0\alpha}]^{(\gamma-1)/\gamma} \tag{2.5}$$

§ 3. В параметрах подобия [4] выражение (2.4) примет вид

$$\frac{p(\Delta) - p(0)}{p(\Delta)} \sim R_{0\alpha}' \frac{1}{r'}$$

$$r' = r[\alpha]^{1/(\gamma-1)}, \qquad R_{0\alpha}' = R_{0\alpha}[\alpha]^{(2\gamma-1)/(\gamma-1)}$$

Отсюда следует, что неравномерность в распределении газодинамических параметров в поперечном сечении сопла (при фиксированном значении r') возрастает при увеличении числа Рейнольдса $R_{0\alpha}'$.

---

[1] Можно отметить, что полученный результат находится в соответствии с критерием М. Д. Ладыженского [1], согласно которому в данном случае ($k = 1 / (2\gamma)$) должно быть справедливо гидравлическое приближение.

При некотором значении приведенного числа Рейнольдса, равном $(R_{0\alpha}')_*$ (например, $(R_{0\alpha}')_* \approx 10^2$ для $\gamma = {}^5/_3$), максимальная величина отношения

$$\frac{p(\Delta)-p(0)}{p(\Delta)} = 1$$

Это означает появление области вакуума вблизи оси сопла $p(0) = 0$ (см. фигуру) и приводит к тому, что нельзя пользоваться выражением (2.1) для оценки характерной величины давления p.

Можно предположить, что при дальнейшем расширении область вакуума при $R_{0\alpha}' > (R_{0\alpha}')_*$ увеличивается, и основная масса газа сосредотачивается вблизи внешней границы изэнтропического ядра. Рассмотрим предельный случай «сжатого слоя». Исходя из тех же уравнений (1.1) — (1.3), давление в пограничном слое и в тонком слое сжатого газа при $\theta^\circ = \Delta^\circ$ (в остальной части течения — вакуум) определяется в этом случае формулой

$$p(\Delta) = -\alpha^2 \frac{\gamma}{(\gamma-1)} Q(\gamma) \frac{1}{(r\Delta)} \frac{d^2(r\Delta)}{dr^2} \tag{3.1}$$

которая является аналогом формулы Буземана с учетом центробежных сил при гиперзвуковом обтекании тонких тел.

Подставляя выражение (3.1) в уравнение (1.2), можно определить изменение границы сжатого слоя в зависимости от расстояния r. При $\Delta \ll 1$ при помощи (2.2) выражение для функции $\Delta(r)$ имеет вид

$$\Delta(r) \sim (r)^{-1/2} Z_1(2\sqrt{r/L}) \tag{3.2}$$

где Z_1 — линейная комбинация бесселевых функций первого и второго рода первого порядка, а $L = \alpha^2 R_{0\alpha} b(\gamma)$. Координата r_1, где функция Z_1 первый раз обращается в нуль, определяет место смыкания сжатых слоев газа на оси сопла, ограничивающих тем самым изэнтропическую область течения. Точная картина взаимодействия сжатых слоев будет, по-видимому, более сложной, включая наличие прямого скачка, а также влияние величины давления в пространстве, куда расширяется газ.

Автор благодарит В. Н. Гусева и В. Н. Жигулева за полезное обсуждение работы.

Поступило 3 XI 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Ладыженский М. Д. О гиперзвуковых течениях в соплах. ПММ, 1965, т. 29, вып. 1, стр. 99—105.
2. Никольский А. А. Некоторые нестационарные движения газа и их стационарные гиперзвуковые аналогии. Инж. ж., 1962, т. 2, № 2, стр. 246—253.
3. Дородницын А. А. Об одном методе численного решения некоторых нелинейных задач аэрогидродинамики. Тр. III Всесоюзн. матем. съезда 1956, т. III. Изд-во АН СССР, 1958, стр. 447—453.
4. Агафонов В. П. Взаимодействие пограничного слоя с гиперзвуковым потоком в коническом сопле. Изв. АН СССР. Механика, 1965, № 5, стр. 154—157.