ЛИТЕРАТУРА

1. Чарный И. А. Методы расчета перемещения границы раздела нефти и воды в пластах. Изв. АН СССР. ОТН, 1954, № 4.
2. Чарный И. А. Движение границы раздела двух жидкостей в пористой среде. Изв. АН СССР. ОТН, Энергетика и автоматика, 1959, № 3.
3. Алихашкин Я. И. Численное интегрирование уравнения автомодельного движения границы раздела двух жидкостей в пористой среде. Изв. АН СССР. ОТН, Механика и машиностроение, 1961, № 5.
4. Зигангареев М. А., Теплов Ю. А. Расчеты перемещения водонефтяного контакта в наклонном пласте и сравнение их с данными моделирования. Тр. Всесоюзн. нефтегазового н.-и. ин-та, 1966, вып. 47.
5. Зигангареев М. А., Теплов Ю. А. Расчеты на ЭЦВМ осесимметричного перемещения водо-нефтяного контакта. Казан. физ. техн. ин-т. Тезисы докл. юбилейной научн. конф., посвященной 20-летию ин-та Секции механ.-матем. н., Казань, 1966.
6. Теплов Ю. А. О совместном притоке нефти и подошвенной воды к скважине в неоднородном пласте. Изв. АН СССР. ОТН, Механика и машиностроение, 1961, № 2.
7. Саульев В. К. Интегрирование уравнений параболического типа методом сеток. Физматгиз, 1960.

К ОДНОМЕРНОЙ ЗАДАЧЕ ВЫТЕСНЕНИЯ НЕФТИ ВОДОЙ В ТРЕЩИНОВАТО-ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

Э. В. СКВОРЦОВ

(Казань)

Рассматривается одномерное вытеснение нефти водой в трещиновато-пористой среде. Предлагается специальная зависимость насыщенности от времени, хорошо аппроксимирующая опытную кривую. Для ряда законов изменения дебита найдено положение фронта нагнетаемой воды с течением времени.

1. В работах [1, 2] теоретически и экспериментально изучаются основные процессы, происходящие в трещиновато-пористых средах при вытеснении нефти водой (жидкости считаются несмешивающимися). На основании работ Г. И. Баренблатта, Ю. П. Желтова и В. М. Рыжика [3, 4] выведены уравнения движения нефти и воды в трещинах и пористых блоках, которые в случае одномерного вытеснения после упрощений можно записать в форме

$$q(t)f'(\rho_1)\partial\rho_1 / \partial x + hb\varphi[t - \vartheta(x)] = 0 \qquad (1.1)$$

где

$$f(\rho_1) = \frac{f_1(\rho_1)}{f_1(\rho_1) + \mu_0 f_2(\rho_1)}, \quad \mu_0 = \frac{\mu_1}{\mu_2}, \quad q(t) = hb\int\limits_{x(\vartheta)} \varphi[t - \vartheta(x)]\,dx \qquad (1.2)$$

Здесь h — мощность пласта; b — его ширина; $q(t)$ — объем воды, поступающей в пласт за единицу времени (дебит воды); μ_1 и μ_2 — вязкости воды и нефти; ρ_1 — насыщенность водой в системе трещин; $f_1(\rho_1)$ и $f_2(\rho_1)$ — относительные проницаемости воды и нефти в системе трещин; $t - \vartheta(x)$ — время нахождения каждого элемента среды в обводненной зоне $(t \geqslant \vartheta)$; x — линейный размер; $V = \varphi[t - \vartheta(x)]$ — объем воды, впитывающейся в пористые блоки из трещин за счет капиллярных сил за единицу времени на единицу породы. Функция φ связана с насыщенностью ρ_2 блоков водой (m_2 — пористость блоков)

$$m_2\partial\rho_2 / \partial t = \varphi(t)$$

Функция $\rho_2(t)$ определяется экспериментально. Из графика, приведенного в работе [2], следует, что данная кривая при $t \to 0$ близка к параболе и имеет асимптоту $\rho_2(t) = \rho_n = \mathrm{const}$. Если $\rho_2(t)$ приближенно описать уравнением параболы

$$\rho_2(t) = \alpha\sqrt{t} \qquad (1.3)$$

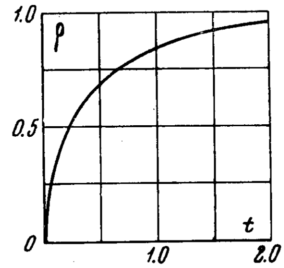
где α — постоянная, зависящая от ряда параметров, то это позволяет свести (1.2) к уравнению Абеля [2] и получить закон движения фронта нагнетаемой воды. Следующая из (1.3) конечность времени пропитки до полного насыщения приводит к образованию заднего фронта, где насыщенность водой стала максимальной. С целью учета взаимодействия фронтов движение разбивается на n стадий, на каждой из которых надо решить уравнение Абеля. Чем больше n, тем точнее это решение.

В частном случае $q = \text{const}$, из физических соображений следует, что при $t \to \infty$ передний фронт должен двигаться с постоянной скоростью.

Однако, парабола (1.3) близка к опытной кривой $\rho_2 = \rho_2(t)$ лишь для t, близких к нулю. В отличие от закона (1.3), используемого в [1, 2], рассмотрим следующий закон для $\rho_2(t)$:

$$\rho_2(t) = \rho_n \Phi(a\sqrt{t}), \quad a > 0$$

$$\left(\Phi(a\sqrt{t}) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{a\sqrt{t}} e^{-u^2}\, du\right) \tag{1.4}$$



Фиг. 1

Здесь $\Phi(a\sqrt{t})$ — интеграл вероятности ошибок. Функция (1.4), график которой для $a = 1$, $\rho_n = 1$ дан на фиг. 1 [5], хорошо аппроксимирует экспериментальную кривую на всем интервале изменения t. Пренебрегая членами порядка выше $t^{0.5}$, при $t \to 0$ получим

$$\Phi(a\sqrt{t}) \approx 2a\sqrt{t} / \sqrt{\pi}$$

т. е. (1.4) дает уравнение параболы $\rho_2(t) = \rho_n$ при $t \to \infty$, что и требуется.

Перейдем далее к безразмерным величинам [1]

$$T = t\frac{\sigma \cos\theta \sqrt{k_2/m_2\, s^2}}{\mu_2}, \quad \xi = \frac{x}{i}, \quad q^* = \frac{2q\mu_2}{hblAm_2\rho_n\sigma \cos\theta \sqrt{k2/m_2 s^2}} \tag{1.5}$$

Здесь σ — поверхностное натяжение на границе раздела воды и нефти, θ — угол избирательного смачивания, k_2 — проницаемость системы блоков, s — осредненная удельная поверхность пористых блоков, l — осредненный размер блока, A — коэффициент пропорциональности, определяемый из опыта.

Введем новую функцию

$$u(\tau) = d\xi / d\tau \tag{1.6}$$

Тогда после преобразований, аналогичных проделанным в [1], уравнение (1.2) с учетом (1.4), (1.5) примет вид

$$\int_0^T \frac{\exp[-a^2(T-\tau)]}{\sqrt{\pi(T-\tau)}}\, u(\tau)\, d\tau = \frac{q^*(T)}{a} \tag{1.7}$$

Уравнение (1.7) с начальным условием

$$\xi(0) = 0 \tag{1.8}$$

и формула (1.6) позволяют определить закон движения фронта нагнетаемой воды независимо от уравнения (1.1). Последнее служит для определения насыщенности и давления в трещинах.

Выражение (1.7) — уравнение Вольтерра первого рода с сингулярным ядром. Для его решения применим операционный метод. Пусть

$$L(s) = \int_0^\infty \frac{\exp[-(a^2+s)T]}{\sqrt{\pi T}}\, dT = \frac{1}{\sqrt{s+a^2}}, \quad F(s) = \frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-sT} q^*(T)\, dT,$$

$$M(s) = \frac{F(s)}{L(s)}$$

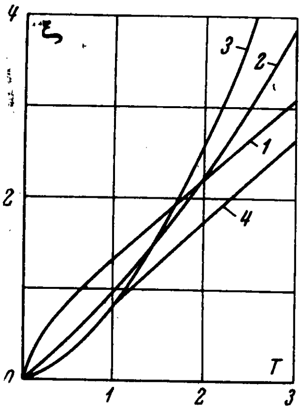
Тогда [6]

$$u(T) = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{sT} M(s)\, ds \tag{1.9}$$

Теперь, зная $u(T)$, найдем закон движения переднего фронта одной квадратурой

$$\xi(T) = \int u(T)\,dT + C, \qquad \text{или } \xi(T) = \int_0^T u(\tau)\,d\tau \tag{1.10}$$

2. Рассмотрим наиболее интересные частные случаи закона $q^*(T)$.



Фиг. 2

a) $q^*(T) = q_0^*$

Тогда

$$M(s) = q_0^* \sqrt{s + a^2 / as}$$

По формуле (1.9)

$$u(T) = q_0^* \left[\Phi(a\sqrt{T}) + \frac{\exp(-a^2T)}{a\sqrt{\pi T}}\right] \tag{2.1}$$

Дифференцированием по частям получим (2.2)

$$\int_0^T \Phi(a\sqrt{T})\,dT = \Phi(a\sqrt{T})\left(T - \frac{1}{2a^2}\right) + \frac{\exp(-a^2T)\sqrt{T}}{a\sqrt{\pi}}$$

Из (1.10), (2.1), (2.2) следует, что (2.3)

$$\xi(T) = q_0^* \left[\Phi(a\sqrt{T})\left(T + \frac{1}{2a^2}\right) + \frac{\exp(-a^2T)\sqrt{T}}{a\sqrt{\pi}}\right]$$

$$\xi(T) \approx q_0^*(T + 1/2a^2) \qquad \text{при } T \to \infty \tag{2.4}$$

т. е. кривая с уравнением (2.3) имеет асимптоту. График функции (2.3) дан на фиг. 2 (см. кривую *1*). Здесь и ниже для фиг. 2 имеем $a = 1$, $q_0^* = {}^1/_2\pi$

b) $q^*(T) = q_0^* \sqrt{T}$

Так как

$$F(s) = q_0^* \sqrt{\pi} / 2as\sqrt{s}$$

то по формуле (13.59) справочника [7]

$$u(T) = {}^1/_2 q_0^* a^{-1} \sqrt{\pi} \exp(-{}^1/_2 a^2T)[(1 + a^2T) I_0({}^1/_2 a^2T) + a^2T I_1({}^1/_2 a^2T)] \tag{2.5}$$

где $I_0(z)$ и $I_1(z)$ — функции Бесселя чисто мнимого аргумента нулевого и первого порядков. Пользуясь равенствами [8]

$$I_0'(z) = I_1(z), \qquad I_1'(z) = I_0(z) - z^{-1} I_1(z)$$

нетрудно найти

$$\int_0^z z e^{-z} [I_0(z) + I_1(z)]\,dz = \frac{z e^{-z}}{3} \{2z[I_0(z) + I_1(z)] - I_1(z)\}$$

Из (1.10) следует

$$\xi(T) = {}^1/_6 q_0^* \sqrt{\pi} a T \exp(-{}^1/_2 a^2T)[I_0({}^1/_2 a^2T)(3 + 2a^2T) + I_1({}^1/_2 a^2T)(1 + 2a^2T)] \tag{2.6}$$

На фиг. 2 кривая *2* построена по формуле (2.6).

c) $q^*(T) = q_0^* T$

Имея в виду известные соотношения между оригиналами и изображениями [7], из (2.3) получим

$$u(T) = q_0^* \left[\Phi(a\sqrt{T})\left(T + \frac{1}{2a^2}\right) + \frac{\exp(-a^2T)\sqrt{T}}{a\sqrt{\pi}}\right] \tag{2.7}$$

Выражение

$$\int_0^T T\Phi(a\sqrt{T})\,dT = \frac{1}{2}\left[\Phi(a\sqrt{T})\left(T^2 - \frac{3}{4a^4}\right) + \frac{\exp(-a^2T)\sqrt{T}}{a\sqrt{\pi}}\left(T + \frac{3}{2a^2}\right)\right] \tag{2.8}$$

Из (1.10), (2.7), 2.8)

$$\xi(T)=\frac{q_0^*}{2}\left[\Phi(a\sqrt{T})\left(T^2+\frac{1}{a^2}T-\frac{1}{4a^4}\right)+\frac{\exp(-a^2T)\sqrt{T}}{a\sqrt{\pi}}\left(T+\frac{1}{2a^2}\right)\right] \tag{2.9}$$

Кривая 3 на фиг. 2 построена по формуле (2.9). При необходимости можно рассмотреть и случай

$$q^*(T) = q_0^*T^2.$$

Для этого понадобится проинтегрировать формулу (2.9), что нетрудно сделать.

d) $$q^*(T)=\begin{cases} q_0^*T & \text{при } 0<T\leqslant T_0 \\ q_0^*T_0 & \text{при } T>T_0\end{cases}$$

В этом случае

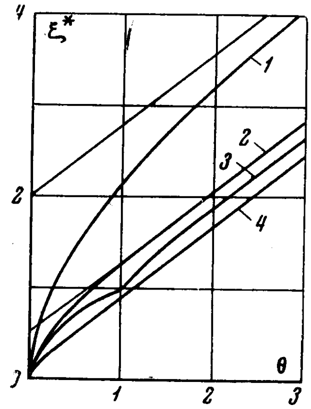
$$u(T) = G(T) - G(T-T_0) \tag{2.10}$$

где $G(T)$ — правая часть формулы (2.7), причем $G(T-T_0)=0$ при $T\leqslant T_0$. Из (2.10)

$$\xi(T) = H(T) - H(T-T_0) \tag{2.11}$$

где $H(T)$ — правая часть формулы (2.9), причем $H(T-T_0)=0$ при $T\leqslant T_0$

$$\xi(T) \approx q_0^*T_0(T-{}^1/_2T_0+{}^1/_2a^{-1}) \qquad \text{для } T\to\infty$$



Фиг. 3

т. е. кривая с уравнением (2.11) имеет асимптоту (см. кривую 4 на фиг. 2; $T_0=1$).

e) $q^*(T) = q_0^*\exp(-b^2T)$ $\qquad (b\leqslant a)$

Решение уравнения (1.7) таково:

$$u(T)=\frac{q_0^*}{a}\left\{\frac{\exp(-a^2T)}{\sqrt{\pi T}}+\sqrt{a^2-b^2}\exp(-b^2T)\Phi\sqrt{[(a^2-b^2)T]}\right\}$$

Отсюда

$$\xi(T)=\frac{q_0^*}{b^2}\left\{\Phi(a\sqrt{T})-\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}\exp(-b^2T)\Phi[\sqrt{(a^2-b^2)T}]\right\} \tag{2.12}$$

При $b\to 0$ (2.12) переходит в (2.3).

3. Для сравнения полученных в п. 2 результатов с выводами работы [2] перейдем к безразмерным координатам

$$\xi^* = \xi\pi/2q_0^*\sqrt{T^*}, \qquad \theta = T/T^* \tag{3.1}$$

где T^* — момент времени, к которому для закона (1.3) при $\xi=0$ образуется задний фронт с постоянным значением насыщенности [2]. Из (2.3), (2.4) и (3.1)

$$\xi^*(\theta)=\frac{\pi}{2}\left[\Phi(a\sqrt{T^*\theta})\left(\theta\sqrt{T^*}+\frac{1}{2a^2\sqrt{T^*}}\right)+\frac{\exp(-a^2T^*\theta)\sqrt{\theta}}{a\sqrt{\pi}}\right] \tag{3.2}$$

$$\xi^*(\theta) \approx {}^1/_2\pi(\theta\sqrt{T^*}+1/2a^2\sqrt{T^*}) \qquad \text{при } \theta\to\infty \tag{3.3}$$

Угол α наклона асимптоты с уравнением (3.3) к оси θ зависит от T^*, а отрезок, отсекаемый ею на оси ξ^*, — от T^* и a. Если выбрать $T^*={}^1/_4$, то α совпадает с углом наклона асимптоты, полученной в [2]. При $a\doteq\sqrt{\pi}$, если пренебречь членами порядка выше $\theta^{0.5}$, при $\theta\to 0$ будут совпадать уравнения кривой $\xi^*=\xi^*(\theta)$ на первой стадии решения задачи работы [2] и кривой (3.2): $\xi^*(\theta)\approx\sqrt{\theta}$. На фиг. 3 кривые 1, 2, 4 построены по формуле (3.2) для $T^*={}^1/_4$, $a={}^1/_2\sqrt{\pi}$, $a=\sqrt{\pi}$ и $a=2\sqrt{\pi}$; кривая 3 взята из [2].

При $q^*=\text{const}$ для закона (1.4) задний фронт и стабилизированная зона не образуются, поскольку пропитка до полного насыщения идет неограниченно долго. Однако можно проследить за продвижением фронта данной насыщенности. Эта кривая получится сдвигом кривой $\xi=\xi(T)$ вправо на величину T_k, соответствующую моменту, к которому в точке $\xi=0$ была достигнута заданная насыщенность ρ_k.

4. Радиальный случай задачи принципиально от линейного не отличается. Так, для $q^*(T) = q_0^*$ закон движения фронта нагнетаемой воды имеет вид

$$r(T) = \left\{ \frac{q_0^*}{\pi} \left[\Phi(a\sqrt{T}) \left(T + \frac{1}{2a^2} \right) + \frac{\exp(-a^2T)\sqrt{T}}{a\sqrt{\pi}} \right] \right\}^{1/2}$$

Отметим, что, имея графики решения уравнения (1.7), нетрудно при помощи (1.4) определить величину насыщенности в данной точке пласта в любой момент T.

Автор благодарит В. Л. Данилова за научное руководство.

Поступило 20 III 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Боксерман А. А., Желтов Ю. П., Кочешков А. А. О движении несмешивающихся жидкостей в трещиновато-пористой среде. Докл. АН СССР, 1964, т. 155, № 6.
2. Боксерман А. А., Данилов В. Л., Желтов Ю. П., Кочешков А. А. К теории фильтрации несмешивающихся жидкостей в трещиновато-пористых средах. Теория и практика добычи нефти (ежегодник ВНИИ нефтегаз), Изд. «Недра», 1966.
3. Баренблатт Г. И., Желтов Ю. П. Об основных уравнениях фильтрации однородных жидкостей в трещиноватых породах. Докл. АН СССР, 1960, т. 132, № 3.
4. Рыжик В. М. Вытеснение нефти водой в пористой среде с малопроницаемыми включениями. Изв. АН СССР. Механика и машиностроение, 1964, № 1.
5. Янке Е., Эмде Ф. Таблицы функций с формулами и кривыми. Гостехиздат, 1948.
6. Мюнтц Г. Интегральные уравнения, т. I. Гостехиздат, 1934.
7. Диткин В. А., Прудников А. П. Справочник по операционному исчислению. «Высш. шк.» 1965.
8. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, 1962.

ОСЕСИММЕТРИЧНЫЙ УДАР ПО ПЛАСТИНЕ, ЛЕЖАЩЕЙ НА ПОВЕРХНОСТИ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

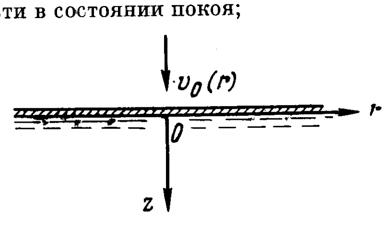
В. С. КОРЧАГИН (*Ростов-на-Дону*)

§ 1. Постановка задачи и уравнения движения. Пусть идеальная сжимаемая жидкость, заполняющая нижнее полупространство, ограничена плоской упругой пластиной (фиг. 1) и до момента $t = 0$ находится в покое. Затем в момент $t = 0$ по пластине наносится удар, в результате которого точки пластины получают заданные начальные скорости. Требуется определить совместное движение пластины и жидкости, предполагая, что пластина не отрывается от жидкости.

В данной работе ограничимся определением закона движения пластины, а также важной, с практической точки зрения, динамической величины — давления, действующего на пластину со стороны жидкости.

Допущения, принимаемые при решении этой задачи, следующие:

а) движение симметрично относительно оси, нормальной к поверхности жидкости в состоянии покоя;



Фиг. 1

б) перемещения и скорости частиц жидкости и пластины малы;

в) жидкость идеальная и баротропная;

г) массовые силы на жидкость не действуют.

При этих допущениях рассматриваемая задача представляет линейную задачу о потенциальном движении жидкости совместно с находящейся на ее поверхности упругой пластиной. Пусть φ — потенциал скорости жидкости, p — гидродинамическое давление, а u, q — соответственно прогиб пластины по нормали к ее поверхности и нормальная распределенная нагрузка, действующая по обеим сторонам пластины.

Тогда движения жидкости и пластины будут подчиняться уравнениям [1, 2]

$$\Delta\varphi = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{p}{\rho} = 0, \qquad \Delta\Delta u + \frac{\sigma_0}{D}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{q}{D} \tag{1.1}$$