АСИМПТОТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ НЕСЖИМАЕМОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ С ОТРИЦАТЕЛЬНЫМ ГРАДИЕНТОМ ДАВЛЕНИЯ ПРИ БОЛЬШИХ ВДУВАХ

В. Н. ФИЛИМОНОВ

(Москва)

При входе тел в атмосферу Земли с большими скоростями унос массы с поверхности тела вследствие больших конвективных и главным образом радиационных потоков может стать сколь угодно большим, т. е. вдув в пограничный слой может стремиться к бесконечности. В настоящей статье приводится решение уравнений Прандтля для несжимаемого пограничного слоя с отрицательным градиентом давления $(dp / dx < 0)$ при больших вдувах. При условии $dp / dx < 0$ существование решения уравнений пограничного слоя при наличии произвольного вдува доказано в работе О. А. Олейник [1].

Полученное асимптотическое решение совпадает с численным точным решением при таких величинах вдува, когда еще остается справедливым приближение пограничного слоя. Ранее аналогичное решение для автомодельных уравнений в окрестности критической точки было получено в работе [2]. Использование асимптотического решения позволило найти выражение для коэффициента трения, удобное при конкретных расчетах в случае произвольных отрицательных градиентов давления.

1. Отправной точкой будут уравнения Прандтля

$$u\partial u / \partial x + v\partial u / \partial y = UdU / dx + \nu\partial^2 u / \partial y^2, \tag{1.1}$$

$$\partial u / \partial x + \partial v / \partial y = 0$$

с граничными условиями

$$u(x, 0) = 0, \qquad v(x, 0) = v_0(x), \qquad u(x, \infty) = U(x) \tag{1.2}$$

Здесь x, u — расстояние и скорость вдоль поверхности тела; y, v — расстояние и скорость по нормали к телу; U — скорость потенциального потока.

В дальнейшем удобно перейти от этих переменных к новым, используя преобразования, предложенные в работе [3]

$$\xi = \frac{1}{LV}\int_0^x U(x)\,dx, \qquad \eta = \frac{1}{\sqrt{\nu LV}}\frac{U(x)}{\sqrt{2\xi}}\,y$$

Введем функцию тока $\psi(x, y)$ так, что

$$u = \partial\psi / \partial y, \quad v = -\partial\psi / \partial x, \quad \psi(x, y) = \sqrt{\nu LV}\sqrt{2\xi}\,f(\xi, \eta)$$

Здесь V в L — характерная скорость и характерное расстояние. Тогда уравнения (1.1) преобразуются следующим образом:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial\eta^3} + f\frac{\partial^2 f}{\partial\eta^2} + \Lambda\left[1 - \left(\frac{\partial f}{\partial\eta}\right)^2\right] = 2\xi\left(\frac{\partial f}{\partial\eta}\frac{\partial^2 f}{\partial\eta\,\partial\xi} - \frac{\partial f}{\partial\xi}\frac{\partial^2 f}{\partial\eta^2}\right) \tag{1.3}$$

Условия (1.2) примут вид

$$f_\eta'(\xi, 0) = 0, \qquad f_\eta'(\xi, \infty) = 1, \qquad f(\xi, 0) = -\alpha \tag{1.4}$$

$$\left(\Lambda = 2\xi\frac{1}{U}\frac{dU}{d\xi}, \qquad v_0 = \left(\frac{\nu}{LV}\right)^{1/2}\frac{U}{\sqrt{2\xi}}\,\alpha\right)$$

При $\xi = 0$ получаем задачу для обыкновенного дифференциального уравнения. Эта задача была решена в работе [2]. Последнее из условий (1.4) принимает именно такой вид, если потребовать, чтобы при $\xi \to 0$ решение уравнения (1.3) переходило в решение, полученное в работе [2].

Основная задача будет состоять в нахождении коэффициента трения

$$c_f = \frac{\mu}{{}^1/_2 \rho V^2} \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0} = \left(\frac{\nu}{LV}\right)^{1/2} \frac{U^2}{V^2} f_{\eta\eta}''(\xi, 0)$$

Из (2.1) следует, что необходимо найти явное выражение для $f_{\eta\eta}''(\xi, 0)$. Возвращаясь к уравнению (1.3), проведем следующие преобразования:

$$z = \eta / \alpha, \quad \lambda = -f / \alpha, \quad \omega(\xi, \lambda) = 1 - (\partial\lambda / \partial z)^2$$

Тогда (1.3) и (1.4) преобразуются следующим образом:

$$\frac{\sqrt{1-\omega}}{\alpha^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \lambda^2} + \lambda \frac{\partial \omega}{\partial \lambda} - 2\Lambda\omega = 2\xi \frac{\partial \omega}{\partial \xi} \tag{1.5}$$

$$\omega(\xi, 1) = 1, \qquad \omega(\xi, -\infty) = 0 \tag{1.6}$$

Уравнение (1.5) имеет особенность у границы $\lambda = 1$; поэтому его решение будем искать около каждой границы в отдельности. Вначале решим уравнение (1.5) около границы $\lambda = 1$, т. е. используя условие $\omega(\xi, 1) = 1$.

Величину вдува α считаем близкой к бесконечности, поэтому естественно искать решение в виде ряда

$$\omega = \omega_0 + \alpha^{-2}\omega_1 + \alpha^{-4}\omega_2 + \ldots \tag{1.7}$$

Тогда уравнение (1.5) запишется в виде системы уравнений

$$\lambda \frac{\partial \omega_i}{\partial \lambda} - 2\xi \frac{\partial \omega_i}{\partial \xi} = 2\omega_i \Lambda - \rho_i(\xi, \lambda) \qquad (i=0,1,2,\ldots) \tag{1.8}$$

$$\rho_0 = 0, \quad \rho_i = \sum_{s+k=0}^{i-1} A_s \frac{\partial^2 \omega_k}{\partial \lambda^2} \qquad (i>0)$$

$$A_0 = +\sqrt{1-\omega_0}, \quad A_1 = \frac{\omega_1}{2\sqrt{1-\omega_0}}$$

$$A_s = \frac{\omega_s}{2\sqrt{1-\omega_0}} + \sum_{k=2}^{s} B_{s-k}^k \frac{(2k-3)!!}{2^k \cdot k!} \frac{\sqrt{1-\omega_0}}{(1-\omega_0)^k} \qquad (s>1)$$

$$B_0^k = \omega_1^k, \quad B_t^k = \frac{1}{t\omega_1} \sum_{n=1}^{t} (nk - t + n)\,\omega_{n+1} B_{t-n}^k \qquad (t>0)$$

Граничные условия для системы (1.8) принимаем в виде

$$\omega_0(\xi, 1) = 1, \quad \omega_i(\xi, 1) = 0 \quad (i > 0) \tag{1.9}$$

Общее решение каждого уравнения системы (1.8) имеет вид

$$\omega_i = \frac{1}{2U^2(\xi)} \left\{ \Phi(\xi\lambda^2) + \int_0^{\xi} U^2(t) \rho_i(t, (\xi\lambda^2/t)^{1/2}) \frac{dt}{t} \right\} \tag{1.10}$$

Здесь под $U(\xi)$ понимается $U(x)$, где вместо x стоит $x(\xi)$, в этом же смысле употребляется функция $U(t)$.

Используя граничные условия (1.9), получаем

$$\omega_0 = \frac{U^2(\xi\lambda^2)}{U^2(\xi)}, \qquad \omega_i = \frac{1}{2U^2(\xi)} \int\limits_{\xi\lambda^2} U^2(t)\rho_i(t, (\xi\lambda^2/t)^{1/2})\frac{dt}{t} \quad (i > 0) \tag{1.11}$$

Теперь решим уравнение (1.5) около границы $\lambda = -\infty$, т. е. используя условие $\omega(\xi, -\infty) = 0$. Будем искать решение в виде ряда

$$\Omega(\xi, -\alpha\lambda) = C_1(\alpha)\Omega_1(\xi, -\alpha\lambda) + C_2(\alpha)\Omega_2(\xi, -\alpha\lambda) + \ldots \tag{1.12}$$

Здесь

$$\lim C_1(\alpha) = 0, \qquad \lim \frac{C_{i+1}(\alpha)}{C_i(\alpha)} = 0 \quad \text{при } \alpha \to \infty \tag{1.13}$$

Если учесть, что решение ищется в той области, где оно близко к нулю, и использовать условие (1.13), то ясно, что при достаточно больших значениях α уравнение для функции Ω_1 имеет вид

$$\partial^2\Omega_1 / \partial t^2 + t\partial\Omega_1 / \partial t = 2\lambda\Omega_1 + 2\xi\partial\Omega_1 / \partial\xi \qquad (t = -\alpha\lambda) \tag{1.14}$$

Для уравнения (1.14) имеем граничное условие

$$\Omega_1(\xi, \infty) = 0 \tag{1.15}$$

Кроме того, необходимо согласовать решение уравнения (1.14) с решением (1.11). Будем искать $\Omega_1(\xi, t)$ в виде

$$\Omega_1(\xi, t) = P(\xi)T(t) \tag{1.16}$$

Тогда (1.14) распадается на два уравнения

$$\xi dP / d\xi + P\Lambda = \varkappa P, \qquad T'' + tT' = \varkappa T \tag{1.17}$$

Решение первого из этих уравнений имеет вид

$$P(\xi) = \frac{C_p}{U^2(\xi)}\xi^\varkappa \tag{1.18}$$

Решение второго уравнения (1.17), согласно [4], имеет вид

$$T(t) = \int\limits_t^\infty e^{-1/2x^2}(x - t)^{2\varkappa}dx \tag{1.19}$$

Заметим, что здесь уже использовано условие (1.15). Подставляя (1.18) и (1.19) в (1.16), получаем

$$\Omega_1(\xi, t) = \frac{C_p\xi^\varkappa}{U^2(\xi)} \int\limits_t e^{-1/2x^2}(x - t)^{2\varkappa}dx \tag{1.20}$$

Потребуем, чтобы при $\xi \to 0$ это решение переходило в решение, полученное в работе [2] для $\xi = 0$, для этого необходимо, чтобы $C_p = a^2$, $\varkappa = 2m$, где a и m — соответственно коэффициент и показатель степени в формуле, показывающий зависимость U от ξ при малых ξ, т. е. формуле $U = a\xi^m$.

Теперь (1.20) можно записать как

$$\Omega_1(\xi, t) = \frac{a^2\xi^{2m}}{U^2(\xi)} \int\limits_t^\infty e^{-\frac{1}{2}x^2}(x-t)^{4m}dx \tag{1.21}$$

Пусть решения около каждой границы найдены и представлены в виде рядов по одним и тем же функциям, они должны быть разложениями одного и того же «истинного» решения; однако эти разложения не будут идентичными, так как в коэффициентах первого разложения окажутся такие члены, которые имеют значение только около первой границы, и наоборот.

Поэтому решения (1.12) представим в виде ряда подобного (1.7), устремим $t \to -\infty$, что соответствует $\lambda \to 1$, и приравняем результат разложению (1.7), устремив в последнем $\lambda \to 0$.

Учитывая, что $\alpha \gg 1$, получаем, что при $t \to -\infty$

$$\Omega \to C_1 \frac{a^2\xi^{2m}}{U^2(\xi)} \{\sqrt{2\pi}\,\alpha^{4m}\lambda^{4m} + 2m(4m-1)\sqrt{2\pi}\,\alpha^{4m-2}\lambda^{4m-2} + \ldots\} \tag{1.22}$$

При $\lambda \to 0$ разложение (1.7) с учетом (1.11) примет вид

$$\omega \to \frac{a^2\xi^{2m}}{U^2(\xi)} \left\{\lambda^{4m} + 2m(4m-1)\frac{1}{\alpha^2}\lambda^{4m-2} + \ldots\right\} \tag{1.23}$$

Для совпадения (1.22) и (1.23) необходимо, чтобы $C_1 = \alpha^{-4m}(2\pi)^{-1/2}$.
2. Так как $\omega = 1 - (\partial\lambda / \partial z)^2$, то $\lambda_{zz}'' = -{}^1/_2\omega_\lambda'$, поэтому

$$f_{\eta\eta}''(\xi, 0) = -\alpha^{-1}\lambda_{zz}''(\xi, 0) = {}^1/_2\alpha^{-1}\omega_\lambda'(\xi, 1) \tag{2.1}$$

Для производной ω_λ' на линии $\lambda = 1$, из (1.7) имеем

$$\frac{\partial\omega}{\partial\lambda} = \frac{\partial\omega_0}{\partial\lambda} + \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha^{2t}} \frac{\partial\omega_t}{\partial\lambda} \tag{2.2}$$

Учитывая (1.11), получаем

$$\frac{\partial\omega_0}{\partial\lambda} = 2\frac{U^2(\xi\lambda^2)}{U^2(\xi)} \frac{\Lambda(\xi\lambda^2)}{\lambda} \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial\omega_t}{\partial\lambda} = \frac{1}{2U^2(\xi)} \left\{ \int\limits_{\xi\lambda^2}^{\xi} U^2(t) \left[\frac{\partial}{\partial\lambda}\rho_t\left(t, \sqrt{\frac{\xi\lambda^2}{t}}\right)\right] \frac{dt}{t} - \right.$$

$$\left. - U^2(\xi\lambda^2)\rho_t(\xi\lambda^2, 1)\frac{2}{\lambda}\right\} \qquad (t > 0) \tag{2.4}$$

Устремляя $\lambda \to 1$, из (2.3) и (2.4) получаем

$$\partial\omega_0(\xi, 1) / \partial\lambda = 2\Lambda(\xi), \qquad \partial\omega_t(\xi, 1) / \partial\lambda = -\rho_t(\xi, 1)\ (t > 0) \tag{2.5}$$

Подставляя (2.5) в (2.2), получаем

$$\omega_\lambda'(\xi, 1) = 2\Lambda(\xi) - \sum_{t=1} \frac{\rho_t(\xi, 1)}{\alpha^{2t}} \tag{2.6}$$

Так как $\omega_0(\xi, 1) = 1$, то первый член ряда (2.6)

$$\rho_1(\xi, \lambda) = \sqrt{1-\omega_0}\partial^2\omega_0 / \partial\lambda^2 = 0 \quad \text{при } \lambda = 1$$

В выражении второго члена ряда (2.6)

$$\rho_2(\xi,\lambda) = \frac{\partial^2\omega_1}{\partial\lambda^2}\sqrt{1-\omega_0} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2\omega_0}{\partial\lambda^2}\frac{\omega_1}{\sqrt{1-\omega_0}}$$

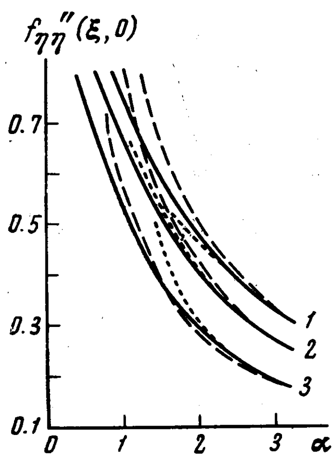
при $\lambda \to 1$ первое слагаемое стремится к $2\Lambda(2\Lambda^2 - \Lambda + 2\xi\Lambda')$, а второе — к нулю. Поэтому (2.6) запишется так:

$$\omega_\lambda'(\xi, 1) = 2\Lambda - 2\Lambda\alpha^{-4}(2\Lambda^2 - \Lambda + 2\xi\Lambda') + O(\alpha^{-6})$$

Окончательно, возвращаясь к (2.1), получаем

$$f_{\eta\eta}''(\xi, 0) = \frac{\Lambda}{\alpha}\{1 - \alpha^{-4}(2\Lambda^2 - \Lambda + 2\xi\Lambda') + O(\alpha^{-6})\} \tag{2.7}$$

Эта формула показывает, что отрыв пограничного слоя ($f_{\eta\eta}''(\xi, 0) = 0$) при $\alpha \to \infty$ будет происходить в той точке ξ_0, где $\Lambda(\xi_0) = 0$. Но условие отрыва $\Lambda \leqslant 0$ в принятых обозначениях эквивалентно условию $dp / dx \geqslant 0$. Отсюда следует, что отрыв произойдет в точке поверхности, в которой прекращается падение давления.



В частном случае плоского бесциркуляционного обтекания круглого цилиндра

$$\Lambda = (1 - 2\xi) / (1 - \xi) \tag{2.8}$$

формула (2.7) имеет вид

$$f_{\eta\eta}''(\xi, 0) = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1-2\xi}{1-\xi}\right)\left[1 - \frac{1}{\alpha^4}\frac{1-6\xi}{1-\xi} + O\left(\frac{1}{\alpha^6}\right)\right]$$

Сравнение результатов вычисления по формуле (2.8) с точным численным решением показало, что уже при $\alpha = 2$ расхождение между численным и аналитическим решениями не превосходит 2%. Кроме того, при $\alpha \gtrsim 2$ первое и второе приближения лежат по разные стороны от численного решения, как это видно из приведенной фигуры, где семейства кривых *1, 2, 3* соответствуют $\xi = 0$, 0.15, 0.3; сплошная кривая есть результат численного решения, штриховая линия — первого приближения, а пунктирная — второго. Это позволяет надеяться, что последующие приближения будут еще точнее.

В заключение автор благодарит Г. А. Тирского за руководство работой и И. Гершбейна — за предоставление численного решения.

Поступило 27 III 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Олейник О. А. О системе уравнений теории пограничного слоя. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1963, т. 3, № 3.
2. Acrivos A. The asymptotic form of the laminar boundary — layer mass-transfer rate for large interfacial velocites. J. Fluid Mech., 1962, vol. 12, No. 3.
3. Merk H. J. Rapid calculations for boundary — layer transfer using wedge solutions and asymptotic expansions. J. Fluid Mech., 1959, vol. 5, No. 3.
4. Erdelyi A. A. et al. Higher Transcendental Functions. vol. 2, p. 116, New York, 1953.