

## ПУЛЬСАЦИЯ ДАВЛЕНИЯ НА ГРАНИЦЕ РАВНОМЕРНОГО ТУРБУЛЕНТНОГО ПОТОКА

В. М. ЛЯТХЕР

(Москва)

Сведения о давлении на границе турбулентного потока необходимы для многих динамических расчетов гидросооружений, для расчета конструкций, быстро движущихся в воде или воздухе.

Для оценки осредненного во времени («статического») значения давления с успехом применяются интегральные теоремы гидродинамики. Некоторые исследователи применяли такой подход и к динамическим задачам, используя связь между скоростью и давлением в форме уравнения Бернулли, записываемого для локального объема или струйки жидкости [1]. Такой подход представляется недостаточно эффективным, так как пульсация давления (в отличие от пульсации скорости) определяется не только локальными свойствами потока вблизи рассматриваемой точки, но в значительной мере — кинематическими условиями во всей области течения.

Задача о пульсации давления на границе потока в достаточно строгой постановке впервые рассмотрена Коркосом [2], вычислившем автокорреляционную функцию и другие характеристики пульсации давления на тонкой пластинке. Коркос исходил из линеаризованного уравнения типа (2), решение которого было представлено в форме интеграла-свертки от взаимной корреляционной функции пульсации давления и производной скорости  $\partial v / \partial x$ .

Метод Коркоса все же нельзя считать совершенным, поскольку в расчетах приходится опираться на косвенные результаты измерения отыскиваемой функции.

В настоящей статье сходная задача решается иначе. Цель решения, выполненного в некоторых деталях на уровне обычных инженерных методов, заключается в отыскании явной связи между кинематическими характеристиками равномерного турбулентного потока и статистическими параметрами пульсации давления на его жесткой границе.

Рассматривается равномерный безнапорный турбулентный поток несжимаемой жидкости в канале большой ширины (плоская задача<sup>1</sup>). Применяя операцию дивергенции к уравнениям Навье — Стокса, осредняя полученные уравнения по ансамблю мгновенных состояний потока и вычитая эти осредненные уравнения из неосредненных, получим дифференциальное уравнение эллиптического типа относительно пульсации давления  $p$  [3]

$$\frac{1}{\rho} \nabla^2 p = - \sum_i \sum_k \frac{\partial^2 (u_i u_k)}{\partial x_i \partial x_k} + \sum_i \sum_k \frac{\partial^2 \langle u_i u_k \rangle}{\partial x_i \partial x_k} - \sum_i \sum_k \frac{\partial^2 (U_i u_k + U_k u_i)}{\partial x_i \partial x_k} \quad (1)$$

Здесь прописными буквами обозначены осредненные величины.

В ядре турбулентного потока первые два члена в правой части (1) заведомо меньше последнего. Это соотношение сохранится и в пристенном слое, если условиться пульсационные компоненты скорости и давления осреднять по объему с линейным размером, на порядок большим внутреннего (колмогоровского) масштаба турбулентности. Сохраняя в правой

<sup>1</sup> Для турбулентного потока в термин «плоская задача», помимо обычного содержания, вкладывается предположение о наличии единичной поперечной корреляции между одноименными пульсирующими величинами.

части (1) только линейные члены, для рассматриваемых условий можем записать

$$\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} \right) \approx -2 \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2)$$

Ось  $y$  направлена вверх от поверхности воды, ось  $x$  — вдоль потока. Сведения, необходимые для статистического описания кинематической функции  $f(x, y, t)$  в правой части (2), предполагаем известными. Краевые условия для уравнения (1) имеют следующий вид:

на свободной поверхности

$$y = 0, \quad p = 0 \quad (3)$$

на жестком (неподвижном) дне потока из уравнений движения и неразрывности

$$\partial p / \partial y = \nu \partial^2 u / \partial y^2, \quad y = -H = -1 \quad (4)$$

Если на границе существует ламинарный подслой конечной толщины, внутри которого вертикальные пульсации равны нулю, условие (4) превращается в однородное

$$\partial p / \partial y|_{y=-1} = 0 \quad (5)$$

Когда ламинарного подслоя нет, условие (5) принимается в качестве первого приближения, не противоречащего опытными данным ([3], стр. 276).

Решение уравнения (2), удовлетворяющее условиям (3), (5) и ограниченное при  $x \rightarrow \pm \infty$  для точек, расположенных на дне потока, имеет вид

$$p(x, t) = \int_{-1}^0 \int_{-\infty}^{\infty} G(x, \xi, \eta) f(\xi, \eta, t) d\xi d\eta \quad (6)$$

$$G(x, \xi, \eta) = \frac{1}{2\pi} \ln \frac{\operatorname{ch}^{1/2} \pi(x - \xi) + \sin^{1/2} \pi \eta}{\operatorname{ch}^{1/2} \pi(x - \xi) - \sin^{1/2} \pi \eta}$$

В выражении (6) символ  $p$  сохранен для обозначения пульсации давления, разделенного на плотность жидкости; координата  $x$ , параметры  $\xi$  и  $\eta$  измерены в долях глубины потока  $H$ .

Применяя к равенству (6) преобразования Фурье с комплексно сопряженными параметрами, перемножая образы и вычисляя математическое ожидание, найдем продольную спектральную плотность пульсации давления

$$S_p(\mu) = \frac{1}{\mu^2 \operatorname{ch}^2 \mu} \int_{-1}^0 \int_{-1}^0 S_{f_{\eta\eta'}}(\mu) \operatorname{sh} \mu \eta \operatorname{sh} \mu \eta' d\eta d\eta' \quad (7)$$

Здесь  $S_{f_{\eta\eta'}}$  — взаимная спектральная плотность пульсаций функции  $f$  в точках  $y = \eta$  и  $y = \eta'$

$$S_{f_{\eta\eta'}} = 4\mu^2 (\partial U / \partial y)_{y=\eta} (\partial U / \partial y)_{y=\eta'} S_{v_{\eta\eta'}} \quad (8)$$

Расчеты, выполненные на основе экспериментальных данных Фавра и др. ([4] и более ранние работы, упомянутые в библиографии к этой статье), данных И. К. Никитина [5] и Е. М. Минского [6], показали, что при вычислении интеграла (7) взаимную спектральную плотность  $S_{v_{\eta\eta'}}$  можно заменить произведением нормированной спектральной плотности

$$\tilde{s}(\mu) = \sqrt{s_{\eta\eta'}},$$

осредненной в слое  $(\eta, \eta')$ , и ковариации  $v'(\eta)v'(\eta')\tilde{r}_{\eta\eta'}$ , где  $\tilde{r}_{\eta\eta'}$  — значение корреляций вертикальных пульсаций, осредненное на интервале<sup>1</sup>  $(\eta, \eta')$

$$S_{v_{\eta\eta}} \approx v'(\eta)v'(\eta')\tilde{s}(\mu)\tilde{r}_{\eta\eta'} \quad (9)$$

Согласно опытным данным, нормированная спектральная плотность пульсаций вертикальных компонент скорости  $\tilde{s}(\mu)$  при больших числах Рейнольдса имеет характерный малоизменяющийся вид внутри каждой из следующих зон потока: придонной  $s_1(\mu)$ , пограничной  $s_2(\mu)$  и ядра течения  $s_3(\mu)$  ([5], стр. 90).

Распределение стандарта пульсаций вертикальной составляющей скорости  $v'$  по глубине равномерного турбулентного потока во всех случаях оказывается практически неизменным ([5], стр. 109). Для наших целей это распределение можно упрощенно описать, считая величину  $v'$  изменяющейся по линейному закону в зоне у дна

$$v' = 0.95v_{\max}'(1 + y) \quad (-1 \leq y \leq -0.94) \quad (10)$$

и постоянной в остальной части потока

$$v' = 0.95v_{\max}' \quad (-0.94 \leq y \leq 0)$$

Поперечные корреляции  $r_v(\eta, \eta')$  в безнапорном канале, согласно измерениям Е. М. Минского ([6], стр. 108), обладают свойством, общим для всех зон потока. При увеличении  $|\eta - \eta'|$  от 0 до 0.08 величина  $r_v$  резко убывает от 1 до 0.5—0.3; при дальнейшем увеличении  $|\eta - \eta'|$  величина  $r_v$  изменяется медленно, не опускаясь ниже значений 0.25—0.15.

Градиент продольной осредненной скорости  $\partial U / \partial y$  вычислен по формулам И. К. Никитина [5], согласующимся с рекомендациями других авторов [7]

$$\frac{\partial U}{\partial y} = 2.8U_* \left[ \frac{1}{1+y} + \frac{\delta}{(1+y)^2} \right] \quad (\delta - 1 \leq y \leq 0) \quad (11)$$

$$\frac{\partial U}{\partial y} = 5.6 \frac{U_*}{\delta} \quad (-1 \leq y \leq \delta - 1), \quad U_* = \sqrt{\frac{\tau}{\rho}} = \sqrt{gHI}$$

Здесь  $U_*$  — «скорость трения» на дне;  $I$  — «уклон трения» в потоке,  $g = 9.81 \text{ м/сек}^2$ ,  $\delta$  — толщина придонного слоя в долях глубины потока [5].

Вычисляя (7) с использованием (8) — (11), найдем

$$S_p(\mu) = U_*^2 (v_{\max}')^2 S_p^0(\mu) \quad (12)$$

$$S_p^0 = 31.5 \frac{v_{\delta}'^2}{v_{\max}'^2} \tilde{r}_1 \text{th}^2 \mu s_1(\mu) + 60.0 \frac{v_{\delta}'^2}{v_{\max}'^2} \tilde{r}_2 J \text{th} \mu \sqrt{s_2 s_3} + 28.4 \tilde{r}_3 J_0 s_3(\mu)$$

$$J = J(\delta, \mu) = J_1(\delta, \mu) + \delta [J_2(\delta, \mu) + J_3(\mu)] \quad (13)$$

$$J_0 = J^2 + 0.1 \frac{1 - \tilde{r}_3}{\tilde{r}_3} J_4(\delta, \mu) \quad (14)$$

<sup>1</sup> Значение  $S_{v_{\eta\eta'}}(\mu)$ , весьма близкое к точному, дает формула

$$S_{v_{\eta\eta'}}(\mu) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} R_x(l) \frac{\cos \mu \vartheta(l)}{\vartheta(l)} dl, \quad \vartheta(l) = \left[ 1 - \left( \frac{\eta - \eta'}{R^{-1}(R_x)} \right)^2 \right]^{1/2}$$

Здесь  $R_x(l)$  — нормированная продольная корреляция вертикальных пульсаций скорости, осредненная в слое  $(\eta, \eta')$ ;  $R^{-1}$  — обратная функция поперечной корреляции вертикальных пульсаций скорости.

В соотношениях (13) и (12)

$$J_1(\delta, \mu) = \frac{16.67}{\mu \operatorname{ch} \mu} [\operatorname{ch}(1 - \delta)\mu - \operatorname{ch} 0.94\mu] + \frac{1}{2 \operatorname{ch} \mu} \{e^\mu [\operatorname{Ei}(-\mu) - \operatorname{Ei}(-0.06\mu)] - e^{-\mu} [\operatorname{Ei} \mu - \operatorname{Ei} 0.06\mu]\} \quad (15)$$

$$J_2(\delta, \mu) = \frac{8.34}{\operatorname{ch} \mu} [e^{-\mu} \operatorname{Ei} \delta\mu - e^\mu \operatorname{Ei}(-\delta\mu)] \quad (16)$$

$$J_3(\mu) = \frac{8.34}{\operatorname{ch} \mu} [e^\mu \operatorname{Ei}(-0.06\mu) - e^{-\mu} \operatorname{Ei} 0.06\mu] + \frac{\mu}{2 \operatorname{ch} \mu} [e^{-\mu} (\operatorname{Ei} 0.06\mu - \operatorname{Ei} \mu) + e^\mu (\operatorname{Ei}(-0.06\mu) - \operatorname{Ei} \mu)] + 16.67 \frac{\operatorname{sh} 0.94\mu}{\operatorname{ch} \mu} \quad (17)$$

$$J_4(\delta, \mu) = \frac{\operatorname{sh}^2 0.94\mu}{\operatorname{ch}^2 \mu} \left[ 0.06 + 2\delta \ln \frac{0.06}{\delta} - 16.67\delta^2 \right] + \frac{1}{\operatorname{ch}^2 \mu} \{7.34 + 8.34 \operatorname{ch} 1.88\mu - \frac{1}{2} \mu [e^{2\mu} (\operatorname{Ei}(-2\mu) - \operatorname{Ei}(-0.12\mu)) - e^{-2\mu} (\operatorname{Ei} 2\mu - \operatorname{Ei} 0.12\mu)]\} \quad (18)$$

Здесь  $\bar{r}_1 = 1.0$ ,  $\bar{r}_2 = 0.23$ ,  $\bar{r}_3 = 0.33$  — осредненные значения корреляции вертикальных пульсаций скорости в областях

$$(-1 \leq \eta < \delta - 1, \quad -1 \leq \eta' < \delta - 1)$$

$$(-1 \leq \eta < \delta - 1, \quad \delta - 1 \leq \eta' \leq 0)$$

$$(\delta - 1 \leq \eta \leq 0, \quad \delta - 1 \leq \eta' \leq 0, \quad \eta \leq \eta' - 0.05, \quad \eta \geq \eta' + 0.05)$$

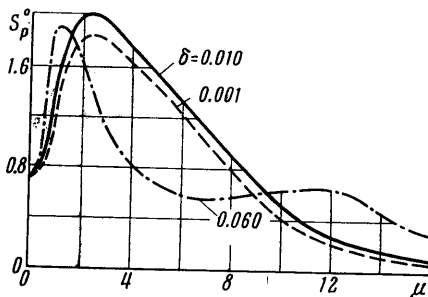
соответственно;  $v_\delta'$  — стандарт вертикальных пульсаций скорости на границе придонного слоя.  $\operatorname{Ei} z$  — интегральная показательная функция. Формулы (16) — (20) справедливы при  $\delta \leq 0.06$ . Аналогичные соотношения получены и для  $\delta > 0.06$ .

Спектральные плотности  $s_j(\mu)$  ( $j = 1, 2, 3$ ) по данным И. К. Никитина приближенно аппроксимируются выражением<sup>1</sup>

$$s_j(\mu) = \frac{1}{\pi} \left\{ A_j \frac{\alpha_j}{\mu^2 + \alpha_j^2} + B_j \frac{\beta_j(\mu^2 + \beta_j^2 + \gamma_j^2)}{(\mu^2 - \beta_j^2 - \gamma_j^2)^2 + 4\beta_j^2\mu^2} \right\} \quad (19)$$

Здесь  $j = 1$  соответствует придонному слою потока,  $j = 3$  — ядру течения,  $j = 2$  — промежуточному слою между придонной зоной и ядром потока. Параметры, входящие в (19), имеют значения

$j$	$A_j$	$B_j$	$\alpha_j$	$\beta_j$	$\gamma_j$
1	0.4	0.6	1.00	4.00	11.0
2	0.3	0.7	1.27	2.85	10.5
3	0	1.0	—	4.35	6.0



Фиг. 1

Результаты вычислений спектральной плотности пульсации давления (Фиг. 1) указывают на относительно малое влияние толщины пограничного слоя при  $\delta \leq 0.01$ .

Функция  $S_p(\mu)$  при  $\delta \leq 0.01$  имеет один максимум при значениях безразмерного волнового числа  $\mu = 2\pi H / \lambda \approx 2.4$ .

При  $\delta \rightarrow 0.06$  возрастает отношение  $v_\delta' / v'_{\max}$ , уменьшаются коэффициенты  $J$

<sup>1</sup> Аппроксимация подобрана по корреляционным функциям, полученным И. К. Никитиным непосредственно из опытов. Вычисления  $s(\mu)$ , приведенные в [5], содержат методическую погрешность. Результаты И. К. Никитина и аппроксимация (19) характеризуют спектры только в области низких частот, где не проявляются свойства локальной изотропии.

и  $J_0$ , поэтому влияние турбулентности в придонном слое резко усиливается. Спектр пульсаций давления расширяется в сторону высоких частот.

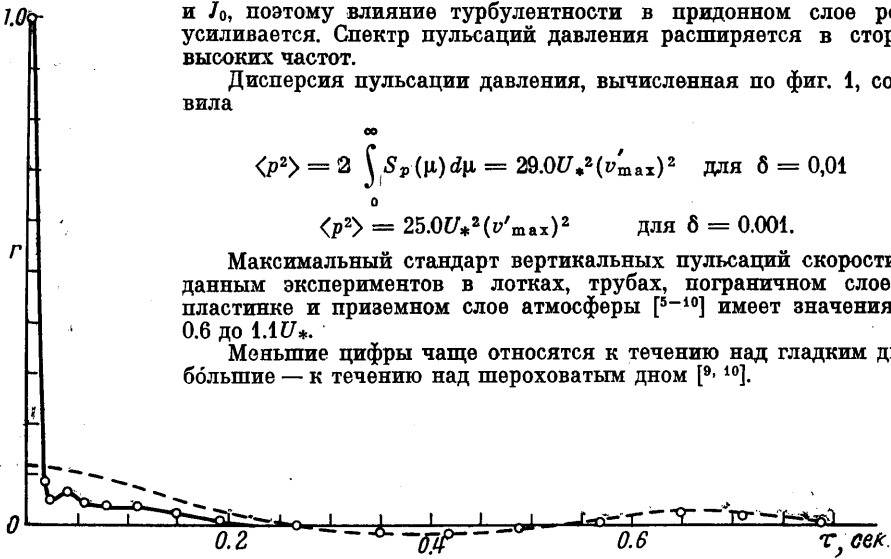
Дисперсия пульсации давления, вычисленная по фиг. 1, составила

$$\langle p^2 \rangle = 2 \int_0^{\infty} S_p(\mu) d\mu = 29.0 U_*^2 (v'_{\max})^2 \quad \text{для } \delta = 0,01$$

$$\langle p^2 \rangle = 25.0 U_*^2 (v'_{\max})^2 \quad \text{для } \delta = 0.001.$$

Максимальный стандарт вертикальных пульсаций скорости по данным экспериментов в лотках, трубах, пограничном слое на пластинке и приземном слое атмосферы [5-10] имеет значения от 0.6 до  $1.1 U_*$ .

Меньшие цифры чаще относятся к течению над гладким дном, большие — к течению над шероховатым дном [9, 10].



Фиг. 2

Приняв ту или другую цифру, найдем оценку для стандарта пульсации давления ( $\delta \approx 0.01$ ).

$$p' = (3.24 - 5.92) U_*^2 \quad (20)$$

Согласно обширным американским опытам [2], стандарт пульсации давления на дно при числе Рейнольдса  $\sim 300\,000$  в условиях дозвукового течения составляет

$$p' = (3.0 \pm 0.5) U_*^2 \quad (21)$$

В сверхзвуковом потоке [11] и в потоках с числом Рейнольдса  $15\,000 - 30\,000$  [2] стандарт пульсаций давления по данным опытов увеличивается до

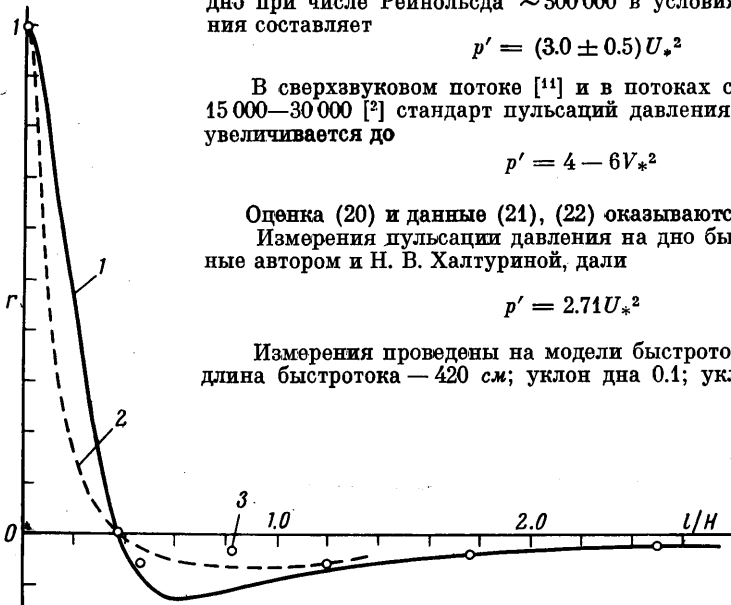
$$p' = 4 - 6 V_*^2 \quad (22)$$

Оценка (20) и данные (21), (22) оказываются одного порядка.

Измерения пульсации давления на дно быстрого тока, выполненные автором и Н. В. Халтуриной, дали

$$p' = 2.71 U_*^2$$

Измерения проведены на модели быстрого тока шириной 175 см; длина быстрого тока — 420 см; уклон дна 0.1; уклон линии энергии



Фиг. 3

в районе датчика давления — 0.025 (движение ускоренно); глубина воды — 3.25 см; средняя по глубине скорости течения над датчиком — 160 см/сек (число Рейнольдса  $R = 52\,000$ ); диаметр приемной площадки датчика — 0.8 см,  $U_* = 9.25$  см/сек.

На фиг. 2 приведена нормированная автокорреляционная функция пульсации давления, полученная в этом опыте.

На фиг. 2 отчетливо видна низкочастотная составляющая (пунктир на фиг. 2). Более подробный анализ и сопоставление с данными наблюдений за поверхностью воды позволяют считать эту составляющую волнового происхождения. На фиг. 3 нормированная турбулентная составляющая корреляционной функции, полученная экспериментально (3), сопоставлена с корреляционной функцией (линия 1), вычисленной по спектральной плотности  $S_p(\mu)$ , показанной на фиг. 1 (для  $\delta = 0.01$ ).

Экспериментальные данные согласуются с теорией, если принять, что скорость сноса возмущения  $U_p$  (характерная скорость, используемая при переходе от временного масштаба автокорреляционной функции к продольному масштабу длин) составляет 0.48 средней по глубине скорости потока. На той же фиг. 3 пунктиром (линия 2) показаны результаты пересчета данных Вулдриджа и Уильмарта, относящихся к пограничному слою на пластине [12, 2]. Скорость сноса возмущений здесь принята равной  $0.8 U_\infty$  (как это фактически получено в опытах [12]), толщина слоя вытеснения  $\delta^*$ , принятая в [2] в качестве характерного линейного размера, выражена через глубину потока

$$\delta^* = \int_0^1 \left( 1 - \frac{U}{U_{\max}} \right) dy \approx 0.17$$

Сопоставляя с теорией экспериментальные данные, полученные при помощи датчиков с конечным (иногда относительно большим) линейным размером приемной площадки  $L$ , следует учитывать искажение спектра и особенно дисперсии пульсации давления, вносимое этим датчиком за счет осреднения турбулентного давления по поверхности приемной площадки. В условиях плоской задачи искаженный спектр  $S_p(\omega)$  связан с истинным спектром  $S_p(\mu)$  соотношением

$$S_p(\omega) = \frac{2}{L^2} \frac{(1 - \cos \omega L)}{\omega^2} S_p(\mu), \quad \omega = \mu U_p \quad (23)$$

При размере приемной площадки датчика (0.10—0.25)  $H$  преуменьшение дисперсии пульсации давления может достигать 15—25%. В частности, полученное на быстрой струе значение  $p'$  должно быть увеличено до  $3.0 U_*^2$ . Так как искажения велики в высокочастотной части спектра, общий ход нормированной корреляционной функции изменяется относительно мало.

Поступило 21 VIII 1965

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Кумин Д. И. Пульсация давления при сопряжении бьефов и связь ее с пульсацией скорости. Изв. ВНИИГ, 1959, т. 62.
2. Corcos G. M. The structure of the turbulent pressure field in boundary-layer flows. J. Fluid Mech., 1964, vol. 18, pt. 3, p. 353—378.
3. Таунсенд А. А. Структура турбулентного потока с поперечным сдвигом. Изд. иностр. лит., 1959.
4. Favre A. J., Gaviglio J. J., Dumas R. Space-time correlations and spectra in a turbulent boundary layer. J. Fluid Mech., 1957, vol. 2, pt. 4, p. 313—342.
5. Никитин И. К. Турбулентный русловый поток и процессы в придонной области. Изд. АН СССР, 1963.
6. Минский Е. М. Турбулентность руслового потока. Гидрометеоздат, 1952.
7. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика, ч. 1, Изд-во «Наука», 1965.
8. Фидман Б. А. Основные результаты экспериментального изучения структуры турбулентных потоков. Сб. «Проблемы русловых процессов», Гидрометеоздат, 1953, стр. 138—150.
9. Фидман Б. А. Результаты измерения турбулентности в равномерном и резко расширяющемся потоках. Изв. АН СССР, ОН, 1953, № 11, с. 1630—1644.
10. Фидман Б. А. О влиянии шероховатости стенок на структуру турбулентного потока. Изв. АН СССР, ОН, 1954, № 2.
11. Kistler A. L., Chen W. S. The fluctuating pressure field in a supersonic turbulent boundary layer. J. Fluid Mech., 1963, vol. 16, pt. 2, p. 41—65.
12. Willmarth W. W., Wooldridge C. E. Measurements of the fluctuating pressure at the wall beneath a thick turbulent boundary layer. J. Fluid Mech., 1962, vol. 14, pt. 2, p. 187—210.