

УРАВНЕНИЯ ГИДРОМЕХАНИКИ И ВОЛНЫ УПЛОТНЕНИЯ В ДВУХСКОРОСТНОЙ И ДВУХТЕМПЕРАТУРНОЙ СПЛОШНОЙ СРЕДЕ ПРИ НАЛИЧИИ ФАЗОВЫХ ПРЕВРАЩЕНИЙ

Р. И. НИГМАТУЛИН

(Москва)

Уравнения движения многофазных смесей рассматривались в работах [1-10] и ряде других. В работе [1] предлагается движение смеси рассматривать как взаимопроникающее движение нескольких сплошных сред, когда в поле течения вводятся для каждой фазы поля скоростей, давлений, средних плотностей, концентраций и т. д. Уравнения движения записываются отдельно для каждой фазы, причем силовое воздействие других компонент учитывается введением сил взаимодействия, которые для всей системы являются внутренними. Для замыкания системы использовано предположение баротропности компонент.

В работах [2, 3], вместо предположения баротропности компонент, выводятся уравнения энергии. Причем рассматриваются смеси без фазовых превращений. В работе [4] рассматриваются уравнения турбулентного движения с учетом вязких сил для двухскоростной, но однотемпературной среды, в которой допускаются равновесные фазовые переходы, т. е. рассматривается двухфазная среда, в которой температуры фаз одинаковы, состав равновесный, но скорости фаз различны. В работе [5] записаны уравнения на поверхности разрыва в многокомпонентной среде, состоящей из баротропных жидкостей. Здесь же приведена классификация разрывов. В упоминавшейся работе [3] уравнения на скачке записаны для сплошной среды с частицами без использования свойства баротропии несущей жидкости. В работах [6-11] исследуются различные аспекты движения многофазных смесей, например, влияние столкновения частиц друг с другом, влияние объема, занимаемого частицами, на параметры потока ударные волны и т. д. В [7] исследуется силовое воздействие турбулизованной среды на частицу на основе уравнения Бассэ — Буусинеска — Осеена.

Ниже выводятся уравнения движения двухскоростной и двухтемпературной сплошной среды с каплями или частицами с неравновесными фазовыми переходами, т. е. среды, в которой различны скорости и температуры фаз, а состав может быть неравновесным. Кроме того, исследовано влияние присутствия частиц или капель на параметры газа за скачком. Далее, полученные уравнения здесь используются для изучения волн уплотнения и в частности ударных волн.

§ 1. Основные допущения. Пусть имеется какая-то смесь газа или жидкости с каплями или частицами. Рассмотрим движение такой среды при следующих допущениях:

- 1) частицы или капли — в среднем одинаковые сферы, столкновениями, т. е. взаимодействием между ними, можно пренебречь;
- 2) расстояния, на которых параметры течения меняются существенно (вне поверхностей разрыва), много больше расстояний между частицами, а следовательно, и размеров самих частиц;
- 3) вязкость и теплопроводность существенны лишь в процессах взаимодействия между фазами.

Эти предположения, в частности, используются в работах [1, 3]. Таким образом, имеется второй газ, состоящий из твердых или жидких частиц, причем парциальное давление этого газа $p_2 = 0$. Скорости и температура фаз могут быть различными, допускаются неравновесные фазовые переходы.

Далее, везде параметры, относящиеся к газу и частицам, будут снабжаться соответственно индексом 1 и 2 внизу. Соответственно газовая фаза будет называться первой фазой, а частицы — второй.

§ 2. **Интегральные уравнения.** Рассмотрим фиксированный в некоторой инерциальной системе координат объем τ , ограниченный поверхностью S . Уравнения сохранения масс для первой и второй фаз внутри объема τ имеют следующий вид:

$$\int_{\tau} \frac{\partial \rho_1}{\partial t} d\tau = - \int_S \rho_1 v_{1n} dS + \int_{\tau} (J^{\circ} - J_0) d\tau, \quad \rho_1 = \rho_1^{\circ} \alpha \quad (2.1)$$

$$\int_{\tau} \frac{\partial \rho_2}{\partial t} d\tau = - \int_S \rho_2 v_{2n} dS + \int_{\tau} (J_0 - J^{\circ}) d\tau, \quad \rho_2 = \rho_2^{\circ} (1 - \alpha) \quad (2.2)$$

Здесь ρ_1 , ρ_2 и ρ_1° , ρ_2° — соответственно средние и истинные плотности первой и второй фаз, α — объемная концентрация первой фазы. В работе [1] показано, что в однородной среде поверхностная и объемная концентрации равны; J° и J_0 — макроскопические скорости соответственно испарения и конденсации, отнесенные к единице объема и времени. Складывая (2.1) и (2.2), имеем уравнение сохранения массы всей системы

$$\int_{\tau} \left(\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \frac{\partial \rho_2}{\partial t} \right) d\tau = - \int_S (\rho_1 v_{1n} + \rho_2 v_{2n}) dS \quad (2.3)$$

Уравнения сохранения импульсов каждой фазы в отдельности будут

$$\int_{\tau} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_1 v_1) d\tau = - \int_S \rho_1 v_1 v_{1n} dS - \int_{\tau} \alpha p n dS + \int_{\tau} \rho_2 f_{21} d\tau + \int_{\tau} (J^{\circ} v_2' - J_0 v_1') d\tau + \int_{\tau} \rho_1 F_1 d\tau \quad (2.4)$$

$$\int_{\tau} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_2 v_2) d\tau = - \int_S \rho_2 v_2 v_{2n} dS - \int_{\tau} (1 - \alpha) p n dS + \int_{\tau} \rho_2 f_{12} d\tau + \int_{\tau} (J_0 v_1' - J^{\circ} v_2') d\tau + \int_{\tau} \rho_2 F_2 d\tau \quad (2.5)$$

Четвертые слагаемые в правых частях уравнений (2.4), (2.5) представляют собой изменение импульса соответствующей фазы за счет фазового перехода. Например, из-за конденсации или испарения импульс второй фазы в единице объема за единицу времени получает приращение, равное $J_0 v_1' - J^{\circ} v_2'$ за счет импульса первой фазы, где v_i' ($i = 1, 2$) — скорость i -й фазы на поверхности капель, на которых происходят испарение и конденсация (полагалось, что обмен импульсами из-за фазовых превращений, которые имеют место и при фазовом равновесии, можно учесть в f_{12} за счет дополнительной вязкости); f_{12} — массовая сила, обусловленная взаимодействием между фазами за счет сил трения и давления газа внутри объема τ и отнесенная к единице массы второй фазы; F_1 и F_2 — массовые силы первой и второй фаз.

Складывая (2.4) и (2.5), получим уравнение сохранения импульса

$$\int_{\tau} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_1 v_1 + \rho_2 v_2) d\tau = - \int_{\tau} (\rho_1 v_1 v_{1n} + \rho_2 v_2 v_{2n}) dS - \int_S p n dS + \int_{\tau} (\rho_1 F_1 + \rho_2 F_2) d\tau \quad (2.6)$$

Теперь запишем уравнение сохранения энергии для всей системы в объеме τ

$$\int_{\tau} \frac{\partial}{\partial t} \left[\rho_1 \left(e_1 + \frac{v_1^2}{2} \right) + \rho_2 \left(e_2 + \frac{v_2^2}{2} \right) \right] d\tau = - \int_S \left[\rho_1 v_{1n} \left(e_1 + \frac{v_1^2}{2} \right) + \rho_2 v_{2n} \left(e_2 + \frac{v_2^2}{2} \right) \right] dS - \int_S p [v_{1n} \alpha + v_{2n} (1 - \alpha)] dS + \int_{\tau} (\rho_1 F_1 v_1 + \rho_2 F_2 v_2) d\tau + \int_{\tau} (\rho_1 Q_1 + \rho_2 Q_2) d\tau \quad (2.7)$$

При написании уравнения энергии второй фазы будем считать, что частицы или капли — несжимаемы, $\rho_2^{\circ} = \text{const}$. Так как взаимодействие между каплями не учитывается, внутренняя энергия второй фазы (равная сумме внутренних энергий частиц или капель) может измениться только за счет притока тепла и за счет фазовых переходов. Уравнение для внутренней энергии второй фазы в результате будет иметь вид

$$\int_{\tau} \frac{\partial}{\partial t} (\rho_2 e_2) d\tau = - \int_S \rho_2 e_2 v_{2n} dS + \int_{\tau} \rho_2 q d\tau + \int_{\tau} \rho_2 Q_2 d\tau + \int_{\tau} (J_0 e_{23} - J^{\circ} e_{13}) d\tau + \int_{\tau} p \left[J_0 \left(\frac{1}{\rho_1^{\circ}} - \frac{1}{\rho_2^{\circ}} \right) - J^{\circ} \left(\frac{1}{\rho_{13}^{\circ}} - \frac{1}{\rho_2^{\circ}} \right) \right] d\tau \quad (2.8)$$

Индексом 3 внизу отмечены величины, соответствующие состоянию насыщения при давлении p . Уравнение (2.8) написано в предположении, что конденсируются на каплях наиболее медленные молекулы газа, обладающие удельной энергией $e_{23}(p)$ (внутренняя энергия второй фазы при насыщении), а испаряются наиболее быстрые молекулы капель, обладающие удельной энергией $e_{13}(p)$ (внутренняя энергия газа при насыщении). Таким образом, четвертое и пятое слагаемые в правой части уравнения (2.8) представляют собой изменение внутренней энергии, приходящееся во вторую фазу за счет фазовых превращений, причем пятое слагаемое соответствует работе сил давления первой фазы над испаряющимся или конденсирующимся веществом; q — теплообмен между фазами, отнесенный к единице массы второй фазы и к единице времени; Q_1 и Q_2 — внешний приток тепла соответственно к первой и второй фазам.

Наряду с уравнениями состояния обеих фаз, а также выражениями для f_{12} , q , J° , J_0 , F_1 , F_2 , Q_1 , Q_2 система интегральных уравнений (2.1), (2.2), (2.4), (2.5), (2.7), (2.8) будет замкнутой.

§ 3. Дифференциальные уравнения. Если внутри объема τ нет разрывов, то, используя формулу Гаусса — Остроградского в интегральных уравнениях § 2, получим дифференциальные уравнения непрерывного движения. Из (2.1) и (2.2) имеем

$$\partial \rho_1 / \partial t + \text{div } \rho_1 \mathbf{v}_1 = J^{\circ} - J_0, \quad \partial \rho_2 / \partial t + \text{div } \rho_2 \mathbf{v}_2 = J_0 - J^{\circ} \quad (3.1)$$

Введем дифференциальный оператор

$$D_i / dt = \partial / \partial t + (\mathbf{v}_i \nabla) \quad (i = 1, 2) \quad (3.2)$$

Из (2.4) и (2.5), учитывая (3.1) и (3.2), получим

$$\rho_1 D_1 \mathbf{v}_1 / dt = -\alpha \nabla p - \rho_2 \mathbf{f} + J^{\circ} (\mathbf{v}_2' - \mathbf{v}_1) - J_0 (\mathbf{v}_1' - \mathbf{v}_1) + \rho_1 \mathbf{F}_1 \quad (3.3)$$

$$\rho_2 D_2 \mathbf{v}_2 / dt = -(1 - \alpha) \nabla p + \rho_2 \mathbf{f} + J_0 (\mathbf{v}_1' - \mathbf{v}_2) - J^{\circ} (\mathbf{v}_2' - \mathbf{v}_2) + \rho_2 \mathbf{F}_2 \quad (3.4)$$

Здесь \mathbf{f} — массовая сила со стороны первой фазы на вторую за счет трения между фазами и так называемого эффекта присоединенных масс

за счет ускорения частиц относительно газа, причем

$$\rho_2 \mathbf{f}_{12} = \rho_2 \mathbf{f} - p \nabla \alpha \quad (3.5)$$

где $p \nabla \alpha$ — та часть массовой силы со стороны газа, которая обусловлена давлением газа в связи с расширением или сужением трубки тока второй фазы. Далее, из (2.7), учитывая (3.1) и (3.2)

$$\begin{aligned} \rho_1 \frac{D_1}{dt} \left(e_1 + \frac{v_1^2}{2} \right) + \rho_2 \frac{D_2}{dt} \left(e_2 + \frac{v_2^2}{2} \right) = - \nabla [p(v_1 \alpha + v_2(1 - \alpha))] + \\ + (J_0 - J^\circ) \left(e_1 - e_2 + \frac{v_1^2 - v_2^2}{2} \right) + \rho_1 \mathbf{F}_1 v_1 + \rho_2 \mathbf{F}_2 v_2 + \rho_1 Q_1 + \rho_2 Q_2 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Вводя энтальпию $i = e + p / \rho^\circ$, преобразуем (3.6) к виду

$$\begin{aligned} \rho_1 \frac{D_1}{dt} \left(i_1 + \frac{v_1^2}{2} \right) + \rho_2 \frac{D_2}{dt} \left(i_2 + \frac{v_2^2}{2} \right) = \\ = \frac{\partial p}{\partial t} + (J_0 - J^\circ) \left(i_1 - i_2 + \frac{v_1^2 - v_2^2}{2} \right) + \rho_1 \mathbf{F}_1 v_1 + \rho_2 \mathbf{F}_2 v_2 + \rho_1 Q_1 + \rho_2 Q_2 \end{aligned} \quad (3.7)$$

Из (2.8) с учетом (3.1) и (3.2) имеем

$$\begin{aligned} \rho_2 \frac{D_2 e_2}{dt} = \rho_2 q + \rho_2 Q_2 + J_0(e_{23} - e_2) - J^\circ(e_{13} - e_2) + \\ + J_0 \left(\frac{1}{\rho_1^\circ} - \frac{1}{\rho_2^\circ} \right) - J^\circ \left(\frac{1}{\rho_{13}^\circ} - \frac{1}{\rho_2^\circ} \right) \end{aligned} \quad (3.8)$$

Вместе с уравнениями состояния, уравнениями для \mathbf{f} , q , J_0 , J° , Q_1 , Q_2 система дифференциальных уравнений (3.1), (3.3), (3.4), (3.7), (3.8) образует замкнутую систему в области непрерывного течения.

§ 4. Уравнения на поверхности разрыва. Пусть в области течения двухфазной среды имеется поверхность сильного разрыва. Причиной такого скачка, в частности, может быть вязкость и теплопроводность газа. В чистом газе толщина скачка составляет величину порядка длины свободного пробега молекул, а в рассматриваемых же смесях она будет порядка размера частиц или капель.

Находясь на позициях сплошной среды, необходимо ввести в рассмотрение поверхности, на которых терпят разрыв параметры течения. Возьмем систему координат, в которой поверхность разрыва покоится. Применим уравнения § 2 к малому цилиндрическому объему с основаниями, параллельными рассматриваемой поверхности и расположенными по разные стороны от нее. Причем, будем считать, что зона, соответствующая скачку, достаточно узка, чтобы процессы теплообмена и фазовые превращения не успевали повлиять на процесс, а из сил, действующих на частицы, наиболее существенное значение имеет градиент давления. В итоге получим систему уравнений на скачке

$$\begin{aligned} [\rho_1 v_{1n}] = 0, \quad [\rho_2 v_{2n}] = 0 \quad (4.1) \\ \rho_1 v_{1n} [v_{1n}] + \rho_2 v_{2n} [v_{2n}] + [p] = 0, \quad \rho_1 v_{1n} [v_{1\tau}] = 0, \quad \rho_2 v_{2n} [v_{2\tau}] = 0 \\ \frac{1}{2} [v_{2n}^2] + [p] / \rho_2^0 = 0 \\ \rho_1 v_{1n} [i_1 + \frac{1}{2} v_{1n}^2] = 0, \quad \rho_2 v_{2n} [e_2] = 0 \end{aligned}$$

При заданных уравнениях состояния $p = p(\rho_1^0 T_1)$, $i_1 = i_1(p, T_1)$, $e_2 = e_2(p, T_2)$ система (4.1) по известным параметрам течения перед скачком позволяет определить параметры за скачком.

Уравнения на поверхности разрыва в этом виде получены в работе [3], а часть их — ранее в [5]. В этих же работах проведена классификация разрывов в двухфазной среде. Ниже будет рассмотрен случай, когда разрыв является ударным скачком ($p_+ > p_-$), т. е. $\rho_1 v_{1n} \neq 0$, $\rho_2 v_{2n} \neq 0$ и исследовано влияние второй фазы на параметры газа за скачком, когда $\rho_2^0 \gg \rho_1^0$, $v_{1n} \approx v_{2n}$. Пусть уравнения состояния имеют вид

$$p = \rho_1^0 R_1 T_1, \quad i_1 = c_{p1} T_1, \quad \rho_2^0 = \text{const}, \quad e_2 = c_2 T_2 \quad (4.2)$$

Из уравнений (4.1) при $\rho_1^0 \ll \rho_2^0$ с учетом (4.2) легко видеть, что $[v_{2n}] \ll [v_{1n}]$, поэтому $[v_{2n}^2] \sim 2v_{2n}[v_{2n}]$, в результате получим

$$\begin{aligned} & \left(\frac{c_{p1}}{R_1} - \frac{1}{2} \right) v_{1n+} - \frac{v_{1n-}}{2} - \frac{c_{p1}}{R_1} \frac{p_-}{\rho_1 v_{1n-}} = \\ & = \frac{c_{p1}}{R_1} \frac{1 - \alpha_-}{\alpha_-} \frac{\rho_1^0 v_{1n-}}{\rho_2^0 v_{2n}} \left(- \frac{v_{1n+} [v_{2n}]}{v_{2n-}} + \frac{v_{1n+} p_-}{v_{1n-} v_{2n} \rho_1^0} \right) \end{aligned} \quad (4.3)$$

Если

$$\Delta = \frac{1 - \alpha_-}{\alpha_-} \frac{\rho_1^0}{\rho_2^0} \ll 1$$

то это означает слабое влияние второй фазы на параметры первой фазы за скачком. Например, при $\rho_1^0 / \rho_2^0 \approx 10^{-2}$, если $\alpha_- > 0.9$ ($\rho_2 v_{2n} / \rho_1 v_{1n} < 10$), то $\Delta < 10^{-3}$. Как видно, при $\rho_1^0 \ll \rho_2^0$, $v_{1n} \sim v_{2n}$ в довольно значительном диапазоне α влияние частиц или капель на параметры газа за скачком очень слабое. Это объясняется тем, что на скачке взаимодействие между фазами не «успевает» существенно повлиять на параметры фаз, и параметры газа за скачком можно рассчитывать, как если бы второй фазы не было, т. е. по формулам обычной газовой динамики.

В заключение отметим, что при анализе движения второй фазы через скачок не учитывался эффект присоединенных масс, но легко видеть, что этот эффект приведет к еще меньшему изменению и соответственно — меньшему влиянию второй фазы на параметры газа.

§ 5. Взаимодействие между фазами. В уравнения движения входят члены, отражающие силовое взаимодействие между фазами (f), тепловое (q) и фазовые превращения (J_0 и J^0). Кроме того, возможно дробление капель под действием обтекающего их газа. Все эти процессы требуют еще тщательного изучения. При анализе взаимодействия между фазами необходимо знать структуру второй фазы. Полагаем, что частицы или капли — в среднем одинаковые сферы с диаметром d .

При движении частицы или капли в газе на нее со стороны газа действуют следующие силы: 1) сила трения; 2) перепад (градиент) среднего статического давления (сюда может, в частности, входить и подъемная сила Архимеда); 3) кроме того, за счет ускоренного движения частицы относительно газа в последнем будут возникать возмущения, имеющие линейный масштаб порядка размера частицы, и за счет этих возмущений на частицу будет действовать дополнительная сила давления газа, соответствующая эффекту присоединенной массы (см. [7]). Силу трения на единицу массы второй фазы можно представить в виде

$$f = \frac{3}{4} \frac{C_d}{d} \frac{\rho_1^0}{\rho_2^0} \frac{(v_1 - v_2)^3}{|v_1 - v_2|}, \quad C_d = C_d(N_{Re}, \alpha), \quad N_{Re} = \frac{\rho_1^0 |v_1 - v_2| d}{\mu_1} \quad (5.1)$$

В качестве первого приближения надо исследовать зависимость C_d от N_{Re} , считая, что объемное содержание частиц достаточно мало, чтобы оно не влияло на C_d . В литературе рассматриваются следующие уравнения:

$$C_d = 24 / N_{Re}$$

закон Стокса для ламинарного обтекания сферы,

$$C_d = 27 / N_{Re}^{0.84}$$

предложено Ингебо по результатам исследования впрыскивания топлива в камеры сгорания, очевидно, при $N_{Re} \approx 10-10^2$;

$$C_d = 6000 / N_{Re}^{1.7}$$

предварительный результат работы [11], при $N_{Re} \approx 10^2 - 10^3$ и ряд других.

Все три закона можно представить в едином виде

$$C_d = A / N_{Re}^\delta \quad (5.2)$$

Теплообмен, приходящийся на единицу массы второй фазы, можно представить в виде

$$q = \frac{6}{\rho_2 d} h (T_1 - T_2) = \frac{6k_1}{\rho_2 d^2} N_{Nu} (T_1 - T_2) \quad \left(N_{Nu} = \frac{hd}{k_1} \right) \quad (5.3)$$

Здесь k_1 — коэффициент теплопередачи вещества первой фазы, h — коэффициент теплообмена между газом и частицами, N_{Nu} — число Нуссельта; в данном случае

$$N_{Nu} = N_{Nu}(N_{Re}, N_{Pr}, \alpha), \quad N_{Pr} = c_{p1} \mu_1 / k_1$$

В литературе имеется ряд зависимостей для N_{Nu} , например $N_{Nu} = 2$ (ламинарный поток газа вокруг сферы); $N_{Nu} = 2 + 0.6 N_{Pr}^{1/3} N_{Re}^{1/2}$ (соотношение Ранца — Маршалла).

Рассмотрим теперь фазовые превращения. Фазовые переходы могут происходить, во-первых, за счет образования зародышей кипения или конденсации и, во-вторых, на имеющихся поверхностях раздела фаз. В случае течения газа с каплями или частицами можно считать, что поверхность раздела фаз, на которой могут происходить фазовые переходы, достаточна, чтобы второй вид фазовых переходов был преобладающим. И, очевидно, например, что конденсация, приходящаяся на единицу поверхности раздела фаз, будет происходить тем интенсивнее, чем больше термодинамический потенциал вещества в газовой фазе, по сравнению с термодинамическим потенциалом того же вещества в жидкой (твердой) фазе при тех же давлениях и температуре. Предлагается поэтому использовать некоторое линейное соотношение, связывающее скорость фазовых превращений с указанным отклонением от равновесного значения термодинамического потенциала.

Для конденсации

$$J_0 / n\pi d^2 = F_0 [\varphi_1(p, T_1) - \varphi_2(p, T_1)] \quad (\varphi_1 > \varphi_2), \quad J_0 / n\pi d^2 = 0 \quad (\varphi_1 \leq \varphi_2) \quad (5.4)$$

для испарения

$$J^\circ / n\pi d^2 = F^\circ [\varphi_2(p, T_2) - \varphi_1(p, T_2)] \quad (\varphi_2 > \varphi_1), \quad J^\circ / n\pi d^2 = 0 \quad (\varphi_2 \leq \varphi_1) \quad (5.5)$$

Здесь $\varphi = i - Ts$ — термодинамический потенциал, s — энтропия, n — число частиц или капель в единице объема смеси.

Эти соотношения по существу — линейные феноменологические уравнения, используемые в термодинамике необратимых процессов, применительно к фазовым превращениям (см. [12]).

Считая, что первая фаза — совершенный газ, а вторая фаза — несжимаемая среда, имеем

$$i_1(p, T) = i_2(p, T_3) + l(p) + c_{p1}(T - T_3) \quad (5.6)$$

$$s_1(p, T) = s_2(p, T_3) + l(p) / T_3 + c_{p1} \ln (T / T_3)$$

$$i_2(p, T) = c_2(T - T^\circ) + p / \rho_2^0, \quad s_2(p, T) = c_2 \ln (T / T^\circ)$$

Здесь поверхностная энергия каплей полагается малой ($6\sigma_2 / \rho_2^0 d \ll e_2$); T_3 — равновесная температура насыщения, соответствующая p . В результате получим

$$\varphi_2(p, T) - \varphi_1(p, T) = (c_2 - c_{p1}) [T - T_3 \ln (T / T_3)] + (T - T_3)l(p) / T_3 \quad (5.7)$$

Раскладывая это выражение относительно $\Delta T / T_3 = (T - T_3) / T_3$ и выделяя главную часть, получим из (5.4) и (5.5)

$$J_0 = \frac{6(1-\alpha)}{d} F_0 \frac{T_3 - T_1}{T_3} l(p) \quad (T_3 > T_1), \quad J_0 = 0 \quad (T_3 \leq T_1) \quad (5.8)$$

$$J^\circ = \frac{6(1-\alpha)}{d} F^\circ \frac{T_2 - T_3}{T_3} l(p) \quad (T_2 > T_3), \quad J^\circ = 0 \quad (T_2 \leq T_3) \quad (5.9)$$

Коэффициенты F_0 и F° должны определяться из эксперимента или каких-либо других соображений.

Дробление каплей под действием набегающего потока газа можно оценить при помощи числа Вебера N_{We} , которое характеризует отношение разрушающей силы к восстанавливающей

$$N_{We} = \frac{(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^2 \rho_1^0 d}{\sigma_2} \quad (5.10)$$

Здесь σ_2 — коэффициент поверхностного натяжения жидкости, из которой состоят капли. Полагают, что капли, для которых число Вебера превышает некоторое критическое число, разрушаются на капли меньшего диаметра с той же суммарной массой, но с диаметром, соответствующим этому критическому числу.

§ 6. Уравнения для расчета структуры волны уплотнения. Перейдем к безразмерным переменным

$$\begin{aligned} P &= \frac{p}{p_0}, \quad U_1 = \frac{v_1}{a_0}, \quad U_2 = \frac{v_2}{a_0}, \quad \theta_1 = \frac{T_1}{T_{10}}, \quad \theta_2 = \frac{T_2}{T_{10}} \\ M_1 &= \frac{m_1}{m_{10}}, \quad M_2 = \frac{m_2}{m_{10}} \\ \left(a_0^2 &= \frac{\gamma p_0}{\rho_{10}^0}, \quad m_1 = \rho_1^0 \alpha v_1, \quad m_2 = \rho_2^0 (1 - \alpha) v_2 \right) \end{aligned} \quad (6.1)$$

Здесь индексом 0 внизу отмечены величины, соответствующие начальному состоянию перед волной. Тогда из уравнений § 3 с учетом термодинамических зависимостей (5.6), проведя элементарные преобразования, для одномерного установившегося движения с фазовыми переходами при

отсутствии внешнего воздействия ($F_1 = F_2 = 0$, $Q_1 = Q_2 = 0$) и полагая $v_i' = v_i$ ($i = 1, 2$), получим уравнения (6.2)

$$\begin{aligned} \frac{dM_1}{dx} &= J^* - J_*, \quad M_1 \frac{dU_1}{dx} + \frac{\alpha}{\alpha_0 \gamma U_{10}} \frac{dP}{dx} = -f^* - J^*(U_1 - U_2) = -f_1^* \\ \frac{dM_2}{dx} &= J_* - J^*, \quad M_2 \frac{dU_2}{dx} + \frac{1-\alpha}{\alpha_0 \gamma U_{10}} \frac{dP}{dx} = f^* + J_*(U_1 - U_2) = f_2^* \\ M_1 U_1 \frac{dU_1}{dx} + M_2 U_2 \frac{dU_2}{dx} + M_1 a_{33} \frac{dP}{dx} + M_1 a_{34} \frac{d\theta_1}{dx} &= b_3 \\ M_2 a_{55} \frac{d\theta_2}{dx} + M_2 a_{51} \frac{dP}{dx} &= b_5 \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} a_{33} &= (C_2 - C_1) \frac{d\theta_3}{dP} + \frac{dL}{dP} + (\theta_1 - \theta_3) \left(\frac{\partial C_1}{\partial P} \right)_\theta + \\ &+ (\theta_3 - \theta^\circ) \left(\frac{\partial C_2}{\partial P} \right)_\theta + \frac{1 + M_{20}}{M_1} \frac{1}{\gamma} \frac{\rho_{10}^\circ}{\rho_2^\circ} \\ a_{34} &= C_1 + (\theta_1 - \theta_3) \left(\frac{\partial C_1}{\partial \theta} \right)_P, \quad a_{51} = \left(\frac{\partial C_2}{\partial P} \right)_\theta (\theta_2 - \theta^\circ) \\ a_{55} &= C_2 + \left(\frac{\partial C_2}{\partial \theta} \right)_P (\theta_2 - \theta^\circ) \end{aligned} \quad (6.3)$$

$$b_3 = (J_* - J^*) [C_2(\theta_3 - \theta_2) + L + C_1(\theta_1 - \theta_3) + 1/2(U_1^2 - U_2^2)] - b_5$$

$$b_5 = q^* + (J_* - J^*) C_2(\theta_3 - \theta_2) + J_* \left(\frac{\alpha U_1}{\alpha_0 M_1 U_{10}} - \frac{\rho_{10}^\circ}{\rho_2^\circ} \right) \frac{P}{\gamma} - J^* L$$

При выводе уравнений (6.2) введены безразмерные термодинамические параметры (6.4)

$$C_1 = \frac{c_{p1}}{\gamma R_1}, \quad C_2 = \frac{c_2}{\gamma R_1}, \quad \theta_3 = \frac{T_3}{T_{10}}, \quad \theta^\circ = \frac{T^\circ}{T_{10}}, \quad L = \frac{l}{a_0^2}$$

а также приведенные члены, выражающие взаимодействие фаз

$$J_* = \frac{J_0}{m_{10}}, \quad J^* = \frac{J^\circ}{m_{10}}, \quad f^* = \frac{\rho_2 f}{m_{10} a_0}, \quad q^* = \frac{\rho_2 q}{m_{10} a_0^2} \quad (6.5)$$

Система (6.2) имеет три первых интеграла массы, импульса и энергии

$$\begin{aligned} M_1 + M_2 &= S_1 = \text{const}, \quad M_1 U_1 + M_2 U_2 + \frac{P}{\alpha_0 \gamma U_{10}} = S_2 = \text{const} \\ \frac{M_1 U_1^2}{2} + \frac{M_2 U_2^2}{2} + M_1 \left[C_2(\theta_3 - \theta^\circ) + \frac{\rho_{10}^\circ}{\rho_2^\circ} \frac{P}{\gamma} + L + C_1(\theta_1 - \theta_3) \right] + \\ &+ M_2 \left[C_2(\theta_2 - \theta^\circ) + \frac{\rho_{10}^\circ}{\rho_2^\circ} \frac{P}{\gamma} \right] = S_3 = \text{const} \end{aligned} \quad (6.6)$$

Уравнение состояния первой фазы $p = \rho_1^\circ R_1 T_1$ примет следующий вид

$$P \alpha U_1 = \alpha_0 U_{10} M_1 \theta_1 \quad (6.7)$$

Из условия несжимаемости вещества во второй фазе имеем

$$1 - \alpha = \frac{M_2 U_{20}}{M_{20} U_2} (1 - \alpha_0) = \frac{\rho_{10}^\circ}{\rho_2^\circ} \alpha_0 U_{10} \frac{M_2}{U_2} \quad (6.8)$$

Из (6.2) — (6.8), разрешая относительно производных, имеем

$$\begin{aligned} \frac{dU_1}{dx} &= -\frac{1}{M_1} \left(f_1^* + \frac{\alpha}{\alpha_0 \gamma U_{10}} G \right) \\ \frac{dU_2}{dx} &= \frac{1}{M_2} \left(f_2^* - \frac{1 - \alpha}{\alpha_0 \gamma U_{10}} G \right), \quad \frac{dM_2}{dx} = J_* - J^* \end{aligned} \quad (6.9)$$

$$G = \frac{\alpha_0 U_{10} (b_3 + f_1^* U_1 - f_2^* U_2) + a_{34} (b_4 + f_1^* P \alpha / M_1 - f_2^* a_{42})}{\alpha_0 U_{10} B_1 + a_{34} B_2}$$

$$B_1 = a_{33} M_1 - \frac{\alpha U_1 + (1 - \alpha) U_2}{\alpha_0 \gamma U_{10}}, \quad B_2 = \alpha U_1 - \frac{P \alpha^2 / M_1 + a_{42} (1 - \alpha)}{\alpha_0 \gamma U_{10}}$$

выражения для a_{33} , a_{34} , a_{55} , b_3 , b_5 находим из (6.3) и, кроме того,

$$a_{42} = \frac{\rho_{10}^\circ}{\rho_2^\circ} \alpha_0 U_{10} \frac{P U_1}{U_2^2}, \quad b_4 = (J_* - J^*) (a_{42} U_2 - \alpha_0 U_{10} \theta_1) \quad (6.10)$$

Для остальных неизвестных имеем уравнения (6.6) — (6.8)

$$\begin{aligned} M_1 &= S_1 - M_2, \quad P = \alpha_0 \gamma U_{10} (S_2 - M_1 U_1 - M_2 U_2) \\ \alpha &= 1 - \frac{\rho_{10}^\circ}{\rho_2^\circ} \alpha_0 U_{10} \frac{M_2}{U_2}, \quad \theta_1 = \frac{P \alpha U_1}{M_1 \alpha_0 U_{10}} \end{aligned} \quad (6.11)$$

$$\begin{aligned} \theta_2 &= \frac{1}{M C_2} \left\{ S_3 - M_1 \left[C_2 (\theta_3 - \theta^\circ) + \frac{\rho_{10}^\circ}{\rho_2^\circ} \frac{P}{\gamma} + L + C_1 (\theta_1 - \theta_3) + \frac{U_1^2}{2} \right] - \right. \\ &\quad \left. - M_2 \left[\frac{\rho_{10}^\circ}{\rho_2^\circ} \frac{P}{\gamma} + \frac{U_2^2}{2} \right] \right\} + \theta^\circ \end{aligned}$$

Система дифференциальных уравнений непрерывного течения (6.9) будет замкнутой, если заданы законы для силового, теплового и массово-то взаимодействий между фазами f^* , q^* , J_* , J^* , а также зависимости для термодинамических параметров $C_1(P, \theta_1)$, $C_2(P, \theta_2)$, $\theta_3(P)$, $L(P)$.

Если имеется поверхность разрыва, необходимо использовать соотношения на скачке, записанные в § 4, из которых с учетом (5.6) и (6.1) получим

$$\begin{aligned} M_{1f} &= M_{10} = 1, \quad M_{2f} = M_{20} \\ U_{1f} + M_{20} U_{2f} + P_f / \alpha_0 \gamma U_{10} &= U_{10} + M_{20} U_{20} + 1 / \alpha_0 \gamma U_{10} \\ \frac{U_{2f}^2}{2} + \frac{\rho_{10}^\circ}{\rho_2^\circ} \frac{P_f}{\gamma} &= \frac{U_{20}^2}{2} + \frac{\rho_{10}^\circ}{\rho_2^\circ} \frac{1}{\gamma}, \quad \theta_{2f} = \theta_{20} \\ \frac{U_{1f}^2}{2} + C_2 (\theta_{3f} - \theta^\circ) + \frac{\rho_{10}^\circ}{\rho_2^\circ} \frac{P_f}{\gamma} &+ L_f + C_{1f} (\theta_{1f} - \theta_{3f}) = \\ &= \frac{U_{10}^2}{2} + C_2 (\theta_{30} - \theta^\circ) + \frac{\rho_{10}^\circ}{\rho_2^\circ} \frac{1}{\gamma} + L_0 + C_{10} (1 - \theta_{30}) \end{aligned} \quad (6.12)$$

Из уравнений (6.12) вместе с (6.7) и (6.8), используя зависимости для θ_3 , L , C_1 , C_2 можно найти параметры за скачком по заданным параметрам перед скачком.

Запишем теперь выражения для f^* , q^* , J_* , J^* . Так как в процессе течения диаметр капель или частиц d , а также коэффициенты вязкости и теплопередачи первой фазы μ_1 и k_1 могут быть переменными (d за счет фазовых превращений и разрушения капли, μ_1 и k_1 — за счет изменения термодинамических параметров газа T_1 и p), введем безразмерные величины

$$D = d/d_0, \quad \mu^* = \mu_1/\mu_{10}, \quad k_1^* = k_1/k_{10} \quad (6.13)$$

В итоге можно выразить f^* через наши переменные

$$f^* = \frac{\rho_2 f}{m_{10} a_0} = \frac{3}{4} \frac{1}{d_0} \frac{\rho_{10}^\circ C_d U_{10} \alpha_0 M_2 M_1 (U_1 - U_2)^3}{\rho_2^\circ D U_1 \alpha U_2 |U_1 - U_2|} \quad (6.14)$$

$$C_d = C_d(N_{Re})_*, \quad N_{Re} = \frac{\rho_{10}^\circ a_0 d_0 D \alpha_0 U_{10} M_1}{\mu_{10} \mu^* \alpha U_1} |U_1 - U_2|$$

Аналогично запишем выражение для q^*

$$q^* = \frac{\rho_2 q}{m_{10} a_0^2} = \frac{6 k_{10} T_{10} k^* M_2}{\rho_2^\circ a_0^3 d_0^2 D^2 U_2} N_{Nu} (\theta_1 - \theta_2), \quad N_{Nu} = N_{Nu}(N_{Re}, N_{Pr}) \quad (6.15)$$

Из предложенного линейного соотношения для скорости фазовых переходов (5.8) и (5.9) получим

$$J_* = \frac{6 a_0 F_0 M_2 \theta_3 - \theta_1}{d_0 \rho_2^\circ D U_2 \theta_3} \quad (\theta_3 > \theta_1), \quad J_* = 0 \quad (\theta_3 \leq \theta_1) \quad (6.16)$$

$$J^* = \frac{6 a_0 F^\circ M_2 \theta_2 - \theta_3}{d_0 \rho_2^\circ D U_2 \theta_3} \quad (\theta_2 > \theta_3), \quad J^* = 0 \quad (\theta_2 \leq \theta_3) \quad (6.17)$$

§ 7. Аппроксимация некоторых термодинамических функций. Необходимо задать зависимости $\theta_3(P)$, $L(P)$, $C_1(P, \theta_1)$, $C_2(P, \theta_2)$, $\mu^*(\theta_1)$, $k_1^*(\theta_1)$.

Давление насыщенного пара почти для всех жидкостей в широком диапазоне температур с хорошей точностью описывается следующей эмпирической формулой (см. [3]):

$$p = p_* \exp(-T_*/T_3) \quad (7.1)$$

где p_* и T_* — почти постоянные числа, которые находились из условия, чтобы зависимость (7.1) точнее аппроксимировала табличные данные в заданном интервале давлений. Приводя (7.1) к безразмерному виду, получим

$$\theta_3 = \frac{T_*/T_{10}}{\ln(p_0/p_*) - \ln P} \quad (7.2)$$

В качестве аппроксимирующей функции для $l(p)$ использовалась функция, которая, если ее привести к безразмерному виду, выглядит следующим образом:

$$L = L_0 \exp[(a + b \ln P) \ln P] \quad (7.3)$$

где L_0 , a , b — некоторые фиксированные для данной жидкости числа в заданном интервале давлений.

Найдем $c_{p1}(p, T_1)$ — среднюю удельную теплоемкость первой фазы при постоянном давлении на интервале температур от T_3 до T_1 . Так как в рассматриваемых случаях температура газа T_1 не очень сильно отличалась от температуры насыщения T_3 , то можно допустить, что

$$c_{p1}(p, T_1) = c_{p1}(p, T_3(p)) \quad (7.4)$$

а зависимость $c_{p1}(p, T_3(p))$ можно интерполировать.

Зависимость теплоемкости конденсированной фазы c_2 от давления и температуры очень слабая, и обычно можно считать, что

$$c_2 = \text{const} \quad (7.5)$$

Зависимость вязкости и теплопроводности первой фазы, а также поверхностного натяжения капель от температуры брались в виде

$$\mu^* = \theta_1^m, \quad k_1^* = \theta_1^x, \quad \sigma_2^* = \theta_2^{-s} \quad (7.6)$$

§ 8. Равновесные параметры за волной уплотнения. Силовое взаимодействие, теплообмен, фазовые переходы между фазами приводят к тому, что в волне уплотнения образуется зона релаксации, в которой восстанавливается нарушенное термодинамическое равновесие, характеризующееся тем, что $v_1 = v_2 = v_e$, $T_1 = T_2 = T_e$. Индекс e внизу означает, что соответствующий параметр — равновесный.

Из первых интегралов (6.6) при условии, что $U_1 = U_2 = U_e$, $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3 = \theta_e$ имеем следующие уравнения для равновесного состояния за фронтом:

$$\begin{aligned} M_{1e} + M_{2e} &= S_1 = 1 + M_{20} \\ (1 + M_{20})U_e + \frac{P_e}{\alpha_0 \gamma U_{10}} &= S_2 = (1 + M_{20})U_0 + \frac{1}{\alpha_0 \gamma U_{10}} \\ (1 + M_{20}) \left[\frac{U_e^2}{2} + C_2(\theta_e - \theta^0) + \frac{\rho_{10}^0}{\rho_2^0} \frac{P_e}{\gamma} \right] + M_{1e}L_e &= S_3 = \\ &= (1 + M_{20}) \left[\frac{U_0^2}{2} + C_2(1 - \theta^0) + \frac{\rho_{10}^0}{\rho_2^0} \frac{1}{\gamma} \right] + L_0 \end{aligned} \quad (8.1)$$

Здесь выражения для постоянных S_2 и S_3 написаны в предположении, что перед фронтом среда находится в равновесном состоянии, т. е. $U_{10} = U_{20} = U_0$, $\theta_{10} = \theta_{20} = \theta_{30} = 1$. Нетрудно записать эти выражения и в общем случае, когда перед фронтом нет равновесия.

Кроме того, имеем уравнение состояния первой фазы, которое примет вид из (6.7)

$$P_e \alpha_e U_e = \alpha_0 U_{10} M_e \theta_e \quad \left(\alpha_e = 1 - \frac{\rho_{10}^0}{\rho_2^0} \alpha_0 U_{10} \frac{M_{2e}}{U_e} \right) \quad (8.2)$$

и выражения для θ_{3e} и L_e из (7.2) и (7.3)

$$\theta_{3e} = \frac{T^*/T_{10}}{\ln(p_0/p^*) - \ln P_e}, \quad L_e = L_0 \exp[(a + b \ln P_e) \ln P_e] \quad (8.3)$$

Если $M_{1e} \cdot M_{2e} > 0$, т. е. за зоной релаксации присутствуют обе фазы и имеется равновесная насыщенная смесь, то

$$\theta_e = \theta_{3e} \quad (8.4)$$

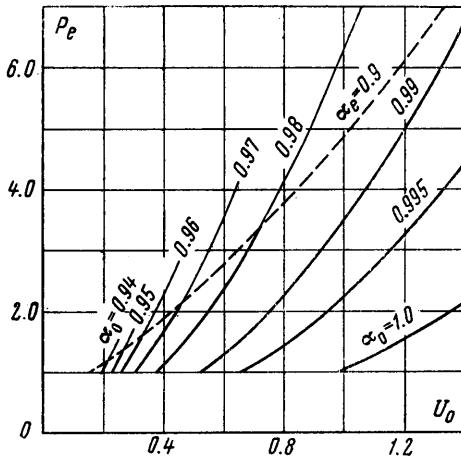
Если же $M_{2e} = 0$, т. е. вторая фаза полностью испаряется и смесь превращается в перегретый пар, тогда

$$\theta_e \geq \theta_{3e}, \quad M_{1e} = 1 + M_{20} \quad (8.5)$$

а вместо третьего уравнения (8.1) уравнение энергии примет вид

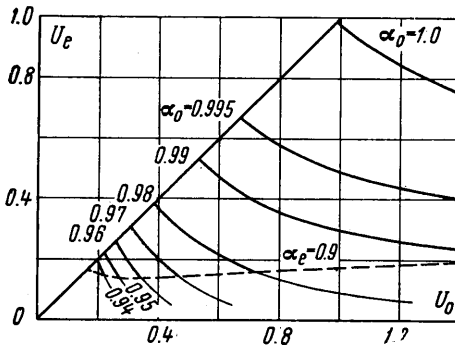
$$(1 + M_{20}) \left[\frac{U_e^2}{2} + C_2(\theta_{3e} - \theta^{\circ}) + \frac{\rho_{10}^{\circ} P_e}{\rho_2^{\circ} \gamma} + C_1(\theta_e - \theta_{3e}) + L_e \right] = S_3 \quad (8.6)$$

Из соотношений (8.1) видно, что равновесные параметры за зоной релаксации волны не зависят ни от закона трения, ни от закона теплообмена, ни от закона для скорости фазовых превращений, ни от диаметра частиц. Последние определяют лишь внутреннюю структуру волны, ее толщину.

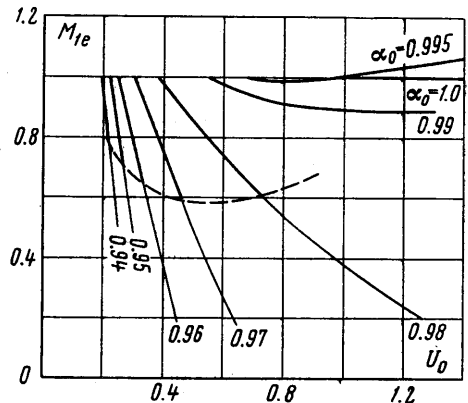


Фиг. 1

вает область, вне которой для данного значения α_0 большая интенсивность волны приводит к тому, что объемное содержание капель за зоной релаксации будет превышать 0.1 или α_e будет меньше 0.9. При значительном же объемном содержании ка-



Фиг. 2



Фиг. 3

Для решения полученной системы алгебраических трансцендентных уравнений была составлена программа счета на основе метода половинного деления. Расчеты проводились, когда перед фронтом имеется равновесная пароводяная смесь при давлении $p_0 = 10 \text{ ата}$ ($\rho_2^{\circ} / \rho_{10}^{\circ} = 175.5$). Результаты расчетов в виде зависимостей U_e , P_e , M_{1e} от U_0 и α_0 приведены на фиг. 1—3. Из фиг. 3 видно, что если содержание второй фазы меньше некоторого значения, то при прохождении среды через фронт волны уплотнения происходит полное или частичное испарение капель ($M_{2e} < M_{20}$). При более значительном содержании капель, наоборот, происходит частичная конденсация пара $M_{2e} > M_{20}$. Пунктирная кривая на этих графиках ограничи-

пель может оказаться, что столкновения между ними будут существенно влиять на параметры течения, т. е. может потребоваться модель двухфазной среды с учетом этих столкновений, когда $p_2 > 0$ (см. § 1).

§ 9. Расчет структуры волны уплотнения в двухфазной среде с фазовыми переходами. Если скорость первой фазы перед фронтом превышает скорость звука в газе, то волна имеет две зоны: 1) вязкий скачок уплотнения, зона нулевой толщины; в ней нарушается термодинамическое равновесие, но фазовые переходы и теплообмен между фазами еще не успевают произойти, т. е. $M_{1f} = M_{10} = 1$, $\theta_{2f} = \theta_{20}$; 2) зона релаксации, в которой вследствие силового взаимодействия теплообмена между фазами, а также фазовых переходов постепенно устанавливается равновесие. Такие волны уплотнения, имеющие впереди себя скачок, будем называть ударными волнами. Для расчета структуры ударных волн сначала необходимо определить параметры за скачком U_{1f} , U_{2f} , M_{2f} из уравнений (6.12), которые дают граничные условия для дифференциальных уравнений (6.9) в зоне релаксации. Следует отметить, что при $\rho_{10}^\circ / \rho_2^\circ \ll 1$, $U_{10} \sim U_{20}$ параметры первой фазы за скачком можно вычислять без учета присутствия второй фазы, т. е. воспользоваться результатами вычислений § 8 для случая $\alpha_0 = 1$, $M_{20} = 0$. Ошибка будет составлять величину порядка (см. § 4)

$$\Delta = \frac{\rho_{10}^\circ}{\rho_2^\circ} \frac{1 - \alpha_0}{\alpha_0}$$

Схема решения уравнений (6.12) аналогична схеме решения уравнений (8.1) относительно равновесных параметров за волной.

Сложнее обстоит дело, когда скорость первой фазы перед фронтом волны меньше скорости звука в газе. В этом случае скачок отсутствует и параметры в волне уплотнения изменяются непрерывно, причем известны параметры течения перед волной ($x = -\infty$) и равновесные параметры после волны ($x = +\infty$). Чтобы найти численно соответствующую интегральную кривую, в общем случае необходимо делать пристрелку по двум параметрам по следующей схеме. Так как x не входит в правые части дифференциальных уравнений (6.9), интегральные кривые допускают смещение вдоль оси x . Поэтому фиксируем для $x_f = 0$ некоторое U_{1f} такое, что $U_e < U_{1f} < U_{10}$ (для размытой волны индекс f ввиду относится к начальной точке интегрирования, в которой производится пристрелка). Затем для этого U_{1f} подбираем такие M_{2f} и U_{2f} , чтобы интегральная кривая с этими граничными условиями в точке x_f имела при $x \rightarrow -\infty$ в качестве предела начальное состояние.

Для этого, задаваясь некоторым множеством значений $\{M_{2f}\}$, каждому M_{2f} из этого множества подбираем такое U_{2f} , чтобы соответствующая интегральная кривая давала минимальное отклонение от начального состояния, т. е. реализовывала

$$\min_{U_{2f}} [\min_x \sqrt{(M_2 - M_{20})^2 + (U_1 - U_{10})^2 + (U_2 - U_{20})^2}] = \delta(M_{2f})$$

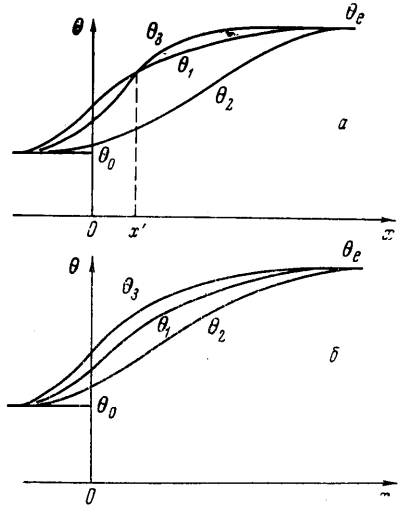
Из заданного множества $\{M_{2f}\}$ выбираем такое M_{2f} , которое дает

$$\min \delta(M_{2f}) = \delta^*$$

Вообще говоря, для искомой интегральной кривой $\delta^* = 0$. Облегчающим обстоятельством будет тот факт, что при некоторых условиях фазовые переходы начинаются не сразу с изменением параметров в волне. Это происходит, если изменение $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ имеет вид, представленный на фиг 4, а, и фазовые переходы (в данном случае — конденсация) начинаются в точке x' .

В этих случаях, задаваясь U_{1f} , достаточно близким к U_{10} , чтобы точка x_f лежала левее x' , можно положить $M_{2f} = M_{20}$ и пристреливать только по одному параметру. Если же изменение температур $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ такое же, как на фиг. 4 б, то пристреливать приходится по двум параметрам.

Выбрав таким образом M_{2f} и U_{2f} в точке $x_f = 0$, $U_1 = U_{1f}$, можно интегрировать и в сторону $x > x_f = 0$.



Фиг. 4

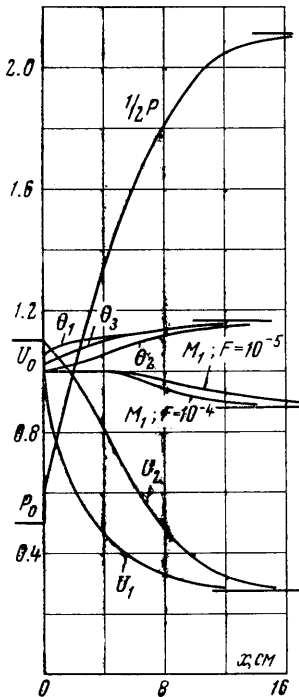
§ 10. Некоторые результаты. На фиг. 5, 6 приведены некоторые результаты численного интегрирования, отображающие структуру волн в двухфазной пароводяной смеси при начальном давлении $p_0 = 10$ ата со следующими начальными термодинамическими данными, $a_0 = \gamma p_0 / \rho_{10} = 502$ м/сек, $R_1 = 429.5$ м²/сек²град, $\gamma = 1.3$, $\mu_{10} = 1.41 \cdot 10^{-6}$ кг сек/м², $k_{10} = 2.71 \cdot 10^{-4}$ ккал/м²час²град, $c_2 = 1.05$ ккал/кг град. Приведенные результаты соответствуют начальному диаметру частиц $d_0 = 10^{-5}$ м с законом трения $C_d = 27/N_{Re}^{0.84}$ и равновесному состоянию перед фронтом. Данные по термодинамическим свойствам воды и водяного пара брались из [14, 15]. На фиг. 5 отображена структура ударной волны в смеси с начальным объемным содержанием капель $\alpha_0 = 0.99$ и начальной скоростью $U_0 = 1.1$. Аналогично на фиг. 6 отображена структура волны уплотнения для $\alpha_0 = 0.98$, $U_0 = 0.7$.

Каждый вариант просчитывался несколько раз с различными уравнениями для C_d , N_{Nu} , различными диаметрами частиц d и различными значениями коэффициентов F^* и F^0 в линейном соотношении для скорости фазовых переходов.

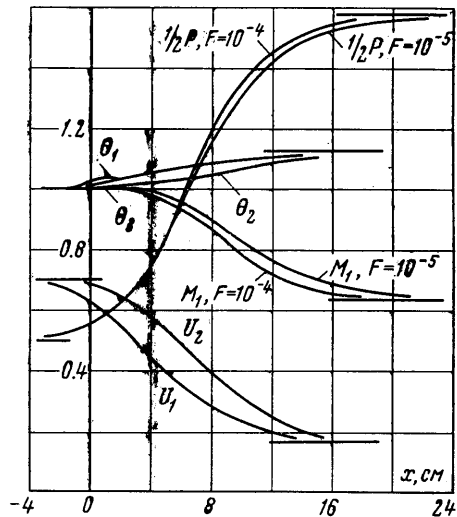
Расчеты показывают, что наиболее существенным процессом, определяющим структуру волны, является трение между фазами. Интенсивность теплообмена, вид функции $N_{Nu}(N_{Re}, N_{Pr})$ и скорость фазовых превращений (значение коэффициента F) оказывают гораздо меньшее влияние на структуру волны. Это, в свою очередь, приводит к тому, что безразмерные функции P , U_1 , U_2 при фиксированных начальных условиях и параметрах, но различных диаметрах частиц, являются функцией безразмерного переменного

$$\xi = \frac{x}{d_0} \left(\frac{d_0}{d} \right)^{\delta+1} \quad (10.1)$$

где d_0 — некоторый фиксированный диаметр частицы (практически это единица измерения)



Фиг. 5



Фиг. 6

диаметра частиц), d — конкретный диаметр частицы в задаче, δ — показатель в законе трения $C_d = A/Re^\delta$. Этот вывод следует из анализа уравнений (6.9)–(6.11) при малых q^* и J_* , J^* с учетом (6.14) и (5.2). Из этого анализа следует

$$dU_1/dx \approx K d_0^{-1} (d_0/d)^{\delta+1} \quad (10.2)$$

где $K = K(M_2, U_1, U_2)$ — безразмерная функция. Аналогичные соотношения следуют и для dU_2/dx , dP/dx . Отсюда имеем

$$dU_1/d\xi = K(M_2, U_1, U_2) \quad (10.3)$$

и одновременно вывод, сделанный выше. Расчеты в широком диапазоне d подтверждают этот вывод. Отсюда можно предложить экспериментальный метод определения закона трения (5.2).

Измеряя толщину фронта волны уплотнения B в экспериментах с различными диаметрами частиц в смеси, имеем

$$B_1/B_2 = (d_1/d_2)^{\delta+1} \quad (10.4)$$

Отсюда можно проверить приемлемость закона (5.2) и определить δ . При фиксированном δ расчетная толщина фронта зависит практически линейно от A , поэтому легко можно будет определить и A . Следует отметить сильное влияние диаметра частиц на пространственную протяженность волны уплотнения.

Расчеты показали, что при $d > 10^{-6}$ м, $\rho_2^\circ/\rho_1^\circ > 10$ эффектом присоединенных масс, а при $(1-\alpha) \leq 0.1$ взаимодействием фаз за счет градиента давления $(1-\alpha)\nabla p$ можно пренебречь.

Интересно здесь исследовать значение фазовых переходов. В рассматриваемых вариантах расчеты показывают, что при $F > 10^{-4}$ кг сек/м⁴ процесс не зависит практически от значения этого коэффициента и конденсация проходит практически при $T_1 \approx T_3$, а испарение при $T_2 \approx T_3$, но $T_1 \neq T_2$. Дело в том, что при значительном содержании второй фазы и достаточно мелких каплях имеется значительная поверхность раздела фаз, на которой и происходят процессы конденсации и испарения. При $F > 10^{-4}$ кг сек/м⁴ скорость фазовых превращений при таких поверхностях раздела фаз достаточна, чтобы следить за давлением, и фазовый состав изменяется практически с максимально возможной скоростью. Некоторые оценки показывают, что $F > 10^{-4}$ кг сек/м⁴. На фиг. 5, 6 приведены расчеты для $F = 10^{-4}$ и 10^{-5} кг сек/м⁴, которые показывают, что уменьшение F на порядок мало влияет на P , U_1 , U_2 и несколько изменяет зависимость M_1 вдоль фронта, замедляя ее падение.

Отметим, что рассмотренный метод расчета вместе с предложенным уравнением для кинетики фазовых превращений удобен и для расчетов двухфазных потоков с равновесными фазовыми переходами, для чего нужно F взять таким, чтобы уменьшение этого коэффициента не влияло практически на результаты.

Автор благодарит Х. А. Рахматулина, С. С. Григоряна и Ю. А. Буевича за полезное обсуждение и ценные замечания.

Поступило 30 I 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Рахматулин Х. А. Основы газодинамики взаимопроникающих движений сжимаемых сред. ПММ, 1956, т. 20, вып. 2.
2. Марон В. И., Медведев В. А. К выводу уравнений энергии взаимопроникающих движений газовых сред. Вестн. Моск. ун-та, сер. 1, Математика и механика, 1963, № 1.
3. Крайко А. Н., Стернин Л. Е., К теории течений двухскоростной сплошной среды с твердыми или жидкими частицами. ПММ, 1965, т. 29, вып. 3.
4. Телетов С. Г., Вопросы гидродинамики двухфазных смесей. Вестник Моск. ун-та. Математика, Механика, Астрономия, Физика, Химия, 1958, № 2.
5. Клейман Я. З. О распространении сильных разрывов в многокомпонентной среде. ПММ, 1958, т. 22, вып. 2.
6. Буевич Ю. А. Двухжидкостная гидродинамика взвешенного слоя. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 4.
7. Буевич Ю. А. О сопротивлении движению частицы, взвешенной в турбулизованной среде. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 6.
8. Soo S. L. Comments on «Mechanism of particle collision in one dimensional dynamics of gas particle mixtures» by F. Marble and Author's reply. Phys. Fluids, 1965, vol. 8, No. 9, p. 1751—1754.
9. Soo S. L. Dynamics of multiphase flow systems. Indust. and Engng Chem. Fundamentals, 1965, vol. 4, p. 426—433.
10. Rudinger G. Some effects of finite particle volume on the dynamics of gas-particle mixtures. AIAA Journal, 1965, vol. 3, No. 7, p. 1217—1222.
11. Rudinger G. Some properties of Shock Relaxation in Gas Flows Carrying small Particles. Physics of Fluids, 1964, vol. 7, No. 5, p. 658—663.
12. Гроот С. Д., Мазур П., Неравновесная термодинамика. Изд. «Мир», 1964.
13. Цянь Сюэ-сень. Физическая механика. Изд. «Мир», 1965.
14. Вукалович М. П., Таблицы термодинамических свойств воды и водяного пара. Изд. 7-е, М.—Л., Госэнергоиздат, 1965.
15. Варгафтик Н. Б., Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. Физматгиз, 1963.