

ОБ ЭФФЕКТИВНОСТИ УСКОРЕНИЯ ПРОВОДЯЩЕГО ГАЗА В КООКСИАЛЬНОЙ СИСТЕМЕ

Г. М. БАМ-ЗЕЛИКОВИЧ

(Москва)

Для различного распределения расхода по радиусу решается задача о том, каково должно быть отношение радиусов электродов, чтобы при заданном суммарном расходе получить заданный суммарный импульс при наименьшей мощности.

1. Рассмотрим установившееся движение проводящего газа в канале постоянной площади сечения, ограниченном двумя коаксиальными цилиндрами: внешним радиуса r_1 и внутренним радиуса r_0 . Ось x цилиндрической системы координат направим по оси цилиндров, координату по радиусу обозначим через r , а полярный угол — через θ . Будем предполагать, что искомые величины не зависят от угла θ . Предположим также, что проводимость изотропна (т. е. что токи Холла отсутствуют) и что коэффициент проводимости σ можно считать постоянным. В дальнейшем будет рассматриваться ускорение в сильных электромагнитных полях до скоростей порядка 10^7 см/сек. При этом можно пренебречь проекцией градиента давления на ось x по сравнению с электромагнитной силой [1].

Оценим порядок величины v проекции скорости на ось r , предполагая, что проекция электромагнитной силы на ось r пренебрежимо мала (что будет показано ниже). Из проекции уравнения движения на ось r имеем

$$\rho u \partial v / \partial x \sim \partial p / \partial r, \quad \text{или} \quad v / u \sim (L / \Delta r) (p / \rho u^2) \sim L / (\Delta r) M^2$$

где u — проекция скорости на ось x , p — давление, ρ — плотность, M — число M , $\Delta r = r_1 - r_0$ и L — длина канала.

Принимая $\Delta r \sim 3-5$ см, $L \sim 25-30$ см, $u \sim 10^{-7}$ см/сек, $M \sim 30$ (это соответствует $T \sim 30\,000^\circ$ К), получим, что $v / u \sim 0.01-0.005$. Рассмотрим теперь уравнение неразрывности

$$\partial \rho u r / \partial x + \partial \rho v r / \partial r = 0$$

При справедливости сделанной выше оценки имеем

$$\frac{\partial \rho v r}{\partial r} \sim \frac{\rho v r}{\Delta r}, \quad \frac{\partial \rho u r}{\partial x} \sim \frac{\rho u r}{L}, \quad \frac{\partial \rho v r / \partial r}{\partial \rho u r / \partial x} \sim 0.1 - 0.05$$

Таким образом, уравнение неразрывности с большой степенью точности может быть записано в виде $\partial \rho u r / \partial x = 0$. Движение таково, что каждая струйка тока сохраняет свое сечение. Поток оказывается в рассматриваемом случае слоистым, т. е. отдельные слои газа ускоряются до различных скоростей, не взаимодействуя друг с другом непосредственно. Взаимное влияние струек тока проявляется в этом случае только через электромагнитную силу, которая зависит от всего поля скоростей.

Покажем теперь, что уравнения электродинамики имеют в этом случае такое решение, что можно принять $H_x = H_r = E_\theta = j_\theta = 0$, и при этом проекция электромагнитной силы на ось r будет пренебрежимо мала (H_x , H_r , E_θ , j_θ — проекции векторов напряженности магнитного поля \mathbf{H} , электрического поля \mathbf{E} и плотности тока \mathbf{j} на соответствующие оси).

При этих предположениях имеем уравнения электродинамики [2]

$$\frac{\partial H_\theta}{\partial r} + \frac{H_\theta}{r} = \frac{4\pi}{c} j_x, \quad \frac{\partial H_\theta}{\partial x} = -\frac{4\pi}{c} j_r, \quad \frac{\partial E_r}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial r} = 0$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_r}{\partial r} + \frac{E_r}{r} = 4\pi\rho_e \quad (1.1)$$

$$j_x = \sigma(E_x + vH_\theta/c), \quad j_r = \sigma(E_r - uH_\theta/c) \quad (1.2)$$

где ρ_e — плотность заряда. Третье уравнение (1.1) показывает, что $E_x/E_r \approx (\Delta r/L)(\Delta E_r/E_r)$, где ΔE_r — характерное изменение E_r на длине канала. Учитывая это, получаем

$$\frac{\partial E_x/\partial x}{\partial E_r/\partial r} \sim \left(\frac{\Delta r}{L}\right)^2 \frac{\Delta E_r}{E_r}, \quad \frac{4\pi}{c} j_x \left(\frac{\partial H_\theta}{\partial r}\right)^{-1} \sim \left(\frac{\Delta r}{L}\right)^2 \frac{\Delta E_r}{E_r}, \quad \left(\frac{j_x}{j_r} \sim \frac{\Delta r}{L} \frac{\Delta E_r}{E_r}\right)$$

Как отмечалось выше, $\Delta r/L \sim 0.1$, кроме того, если не создаются специальные приспособления, то разность потенциалов на электродах почти постоянная по длине канала, так как электроды — хорошие проводники. Поэтому $\Delta E_r/E_r \ll 1$, и из (1.3) следует, что j_x пренебрежимо мало, по сравнению с j_r , и что можно пренебречь членом с j_x в первом уравнении (1.1). Из первого и второго уравнений (1.1) при этом следует, что

$$H_\theta = H(x)r_0/r, \quad j_r = j(x)r_0/r \quad (1.4)$$

Учитывая (1.4), интегрируя второе уравнение (1.2) по r от r_0 до r_1 и замечая, что интеграл от E_r равен разности потенциалов между электродами ϕ_0 , которую будем считать в дальнейшем постоянной, получим, что уравнения электродинамики в рассматриваемом случае сводятся к двум

$$\frac{dH}{dx} = -\frac{4\pi}{c} j(x), \quad j(x) \ln \frac{r_1}{r_0} = \frac{\sigma\phi_0}{r_0} - \frac{H(x)}{c} \int_{r_0}^{r_1} \frac{u(x,r)}{r} dr \quad (1.5)$$

К этим уравнениям следует присоединить уравнения неразрывности и движения, которые при сделанных предположениях упрощаются

$$\partial \rho u / \partial x = 0, \quad \rho u \partial u / \partial x = (r_0^2 / cr^2) jH \quad (1.6)$$

Граничные условия для системы (1.5), (1.6) получим, полагая, что в канал подается газ с заданной скоростью и заданным расходом и что вне канала токи в плазме не текут

$$\rho u = m(r), \quad u = u_0(r) \quad \text{при } x = 0, \quad H = 0 \quad \text{при } x = L \quad (1.7)$$

Интегрируя (1.6) с учетом (1.5) и (1.7), получаем

$$\rho u = m(r), \quad m(u - u_0) = (r_0^2 / 8\pi r^2) (H_0^2 - H^2) \quad (1.8)$$

где H_0 — значение H при $x = 0$.

Так как рассматривается ускорение до больших значений скорости на выходе u_L , то вклад начальной скорости в импульс и энергию струи пренебрежимо мал, поэтому для простоты будем пренебрегать в дальнейшем значением u_0 . Подставляя (1.8) в (1.5), получим уравнение для H

$$\frac{dH}{dx} + \frac{4\pi\sigma\phi_0}{cr_0 \ln(r_1/r_0)} - \frac{\sigma r_0^2 H (H_0^2 - H^2)}{2c^2 \ln(r_1/r_0)} \int_{r_0}^{r_1} \frac{dr}{mr^3} = 0 \quad (1.9)$$

Таким образом, уравнения (1.4) и (1.8) дают в явном виде зависимость искомых величин от r , а для определения зависимости от x необходимо вы-

числить одну квадратуру, к которой сводится решение уравнения (1.9).
Удобно ввести следующие обозначения:

$$(1.10)$$

$$\frac{H}{H_0} = H^*, \quad \frac{x}{L} = x^*, \quad \frac{r_1}{r_0} = \mu, \quad \frac{\sigma r_0^2 L H_0^2}{2c^2 \ln \mu} \int_{r_0}^{r_1} \frac{dr}{mr^3} = p, \quad \frac{4\pi\sigma L \varphi_0}{\sigma r_0 H_{0p} \ln \mu} = \varphi^*$$

Дифференциальное уравнение (1.9) для определения H примет вид

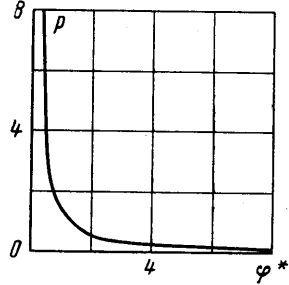
$$dH^* / dx^* + p[\varphi^* - (1 - H^{*2})H^*] = 0 \quad (1.11)$$

Интегрируя по x^* и замечая, что $H^* = 0$ при $x^* = 1$ получим

$$p = \int_0^1 \frac{dH^*}{H^{*3} - H^* + \varphi^*} \quad (1.12)$$

Заметим еще, что так как при ускорении плазмы выражение в квадратных скобках в (1.11) всегда больше нуля и $0 \leq H^* \leq 1$, то безразмерный параметр φ^* не может быть меньше определенной величины, равной максимуму функции $f(H^*) = H^* - H^{*3}$ на отрезке $[0, 1]$. Это значение будет равно

$$\min \varphi^* = 2 / 3\sqrt{3} \sim 0.385 \quad (1.13)$$



Фиг. 1

Связь p и φ^* , вычисленная по формуле (1.12), представлена на фиг. 1.

2. Прежде чем сформулировать задачу об эффективности ускорения проводящего газа, выпишем выражения ряда суммарных характеристик потока. Суммарный секундный расход M и импульс на выходе I равны

$$M = \int_{r_0}^{r_1} 2\pi r \rho u dr = 2\pi \int_{r_0}^{r_1} m r dr, \quad I = \int_{r_0}^{r_1} 2\pi r m u_L dr = \frac{r_0^2 H_0^2}{4} \ln \mu \quad (2.1)$$

Суммарный ток J , протекающий через систему, получим интегрированием j_r по поверхности внутреннего электрода. Легко найти также кинетическую энергию E_k , уносимую из канала в единицу времени

$$J = \int_0^L 2\pi r_0 j dx = \frac{c r_0 H_0}{2}, \quad E_k = \int_{r_0}^{r_1} 2\pi r m \frac{1}{2} u_L^2 dr = \frac{r_0^4 H_0^4}{64\pi} \int_{r_0}^{r_1} \frac{dr}{m r^3} \quad (2.2)$$

Наконец, интегрируя по объему j_r^2 / σ , вычислим джоулеву диссипацию Q в единицу времени; с учетом (1.4), (1.5) и (1.11) получим

$$Q = \int_0^L dx \int_{r_0}^{r_1} 2\pi r \frac{j_r^2}{\sigma} dr = \frac{p c^2 r_0^2 H_0^2 \ln \mu}{8\pi\sigma L} \int_0^1 [\varphi^* - (1 - H^{*2})H^*] dH^*$$

Интегрированием получаем искомое выражение для Q

$$Q = p(\varphi^* - 0.25) c^2 r_0^2 H_0^2 \ln \mu / 8\pi\sigma L \quad (2.3)$$

Сформулируем теперь задачу об эффективности коаксиальной системы. Пусть при заданном секундном расходе M необходимо получить суммарный импульс на выходе I (т. е. необходимо получить заданную тягу). Каково должно быть отношение радиусов электродов μ для того, чтобы необходимо было затратить наименьшую мощность, т. е. чтобы тяговый к.п.д. η был бы наибольшим.

Полная мощность N , затраченная на ускорение плазмы, будет равна сумме: кинетической энергии, полученной плазмой в единицу времени, джоулевой диссипации и потерям в подводящих шинах.

Если R — сопротивление подводящих шин, то имеем

$$N = RJ^2 + Q + E_k, \quad \eta = I^2 / 2MN \quad (2.4)$$

Подставляя H_0 из (2.1) в (1.10), (2.2) и (2.3), получим

$$H_0^2 = \frac{4I}{r_0^2 \ln \mu}, \quad J^2 = \frac{c^2 I}{\ln \mu}, \quad p = \frac{2\sigma LI}{c^2 (\ln \mu)^2} \int_{r_0}^{r_1} \frac{dr}{mr^3} \quad (2.5)$$

$$E_k = \frac{Ic^2 p}{8\pi\sigma L}, \quad Q = \frac{(\varphi^* - 0.25)Ic^2 p}{2\pi\sigma L}$$

В дальнейшем подробно будут рассматриваться два случая: 1) расход проводящего газа подается равномерно по всему сечению, т. е. $m = m_0 = \text{const}$; 2) расход обратно пропорционален квадрату радиуса, т. е. $m = m_0 r_0^2 / r^2$ (близкое к такому распределению расхода по сечению получается при работе импульсных моделей на эрозии).

Вычисляя соответствующий интеграл в (2.1) и выражая из (2.1) константу m_0 через постоянный суммарный расход M и отношение радиусов электродов μ , получим для первого и второго случаев соответственно

$$m_{01} = M / \pi r_0^2 (\mu^2 - 1), \quad m_{02} = M / 2\pi r_0^2 \ln \mu \quad (2.6)$$

Всюду в дальнейшем индекс 1 будет относиться к величинам, вычисленным для случая равномерного расхода по сечению, а индекс 2 — для случая расхода, обратного пропорционального квадрату радиуса.

Подставляя выражения для m , а также для m_0 из (2.6) в (2.5) и вычисляя интеграл, найдем для рассматриваемых двух вариантов величину p

$$p_1 = \frac{\pi\sigma LI (\mu^2 - 1)^2}{c^2 M \mu^2 (\ln \mu)^2}, \quad p_2 = \frac{4\pi\sigma LI}{c^2 M} \quad (2.7)$$

Из (2.7) видно, что p_2 равняется магнитному числу Рейнольдса R_m , подсчитанному по скорости истечения, определенной с сохранением импульса и массы, а

$$p_1 = R_m (\mu^2 - 1)^2 / 4\mu^2 (\ln \mu)^2$$

Из (2.4), (2.5) и (2.7) получим для суммарной мощности

$$N_1 = \frac{I^2}{2M} \left[\frac{2Rc^2 M}{I \ln \mu} + \varphi_1^* \frac{(\mu^2 - 1)^2}{\mu^2 (\ln \mu)^2} \right], \quad N_2 = \frac{I^2}{2M} \left(\frac{2Rc^2 M}{I \ln \mu} + 4\varphi_2^* \right) \quad (2.8)$$

3. Поставленная задача о минимальной мощности имеет очевидное решение во втором случае, т. е. когда расход газа обратно пропорционален квадрату радиуса. Как видно из второй формулы (2.8), сумма кинетической энергии и джоулевой диссипации в канале в этом случае не зависит от отношения радиусов электродов μ . А так как потери во внешней цепи убывают с ростом μ , то минимальная мощность будет при $\mu \rightarrow \infty$. Максимальное значение к.п.д. $\eta = I^2 / 2MN$ зависит при этом только от p_2 , т. е. только от значения магнитного числа Рейнольдса. Эта зависимость $\max \eta_2$ от R_m показана на фиг. 2. При $R_m \rightarrow \infty$ параметр φ_2^* стремится к значению $2/3\sqrt{3} \approx 0.385$ и $\max \eta_2 \approx 0.65$.

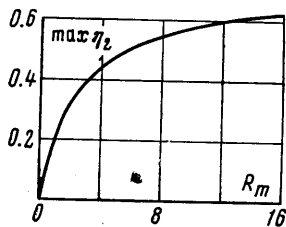
Иначе обстоит дело, когда расход подается равномерно по радиусу. В этом случае при заданном сопротивлении внешней цепи имеется определенное конечное значение μ^* , при котором мощность имеет минимум, а к.п.д. максимум. На фиг. 3 для $R_m = 10$ и $R^* = 0.4$ по формулам (2.4), (2.8) построена кривая $\eta_1(\mu)$. При возрастании μ от единицы η быстро возрастает, достигая максимума, а затем падает, и, как следует из (1.12) и (2.8), $\eta \rightarrow 0$ при $\mu \rightarrow \infty$ (так как $p \rightarrow \infty$ при $\mu \rightarrow \infty$, а $\varphi^* \rightarrow 2/3\sqrt{3}$).

Для определения значения μ^* , при котором достигается $\max \eta_1$, продифференцируем по μ первое уравнение (2.8)

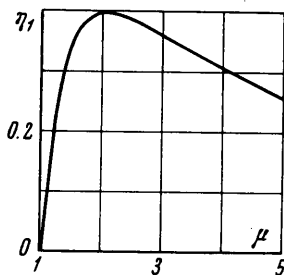
$$\frac{2M}{I^2} \frac{dN_1}{d\mu} = -\frac{R^*}{\mu(\ln \mu)^2} + 2 \left[\frac{d\varphi_1^*}{dp_1} \frac{R_m}{4} \frac{(\sigma^2 - 1)^2}{\mu^2(\ln \mu)^2} + \varphi_1^* \right] \frac{(\mu^4 - 1)\ln \mu - (\mu^2 - 1)^2}{\mu^3(\ln \mu)^3} \quad (3.1)$$

$$R^* = 2Rc^2M / I$$

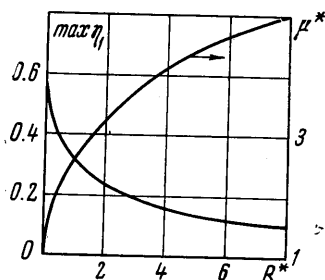
Приравнявая нулю правую часть (3.1), получим уравнение для определения искомого значения μ^* . На фиг. 4 дана зависимость μ^* от R^* при $R_m = 10$. На фиг. 4 нанесена для $R_m = 10$ величина $\max \eta_1$ как функция безразмерного внешнего со-



Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

противления R^* . Из фиг. 4 видно, что функция $\mu^*(R^*)$ быстро возрастает при малых R^* . Для наглядности заметим, что при средней скорости истечения $I/M \approx 5 \cdot 10^6$ см/сек, как следует из (3.2), будет $R^* \approx 0.1-1.0$ при сопротивлении подводящих шин $R \approx 0.25 \cdot 10^{-3}-2.5 \cdot 10^{-3}$ ом.

Таким образом, на практике даже при малых сопротивлениях подводящей цепи оптимальное отношение радиусов электродов будет ~ 1.5 и более. Из фиг. 4 видно, что при этом может существенно падать значение к.п.д. (на 10% и более). Интересно отметить, что хотя непосредственные потери в подводящих шинах малы, однако наличие сопротивления в подводящих шинах вынуждает делать канал с большим зазором. При этом возникает неравномерность в распределении скорости на выходе, которая может приводить к существенному снижению к.п.д.

4. При любой степенной зависимости расхода от радиуса (кроме показателя степени равного минус двум) картина остается качественно такой же, как и при постоянном по радиусу расходе. Действительно, пусть

$$m = m_0(r/r_0)^\alpha, \quad \mu^{1/2|\alpha+2|} = \mu_\alpha, \quad R_\alpha^* = |\alpha + 2| Rc^2M / I \quad (4.1)$$

Тогда из общих формул (2.1), (2.4), (2.5) получим

$$m_0 = \frac{M(\alpha + 2)}{2\pi r_0^2(\mu_\alpha^2 - 1)}, \quad p = \frac{R_m}{4} \frac{(\mu_\alpha^2 - 1)^2}{\mu_\alpha^2(\ln \mu_\alpha)^2}, \quad N = \frac{I^2}{2M} \left[\frac{R_\alpha^*}{\ln \mu_\alpha} + \frac{(\mu_\alpha^2 - 1)^2 \varphi^*}{\mu_\alpha^2(\ln \mu_\alpha)^2} \right] \quad (4.2)$$

Сравнивая формулы (4.2) с формулами (2.7) и (2.8) для p_1 и N_1 при постоянном по радиусу расходе, видим, что они отличаются только заменой μ на μ_α и R^* на R_α^* .

Отсюда заключаем, что связь оптимального значения μ_α^* с R_α^* (т. е. того значения μ_α , при котором N минимально) будет такая же, как и связь μ^* с R^* . Такой же, как и при $\alpha = 0$, получится и функция $\eta(R_\alpha^*)$. Остаются в силе и все качественные выводы о зависимости η от сопротивления подводящих шин, R_m и отношения радиусов электродов. Различие состоит лишь в том, что, как видно из формулы (4.1), при одинаковых значениях сопротивления подводящих шин R , суммарного расхода M и суммарного импульса I будет $R_\alpha^* > R^*$ при $|\alpha + 2| > 2$ и $R_\alpha^* < R^*$ при $|\alpha + 2| < 2$. Отсюда и из фиг. 4 следует, что к.п.д. будет при $|\alpha + 2| > 2$ меньше, а при $|\alpha + 2| < 2$ больше, чем в случае равномерного распределения расхода по радиусу, когда $\alpha = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

Поступило 2 VI 1967

1. Бам-Зеликович Г. М. Одномерное неустановившееся движение проводящего газа под действием сильных электромагнитных полей. Изв. АН СССР. ОТН, Механика и машиностроение, 1963, № 2.
2. Куликовский А. Г., Любимов Г. А. Магнитная гидродинамика. Физматгиз, 1962.