

4. Радиальный случай задачи принципиально от линейного не отличается. Так, для $q^*(T) = q_0^*$ закон движения фронта нагнетаемой воды имеет вид

$$r(T) = \left\{ \frac{q_0^*}{\pi} \left[\Phi(a\sqrt{T}) \left(T + \frac{1}{2a^2} \right) + \frac{\exp(-a^2 T) \sqrt{T}}{a\sqrt{\pi}} \right] \right\}^{1/2}$$

Отметим, что, имея графики решения уравнения (1.7), нетрудно при помощи (1.4) определить величину насыщенности в данной точке пласта в любой момент T . Автор благодарит В. Л. Данилова за научное руководство.

Поступило 20 III 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Боксерман А. А., Желтов Ю. П., Кочешков А. А. О движении несмешивающихся жидкостей в трещиновато-пористой среде. Докл. АН СССР, 1964, т. 155, № 6.
2. Боксерман А. А., Данилов В. Л., Желтов Ю. П., Кочешков А. А. К теории фильтрации несмешивающихся жидкостей в трещиновато-пористых средах. Теория и практика добычи нефти (ежегодник ВНИИ нефтегаз), Изд. «Недра», 1966.
3. Баренблатт Г. И., Желтов Ю. П. Об основных уравнениях фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах. Докл. АН СССР, 1960, т. 132, № 3.
4. Рыжик В. М. Вытеснение нефти водой в пористой среде с малопроницаемыми включениями. Изв. АН СССР. Механика и машиностроение, 1964, № 1.
5. Янке Е., Эмде Ф. Таблицы функций с формулами и кривыми. Гостехиздат, 1948.
6. Мюнтц Г. Интегральные уравнения, т. I. Гостехиздат, 1934.
7. Диткин В. А., Прудников А. П. Справочник по операционному исчислению. «Высш. шк.» 1965.
8. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, 1962.

ОСЕСИММЕТРИЧНЫЙ УДАР ПО ПЛАСТИНЕ, ЛЕЖАЩЕЙ НА ПОВЕРХНОСТИ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

В. С. КОРЧАГИН (*Ростов-на-Дону*)

§ 1. Постановка задачи и уравнения движения. Пусть идеальная сжимаемая жидкость, заполняющая нижнее полупространство, ограничена плоской упругой пластиной (фиг. 1) и до момента $t = 0$ находится в покое. Затем в момент $t = 0$ по пластине наносится удар, в результате которого точки пластины получают заданные начальные скорости. Требуется определить совместное движение пластины и жидкости, предполагая, что пластина не отрывается от жидкости.

В данной работе ограничимся определением закона движения пластины, а также важной, с практической точки зрения, динамической величины — давления, действующего на пластину со стороны жидкости.

Допущения, принимаемые при решении этой задачи, следующие:

а) движение симметрично относительно оси, нормальной к поверхности жидкости в состоянии покоя;

б) перемещения и скорости частиц жидкости и пластины малы;

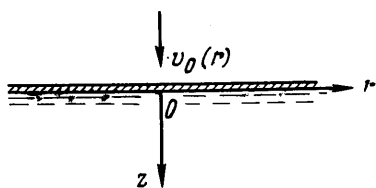
в) жидкость идеальная и баротропная;

г) массовые силы на жидкость не действуют.

При этих допущениях рассматриваемая задача представляет линейную задачу о потенциальном движении жидкости совместно с находящейся на ее поверхности упругой пластиной. Пусть φ — потенциал скорости жидкости, p — гидродинамическое давление, а u , q — соответственно прогиб пластины по нормали к ее поверхности и нормальная распределенная нагрузка, действующая по обеим сторонам пластины.

Тогда движения жидкости и пластины будут подчиняться уравнениям [1, 2]

$$\Delta \varphi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} = 0, \quad \Delta u + \frac{\sigma_0}{D} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{q}{D} \quad (1.1)$$



Фиг. 1

Здесь c , ρ — скорость звука и плотность жидкости соответственно в состоянии покоя (для этого состояния принимаем $\varphi = p = u = 0$); D , σ_0 — изгибная жесткость и поверхностная плотность материала пластины соответственно, причем

$$D = Eh^3 / 12(1 - \nu^2), \quad \sigma_0 = \rho_0 h$$

Здесь E , ν , ρ_0 , h — модуль упругости, коэффициент Пуассона, объемная плотность и толщина пластины соответственно.

Если в качестве единиц измерения массы, длины и времени выбрать соответственно величины

$$M = D / c^2, \quad L = (D / \rho c^2)^{1/3}, \quad T = c^{-1}(D / \rho c^2)^{1/3} \quad (1.2)$$

То уравнения (1.1) можно преобразовать в следующие безразмерные уравнения:

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial t} = -p, \quad \Delta\Delta u + \frac{1}{a} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = q \quad (1.3)$$

Здесь все величины — безразмерные, и параметр a определяется по формуле

$$a = \sigma_0^{-1}(p^2 D / c^2)^{1/3}$$

В табл. 1 приведены численные значения параметра a для некоторых жидкостей и упругих пластин.

Таблица 1

	Ацетон	Вода дистил.	Вода морская	Керосин	Спирт этиловый
Бронза	0.199	0.203	0.197	0.183	0.197
Дюралюм.	0.520	0.530	0.515	0.478	0.515
Никель	0.232	0.236	0.230	0.213	0.230
Сталь	0.268	0.273	0.265	0.246	0.265

Рассматривая движение относительно цилиндрической системы безразмерных координат r , z с осью симметрии z и началом O на поверхности жидкости в состоянии покоя (фиг. 1), установим граничные и начальные условия

$$\partial\varphi / \partial z = \partial u / \partial t, \quad q = -p \quad \text{при } z = 0 \text{ и } t \geq 0 \quad (1.4)$$

$\partial\varphi / \partial r = \partial\varphi / \partial z = u = \partial u / \partial t = 0$ в бесконечности

$$\varphi = \partial\varphi / \partial t = 0 \quad \text{при } t = 0 \quad \text{и } z > 0 \quad (1.5)$$

$$u = 0, \quad \partial u / \partial t = v_0(r) \quad \text{при } t = 0$$

Здесь $v_0(r)$ — заданная начальная скорость точек пластины в направлении оси z . Таким образом, задача сводится к решению уравнений (1.3) при условиях (1.4) и (1.5).

§ 2. Решение задачи. Задачу (1.3) — (1.5) решаем при помощи последовательно применения интегрального преобразования Ханкеля нулевого порядка [2] по переменной r и преобразования Лапласа [3] по переменной t . Условимся при этом обозначать трансформанту Ханкеля некоторой функции f соответственно через F , а трансформанту Лапласа отмечать черточкой наверху, т. е.

$$F(\alpha, t) = \int_0^\infty r J_0(\alpha r) f(r, t) dr, \quad \bar{F}(\alpha, s) = \int_0^\infty F(\alpha, t) e^{-st} dt$$

Здесь J_0 — цилиндрическая функция первого рода нулевого порядка. Применяя интегральные преобразования к уравнениям (1.3) в указанном выше порядке, учитывая при этом условия (1.4) и (1.5), получим для трансформант Ханкеля — Лапласа искомым функций следующие уравнения

$$\frac{d^2\bar{\Phi}}{dz^2} - (s^2 + \alpha^2)\bar{\Phi} = 0, \quad s\bar{\Phi} + \bar{P} = 0 \quad (2.1)$$

При этом граничные условия будут иметь следующий вид:

$$(a\alpha^4 + s^2)\bar{U} = V_0(\alpha) - a\bar{P}|_{z=0}, \quad d\bar{\Phi}/dz = s\bar{U} \quad \text{при } z = 0$$

Решая первое уравнение системы (2.1), найдем

$$\Phi(\alpha, z, s) = A(\alpha, s)e^{\sigma z} + B(\alpha, s)e^{-\sigma z} \quad (\sigma = \sqrt{s^2 + \alpha^2}) \quad (2.2)$$

Здесь $A(\alpha, s)$, $B(\alpha, s)$ — произвольны. Условимся брать те значения σ , для которых $\text{Re } \sigma > 0$. Тогда из условия равенства нулю скорости в бесконечности следует, что $A(\alpha, s) = 0$. Используя уравнения (2.12) и (2.2), найдем

$$\bar{U} = \frac{V_0(\alpha)\sigma}{(s^2 + a\alpha^4)\sigma + as^2} \quad \bar{P}|_{z=0} = \frac{V_0(\alpha)s^2}{(s^2 + a\alpha^4)\sigma + as^2}$$

Применяя к этим равенствам обратные интегральные преобразования сначала по s , а затем по α , найдем

$$u(r, t) = \frac{1}{2} \int_0^\infty J_0(\alpha r) V_0(\alpha) \sum_{k=1}^3 \frac{\sigma_k^2}{P'(\sigma_k)} f(\alpha, t, \sigma_k) d\alpha \quad (2.3)$$

$$p|_{z=0} = \int_0^\infty \alpha V_0(\alpha) J_0(\alpha r) J_0(\alpha t) d\alpha - au(r, t) + \frac{a}{2} \int_0^\infty J_0(\alpha r) V_0(\alpha) \sum_{k=1}^3 \frac{\mu - \mu^2 \sigma_k}{P'(\sigma_k)} f(\alpha, t, \sigma_k) d\alpha \quad (2.4)$$

где $\mu = \alpha^2$, σ_k — корни уравнения

$$P(\sigma) = \sigma^3 + a\sigma^2 + (a\mu^2 - \mu)\sigma - a\mu = 0 \quad (2.5)$$

$$f(\alpha, t, \sigma) = \int_0^t e^{\sigma\tau} J_0(\alpha \sqrt{t^2 - \tau^2}) d\tau \quad (2.6)$$

Первое слагаемое в правой части равенства (2.4), не обращающееся в нуль при $t = 0$, назовем главным давлением и обозначим через $P_0(r, t)$. При помощи формулы преобразования Ханкеля и последующей замены переменной интегрирования его можно представить в следующей компактной форме:

$$P_0(r, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi v_0(\sqrt{r^2 + t^2 - 2rt \cos \theta}) d\theta \quad (2.7)$$

Величины σ_k , входящие в (2.3) и (2.4), сложным образом зависят от переменной интегрирования μ , что делает весьма трудной вычислительную работу. Можно

Таблица 2

w	a	$0 < x < x_1$	$x_1 < x < x_2$	$x_2 < x < x_3$	$x_3 < x < \xi$
$w = w_*$	$0 < a < a_1$	+	—	+	+
	$a_1 < a < 1/3$	+	—	+	—
	$1/3 < a < a_2$	+	—	—	—
	$a > a_2$	+	+	+	+
$w = w^*$	$0 < a < a_1$	—	—	—	+
	$a_1 < a < a_2$	—	—	—	—
	$a > a_2$	—	+	+	+

показать, что уравнение (2.5) при всех $a > 0$ и $\mu \geq 0$ всегда имеет непрерывно зависящий от μ вещественный неотрицательный корень $\sigma = \sigma_3 = x$, который можно принять за новую переменную интегрирования, а из уравнения (2.5) выразить μ через x ; тогда

$$\mu = (a + x \pm \lambda) / 2ax, \quad \lambda = \sqrt{(a + x)(a + x - 4ax^3)} \quad (2.8)$$

График зависимости μ от x приведен на фиг. 2. Кривая OA соответствует нижнему, а кривая AB — верхнему знаку в (2.8). Точка A имеет координаты $x = \xi$, $\mu = \mu_0 = \mu(\xi)$, где ξ — положительный корень уравнения

$$a + x - 4ax^3 = 0 \tag{2.9}$$

Остальные корни σ_1, σ_2 уравнения (2.5) следующим образом выражаются через корень $\sigma_3 = x$:

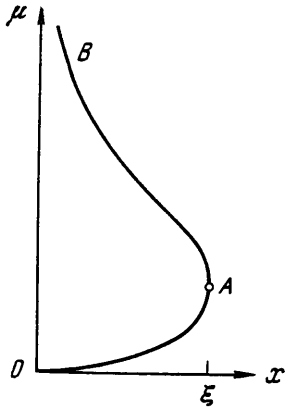
$$\begin{aligned} \sigma_1 &= -1/2(a + x) + 1/2w / 2x \\ \sigma_2 &= -1/2(a + x) - 1/2w / x \end{aligned} \tag{2.10}$$

$$w = \sqrt{(a + x)(x^3 + ax^2 - 2)} \mp 2\lambda$$

Характер корней σ_1 и σ_2 зависит от знака w^2 , определяемого по табл. 2, которая может служить также для контроля вычислений.

Величины x_s ($s = 1, 2, 3$) в табл. 2 выражаются через положительные корни $k_s > 1/2 a$ уравнения пятой степени

$$4k^5 - 4ak^4 + a^2k^3 - 2k^2 + 4ak - 2a^2 = 0 \tag{2.11}$$



Фиг. 2

в виде $x_s = 2k_s - a$, а числа a_1, a_2 суть

$$a_1 = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}} [2(3 - 2\sqrt{2})]^{1/3}, \quad a_2 = \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2}} [2(3 + 2\sqrt{2})]^{1/3}$$

Условимся обозначать однозначную ветвь всякой функции $A(x)$ через A^* или A_* , если в (2.8) берутся перед λ соответственно верхний или нижний знаки; тогда, согласно фиг. 2, для $u(r, t)$ и $p|_{z=0}$ получим следующие выражения:

$$u(r, t) = \int_0^\xi V_0(a_*) G_1(r, t; a_*, x) dx + \int_\xi^0 V_0(a^*) G_1(r, t; a^*, x) dx \tag{2.12}$$

$$p|_{z=0} = P_0(r, t) - au(r, t) + \int_0^\xi V_0(a_*) G_2(r, t; a_*, x) dx + \int_\xi^0 V_0(a^*) G_2(r, t; a^*, x) dx \tag{2.13}$$

$$G_1(r, t; a, x) = \mp \frac{J_0(ar)}{2\lambda} \left[x^2 f(a, t, x) + A(x) C(t, x) - \frac{B(x)}{w} S(t, x) \right] \tag{2.14}$$

$$\begin{aligned} G_2(r, t; a, x) = \pm \frac{\mu J_0(ar)}{4\lambda} \left[(x - a \pm \lambda) f(a, t, x) - \right. \\ \left. - (x - a \pm \lambda) C(t, x) + \frac{2aK(x)}{w} S(t, x) \right] \end{aligned} \tag{2.15}$$

$$A(x) = x(a + x) + a\mu / x, \quad B(x) = x^2(a + x)^2 + a(a - x)\mu \tag{2.16}$$

$$K(x) = x(x - a) + (a + x)(x^3 + 2)\mu / x \tag{2.17}$$

$$2C(t, x) = f(a, t, \sigma_1) + f(a, t, \sigma_2) \tag{2.18}$$

$$2S(t, x) = f(a, t, \sigma_1) - f(a, t, \sigma_2)$$

причем знаки (плюс и минус) выбираются в соответствии с (2.8).

Интеграл в равенстве (2.6), определяющий функцию $f(a, t, \sigma)$, при помощи разложения функции $J_0(\alpha\sqrt{t^2 - \tau^2})$ в ряд Фурье по переменной τ на отрезке $[-t, t]$ и применения второго интеграла Сонина [4] можно представить в виде

$$f(a, t, \sigma) = \frac{e^{\sigma t}}{\text{sh } \sigma t} \frac{\sin t \sqrt{a^2 - \sigma^2}}{\sqrt{a^2 - \sigma^2}} - \frac{1}{\sigma} \frac{\sin at}{at} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sigma t^2}{\pi^2 n^2 + \sigma^2 t^2} \frac{\sin \sqrt{\pi^2 n^2 + a^2} t^2}{\sqrt{\pi^2 n^2 + a^2} t^2} \tag{2.19}$$

Ряд справа в (2.19) сходится равномерно по σt в конечной плоскости, исключая точки $\sigma t = i\pi m$ ($m = \pm 1, \pm 2, \dots$), и равномерно по at на всей вещественной оси. Следовательно, почленное интегрирование его законно по тем множествам значений x , на которых функции $\sigma \neq x$, определяемые равенствами (2.10), ограничены. Эти функции неограничены при $x \rightarrow 0$ лишь тогда, когда $\sigma = \sigma^*$, т. е. при $a \rightarrow \infty$. В этом случае можно дать асимптотическое разложение функции $f(a, t, \sigma)$.

Для этого представим функцию $f(a, t, \sigma)$ в виде

$$f(a, t, \sigma) = \int_0^t J_0(\alpha \sqrt{t^2 - \tau^2}) \operatorname{ch} \sigma \tau d\tau + \int_0^t J_0(\alpha \sqrt{t^2 - \tau^2}) \operatorname{sh} \sigma \tau d\tau$$

Первый интеграл справа равен [4]

$$f_c(a, t, \sigma) = \int_0^t J_0(\alpha \sqrt{t^2 - \tau^2}) \operatorname{ch} \sigma \tau d\tau = \frac{\sin t \sqrt{\alpha^2 - \sigma^2}}{\sqrt{\alpha^2 - \sigma^2}}$$

Второй интеграл можно преобразовать в более простой, а именно:

$$f_s(a, t, \sigma) = \int_0^t J_0(\alpha \sqrt{t^2 - \tau^2}) \operatorname{sh} \sigma \tau d\tau = \frac{\sigma}{\sqrt{\alpha^2 - \sigma^2}} \int_0^t J_0(\alpha \tau) \sin [\sqrt{\alpha^2 - \sigma^2} (t - \tau)] d\tau$$

при условии $\operatorname{Im}(\sqrt{\alpha^2 - \sigma^2} / \sigma) > 0$. Введем теперь функцию

$$\psi(a, b) = \int_0^a J_0(x) \operatorname{sh} b(a - x) dx \quad (a \geq 0) \quad (2.20)$$

Здесь b — комплексная величина.

Так как $J_0(x)$ — бесконечно дифференцируема, то, применяя интегрирование по частям, получим для $\psi(a, b)$ асимптотическое разложение при больших $|b|$

$$\psi(a, b) \sim \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \operatorname{ch} ab - 4^n J_0(2^n)(a)}{4^n b^{2n+1}} \quad (2.21)$$

Применяя полученную асимптотическую формулу к $f_s(a, t, \sigma)$, найдем, согласно (2.20):

$$f_s(a, t, \sigma) = -\frac{i}{\alpha} \psi\left(at, \frac{i\sqrt{\alpha^2 - \sigma^2}}{\alpha}\right) \approx -\frac{\sigma}{\alpha^2 - \sigma^2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\alpha^2}{\alpha^2 - \sigma^2}\right)^n \left[\frac{\cos t \sqrt{\alpha^2 - \sigma^2}}{4^n} - (-1)^n J_0^{(2n)}(at) \right] \quad (2.22)$$

Ограничиваясь главным членом разложения, найдем асимптотическое представление $f(a, t, \sigma)$ при больших α и σ в более простом виде

$$f(a, t, \sigma) \approx \frac{\sin t \sqrt{\alpha^2 - \sigma^2}}{\sqrt{\alpha^2 - \sigma^2}} - \sigma \frac{\cos t \sqrt{\alpha^2 - \sigma^2} - J_0(at)}{\alpha^2 - \sigma^2} \quad (2.23)$$

При помощи последнего соотношения легко оценить порядок функции $f(a, t, \sigma)$ при больших α и σ . В самом деле, из уравнений (2.8) и (2.10) имеем при $a \rightarrow \infty$

$$\sigma \sim -i/2a \pm i\alpha^2 \sqrt{a}, \quad \alpha^2 - \sigma^2 = \alpha^4 a \sigma / (a + \sigma) \sim \alpha a^4$$

Так как при этом функции $\sin t \sqrt{\alpha^2 - \sigma^2}$, $\cos t \sqrt{\alpha^2 - \sigma^2}$, $J_0(at)$ ограничены, то из (2.23) при $\sigma \neq x$ следует, что $f(a, t, \sigma)$ имеет порядок α^{-2} .

В заключение настоящего параграфа приведем некоторые соображения, связанные с конкретным вычислением интегралов, входящих в (2.12) и (2.13). Прежде всего, будем предполагать время t малым на основании того факта, что полученное решение имеет смысл лишь до момента перехода полного гидродинамического давления из области положительных значений в область отрицательных.

Исследование поведения функций $G_1(r, t; \alpha, x)$ и $G_2(r, t; \alpha, x)$ на отрезке $0 \leq x \leq \xi$ при помощи равенств (2.14), (2.15) показывает, что обе функции на интервале $0 < x < \xi$ непрерывны, а при $x = \xi$ имеют слабую особенность вида $(\xi - x)^{-1/2}$. При помощи тех же равенств и асимптотического соотношения (2.23) устанавливаем их порядок при малых и больших α ; именно

$$\begin{aligned} G_k(r, t; \alpha^*, x) &= O(\alpha^{2k-1}), \quad \alpha \sim x \rightarrow 0 \\ G_k(r, t; \alpha^*, x) &= O(\alpha^{1/2(4k-1)}), \quad \alpha \sim 1/\sqrt{x} \rightarrow \infty \end{aligned} \tag{2.24}$$

где x выражено через α согласно (2.8); $k = 1, 2$. Если теперь предположить, что $V_0(\alpha)$ ограничена при $0 < x \leq \xi$ и удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} V_0(\alpha) &\approx \frac{A + B \ln \alpha}{\alpha^{p_1 + msq}} e^{-s/\alpha^m}, \quad p_1 < 2, \quad \alpha \rightarrow 0 \\ V_0(\alpha) &\approx \frac{A + B \ln \alpha}{\alpha^{p_2 + msq}} e^{-s\alpha^m}, \quad p_2 > 3/2, \quad \alpha \rightarrow \infty \end{aligned} \tag{2.25}$$

где $m \geq 0, s \geq 0$, а остальные постоянные могут иметь любые вещественные значения, то интегралы в (2.12) и (2.13) будут абсолютно сходящимися.

Перейдем теперь к вопросу о приближенном вычислении интегралов в (2.12) и (2.13). По характеру поведения подынтегральных функций их можно разбить на два типа

$$R_* = \int_0^\xi G(r, t; \alpha^*, x) dx, \quad R^* = \int_\xi^0 G(r, t; \alpha^*, x) dx \tag{2.26}$$

где $G(r, t; \alpha, x)$ означает любую из функций $V_0(\alpha)G_1$ или $V_0(\alpha)G_2$.

Из равенств (2.19) и (2.23) видно, что подынтегральные функции содержат осциллирующий множитель вида $\exp[it\psi(\alpha)]$, где $\psi(\alpha)$ — вещественная функция, не ограниченная при $\alpha \rightarrow \infty$. Поэтому применение формул приближенного интегрирования с небольшим числом узлов возможно на тех частях отрезка $0 \leq x \leq \xi$, где α ограничено, так как при малых t подынтегральные функции будут медленно осциллирующими. Иначе говоря, существующие квадратурные формулы могут быть использованы, если в интегралах типа R^* из отрезка интегрирования исключить окрестность точки $x = 0$.

Пусть ε — произвольно и удовлетворяет неравенству $0 < \varepsilon \leq \xi$. Тогда, согласно (2.26), можно записать

$$R^* = \int_\xi^\varepsilon G(r, t; \alpha^*, x) dx + \int_\varepsilon^0 G(r, t; \alpha^*, x) dx$$

Первое слагаемое R_ε^* в правой части, а также интегралы типа R , можно приближенно вычислить известными методами [9], используя при этом (2.19). Второе слагаемое

$$\rho_\varepsilon(r, t) = \int_\varepsilon^0 G(r, t; \alpha^*, x) dx \tag{2.27}$$

можно оценить, заменяя предварительно подынтегральную функцию ее простейшим асимптотическим представлением при $\alpha \rightarrow \infty$ и используя асимптотическую формулу (2.23).

В табл. 2 приведены знаки w^2 при различных x . Из этой таблицы следует, что при любом $a > 0$ существует наибольшее значение $x = x_{\max}$ такое, что корни σ_1^* и σ_2^* уравнения (2.5) будут комплексно-сопряженными при $0 < x < x_{\max}$. Поэтому в основу выбора ε положим неравенство

$$0 < \varepsilon \leq x_{\max} \tag{2.28}$$

Значение $x = x_{\max}$ определяется согласно табл. 2 при $w = w^*$.

Практически удобно при вычислении интегралов в (2.12) и (2.13) разбить сначала отрезок $0 \leq x \leq \xi$ на части в точках $x_s = 2k_s - a$, где k_s — корни уравнения (2.11), а затем, устранив возможные слабые особенности, применить квадратурные формулы [3] на каждом из полученных частичных отрезков, учитывая при этом их длину и поведение подынтегральных функций. Для перехода к размерным величинам служат равенства (1.2).

§ 3. **Примеры.** Рассмотрим несколько примеров, соответствующих некоторым физически возможным распределениям начальной скорости $v_0(r)$. Из-за громоздкости ограничимся отысканием трансформанты $V_0(\alpha)$ и главного давления $P_0(r, t)$, определяемого равенством (2.7).

Пример 1. Пусть начальная скорость $v_0(r) = (r^2 + b^2)^{-1}$, $b > 0$. Здесь

$$V_0(\alpha) = \int_0^{\infty} \frac{x J_0(\alpha x)}{x^2 + b^2} dx = K_0(\alpha b)$$

где K_0 — модифицированная функция Бесселя второго рода;

$$P_0(r, t) = \{[b^2 + (r+t)^2][b^2 + (r-t)^2]\}^{-1/2}.$$

Пример 2. Пусть начальная скорость $v_0(r) = \exp(-br^2)$, $b > 0$. В этом случае

$$V_0(\alpha) = \int_0^{\infty} \exp(-bx^2) J_0(\alpha x) x dx = \frac{1}{2b} \exp\left(-\frac{\alpha^2}{4b}\right)$$

$$P_0(r, t) = I_0(2brt) \exp[-b(r^2 + t^2)]$$

Здесь I_0 — модифицированная функция Бесселя первого рода.

Пример 3. Пусть начальная скорость такова:

$$v_0(r) = (b^2 - r^2)^m, \quad (0 \leq r \leq b); \quad v_0(r) = 0, \quad (r > b > 0)$$

где $m = 1, 2, \dots$; тогда

$$V_0(\alpha) = \int_0^b (b^2 - x^2)^m x J_0(\alpha x) dx = 2^m m! b^{m+1} \frac{J_{m+1}(b\alpha)}{\alpha^{m+1}}$$

$$P_0(r, t) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \eta(\cos \theta - A) (b^2 - r^2 - t^2 + 2rt \cos \theta)^m d\theta$$

$$A = \frac{r^2 + t^2 + b^2}{2rt}, \quad \eta(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x > 0 \\ 0, & \text{если } x < 0 \end{cases}$$

В частности, при $m = 1$ имеем

$$P_0(r, t) = \eta(b - r - t) (b^2 - r^2 - t^2) +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \eta(r + t - b) \eta(b - |r - t|) \left\{ (b^2 - r^2 - t^2) \arccos \frac{r^2 + t^2 - b^2}{2rt} + \right.$$

$$\left. + \sqrt{[b^2 - (r-t)^2][(r+t)^2 - b^2]} \right\}$$

Во всех рассмотренных примерах функция $V_0(\alpha)$ удовлетворяет условиям (2.25).

Поступило 17 II 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. Изд. 2-е. Изд-во «Наука», 1966.
2. Снеддон И. Преобразования Фурье. Изд. иностр. лит., 1955.
3. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. Изд. 2-е. Физматгиз, 1958.
4. Ватсон Г. Н. Теория бесселевых функций. Изд. иностр. лит., 1949.
5. Крылов В. И. Приближенное вычисление интегралов. Физматгиз, 1959.
6. Градштейн И. С., Рыжик Н. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Изд. 4-е. Физматгиз, 1962.