главная линия тока $\theta = {}^1/_4\pi$

$$t = \frac{3(\sqrt{6}+2)}{ae_1\sqrt{6(1-\lambda)(5+2\sqrt{6})}}\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{\wp(^1/_2\sqrt{2}r(1-\lambda)^{^1/_4}+\omega_1)}{e_1(5+2\sqrt{6})^{^1/_2}} - \operatorname{arc\,tg}(5+2\sqrt{6})^{-^1/_2}\right] +$$

$$+\frac{3(\sqrt{6}-2)}{ae_1\sqrt{6(1-\lambda)(5-2\sqrt{6})}}\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{\wp(^1/_2\sqrt{2}r(1-\lambda)^{^1/_4}+\omega_1)}{e_1(5-2\sqrt{6})^{^1/_4}} - \operatorname{arc\,tg}(5-2\sqrt{6})^{-^1/_2}\right]$$

Время появления точки возврата

$$t_* = t^\circ(1-\lambda)^{-^1/_2} \qquad (-1 \leqslant \lambda \leqslant 0) \tag{5.6}$$

где t° определяется из соотношения (5.4) при $r = \omega_1$, $\lambda = 0$.

Автор благодарит В. Л. Данилова за ряд ценных советов и замечания.

Поступило 12 XII 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Slobod R., Caudle B. X-Ray Shadowgraph Studies of Arear Sweep-out Efficiencies. Trans. Amer. Inst. Mining Metallurg. Engrs, vol. 195, 1952.
2. Праведников Н. К., Кац Р. М. Об уравнениях движения водо-нефтяного контакта в системах площадного заводнения. Тр. ВНИИ, Изд. «Недра», 1965, вып. 42.
3. Пилатовский В. П. Об уравнениях неоднородного фильтрационного потока в тонком наклонном пласте. Тр. ВНИИ, Гостоптехиздат, 1962, вып. 32.
4. Праведников Н. К., Кац Р. М. К вопросу движения водонефтяного контакта при площадном заводнении. Тр. ТатНИИ, Изд. «Недра», 1965, вып. 8.
5. Данилов В. Л. Интегро-дифференциальные уравнения движения границы раздела двух жидкостей в пористой среде. Изв. Казанского филиала АН СССР. Сер. физ.-мат. и техн. наук, вып. 11, 1957.
6. Сикорский Ю. С. Элементы теории эллиптических функций с приложениями к механике. Гл. ред. общетехн. лит-ры и номогр., 1936.
7. Данилов В. Л. Об одном аналитическом методе решения задачи стягивания контура нефтеносности. Изв. АН СССР. ОТН, Механика и машиностроение, 1962, № 1.
8. Полубаринова-Кочина П. Я. К вопросу о перемещении контура нефтеносности. Докл. АН СССР, 1945, т. 47, № 4.
9. Галин Л. А. Неустановившаяся фильтрация со свободной поверхностью. Докл. АН СССР, 1945, т. 47, № 4.
10. Виноградов Ю. П., Куфарев П. П. О некоторых частных решениях задач фильтрации. Докл. АН СССР, 1947, т. 57, № 4.

О ПЕРЕМЕЩЕНИИ ВОДО-НЕФТЯНОГО КОНТАКТА В НЕОДНОРОДНОМ ПЛАСТЕ

Ю. А. ТЕПЛОВ *(Казань)*

Для нахождения перемещающегося в однородном пласте водо-нефтяного контакта (ВНК) И. А. Чарный предложил использовать схему предельно анизотропных пластов [1]. В работе [2] исследованы автомодельные задачи о перемещении ВНК, численное решение которых приведено в статье [3]. Численному интегрированию полученных в работе [1] нелинейных уравнений параболического типа посвящены работы [4, 5]. В работе [4] проведено сравнение результатов численного решения задачи о перемещении ВНК для двух случаев предельной анизотропии ($k_z = \infty$ и $k_z = 0$) с экспериментальными данными для изотропного пласта, показавшее, что случай $k_z = \infty$ дает результаты, весьма близкие к экспериментальным данным для изотропного пласта.

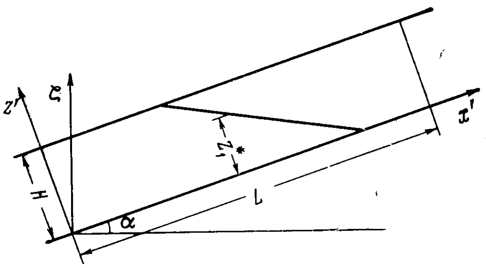
В настоящем исследовании метод, предложенный в работе [1], распространяется на неоднородный пласт, проницаемость которого — функция расстояния от подошвы пласта. Рассматривается только случай $k_z = \infty$. Выведены нелинейные уравнения параболического типа, определяющие плоское и осесимметричное перемещения ВНК в неоднородном пласте. Получены уравнения автомодельного движения ВНК в неоднородном пласте. Предложен возможный путь численного интегрирования полученных нелинейных уравнений параболического типа.

1. Плоское движение ВНК. Рассмотрим пласт, составляющий угол α с горизонтом, проницаемость которого $k' = k'(z')$. Оси координат разместим так, как показано на фиг. 1. Согласно закону Дарси, для составляющих скоростей фильтрации воды и нефти вдоль напластования имеем

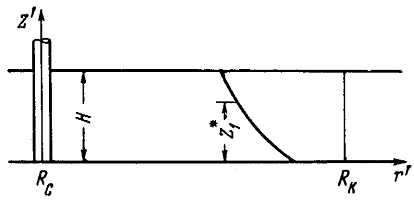
$$V_1 = -\frac{k'(z')}{\mu_1}\frac{\partial p_1^*}{\partial x'}, \qquad V_2 = -\frac{k'(z')}{\mu_2}\frac{\partial p_2^*}{\partial x'} \tag{1.1}$$

$$p_1^* = p_1 + \gamma_1\zeta, \qquad p_2^* = p_2 + \gamma_2\zeta \tag{1.2}$$

Здесь $p_1 = p_1(x', z', t)$, $p_2 = p_2(x', z', t)$ — гидродинамические давления в водяной и нефтяной зонах; ζ — расстояние от горизонтальной плоскости, проходящей через начало координат; $p_1^* = p_1^*(x', z', t)$, $p_2^* = p_2^*(x', z', t)$ — приведенные к этой плоскости давления в водяной и нефтяной зонах; μ_1, μ_2 — вязкости воды и нефти; γ_1,



Фиг. 1



Фиг. 2

γ_2 — весовые плотности воды и нефти. Поскольку при $k_z = \infty$ давления по перпендикулярам к напластованию распределяются по гидростатическому закону, то для приведенных давлений в водяной и нефтяной зонах, согласно (1.2) и формуле поворота осей

$$\zeta = z'\cos\alpha + x'\sin\alpha$$

получим соотношения

$$p_1^* = p_0^*, \quad p_2^* = p_0^* - \Delta\gamma(z_1^*\cos\alpha + x'\sin\alpha) \tag{1.3}$$

$$p_0^*(x', t) = p_0 + \gamma_1 x'\sin\alpha, \qquad p_0(x', t) = p_1(x', 0, t), \qquad \Delta\gamma = \gamma_1 - \gamma_2$$

Здесь $p_0(x', t)$, $p_0^*(x', t)$ — гидродинамическое и приведенное давление на подошве пласта в водяной зоне; $z_1^*(x', t)$ — ордината точки ВНК. Из (1.3) видно, что $p_1^* = p_1^*(x', t)$, $p_2^* = p_2^*(x', t)$ не зависят от z'. Для расходов воды и нефти, согласно (1.1) и (1.3), получим

$$Q_1 = \int_0^{z_1^*} V_1 dz' = -\frac{1}{\mu_1}\frac{\partial p_0^*}{\partial x'}K'(0, z_1^*)$$
$$Q_2 = \int_{z_1^*}^{H} V_2 dz' = -\frac{1}{\mu_2}\left(\frac{\partial p_0^*}{\partial x'} - \Delta\gamma\frac{\partial z_1^*}{\partial x'}\cos\alpha - \Delta\gamma\sin\alpha\right)K'(z_1^*, H) \tag{1.4}$$

Здесь, так же как и в [6], используются следующие обозначения:

$$K(h_1, h_2) = \int_{h_1}^{h_2} k(z)\,dz, \qquad K'(H_1, H_2) = \int_{H_1}^{H_2} k'(z')\,dz' \tag{1.5}$$

Жидкости считаются несжимаемыми, поэтому уравнения неразрывности будут следующими:

$$-\partial Q_1 / \partial x' = m\partial z_1^* / \partial t, \qquad \partial Q_2 / \partial x' = m\partial z_1^* / \partial t \tag{1.6}$$

Если из формулы суммарного дебита $Q = Q_1 + O_2$, где Q_1 и Q_2 согласно (1.4), найти выражение для dp_0^*/dx' и подставить его в уравнение неразрывности (1.6) для воды, в котором Q_1 согласно (1.4), то получим

$$\frac{\partial}{\partial x'}\left[\frac{K'(0, z_1^*)}{\mu_1}\frac{-Q + \Delta\gamma\mu_2^{-1}K'(z_1^*, H)(\cos\alpha\,\partial z_1^*/\partial x' + \sin\alpha)}{\mu_1^{-1}K'(0, z_1^*) + \mu_2^{-1}K'(z_1^*, H)}\right] = m\frac{\partial z_1^*}{\partial t} \tag{1.7}$$

Уравнение (1.7) — нелинейное уравнение параболического типа. Если в уравнении (1.7) принять, помня (1.5),

$$k(z') = k' = \text{const}$$

то сразу же получается уравнение (3.9) работы [1].

Уравнение (1.7) после дифференцирования в левой его части с учетом (1.5) и формулы дифференцирования интеграла, зависящего от параметра, преобразуется к виду

$$\left\{-\frac{q(\tau)k(z^*)}{[\mu_0 K(0,z^*)+K(z^*,1)]^2}+\sin\alpha\frac{d\Phi(z^*)}{dz^*}\right\}\frac{\partial z^*}{\partial x}+ \\ +\cos\alpha\frac{d\Phi(z^*)}{dz^*}\left(\frac{\partial z^*}{\partial x}\right)^2+\cos\alpha\Phi(z^*)\frac{\partial^2 z^*}{\partial x^2}=\frac{\partial z^*}{\partial \tau} \tag{1.8}$$

Здесь

$$\Phi(z^*)=\frac{K(0,z^*)K(z^*,1)}{\mu_0 K(0,z^*)+K(z^*,1)} \tag{1.9}$$

и введены следующие безразмерные величины:

$$\tau=\frac{k^\circ\Delta\gamma t}{m\mu_1 H},\quad q(\tau)=\frac{\mu_2 Q(t)}{k^\circ\Delta\gamma H},\quad \mu_0=\frac{\mu_2}{\mu_1},\quad k=\frac{k'}{k^\circ},\quad z^*=\frac{z_1^*}{H}$$

$$x=\frac{x'}{H},\quad k^\circ=\frac{K'(0,H)}{H} \tag{1.10}$$

Таким образом, для решения задачи о перемещении ВНК в неоднородном наклонном пласте при $k_z=\infty$ надо проинтегрировать нелинейное уравнение параболического типа (1.8) при заданных начальном положении ВНК $z^*(x, 0) = z_0^*(x)$ и законе изменения дебита $q = q(\tau)$.

2. Осесимметричное движение ВНК. При осуществлении внутриконтурного заводнения горизонтального пласта происходит осесимметричное движение ВНК. Оси координат разместим так, как показано на фиг. 2. Поступим так же, как и при исследовании плоского движения ВНК. Из закона Дарси, схемы $k_z=\infty$ и уравнений неразрывности для воды и нефти получим следующее уравнение:

$$\frac{1}{r}\left\{-\frac{q(\tau)k(z^*)}{[\mu_0 K(0,z^*)+K(z^*,1)]^2}+\Phi(z^*)\right\}\frac{\partial z^*}{\partial r}+ \\ +\frac{d\Phi(z^*)}{dz^*}\left(\frac{\partial z^*}{\partial r}\right)^2+\Phi(z^*)\frac{\partial^2 z^*}{\partial r^2}=\frac{\partial z^*}{\partial\tau}\qquad\left(q(\tau)=\frac{\mu_2 Q(t)}{2\pi k^\circ\Delta\gamma H^2},\ r=\frac{r'}{H}\right) \tag{2.1}$$

Здесь $\Phi(z^*)$ согласно (1.9), остальные безразмерные величины согласно (1.10). Для решения задачи об осесимметричном перемещении ВНК в неоднородном пласте при $k_z=\infty$ надо проинтегрировать нелинейное уравнение параболического типа (2.1) при заданных начальном положении ВНК $z^*(r, 0) = z_0^*(r)$ и законе изменения дебита $q = q(\tau)$.

3. Автомодельные движения ВНК в неоднородном пласте. Уравнения (1.8) и (2.1) — сложные нелинейные уравнения в частных производных второго порядка параболического типа, и аналитическое решение их затруднительно.

Однако в некоторых частных случаях эти уравнения сводятся к обыкновенным нелинейным дифференциальным уравнениям второго порядка, численное решение которых не вызывает принципиальных затруднений. В этих случаях движение будет автомодельным.

(а) Введем новую независимую переменную

$$\xi_1 = x - a\tau$$

считая $z^* = z^*(\xi_1)$.

Тогда уравнение (1.8) при $q(\tau) = q = \text{const}$ принимает вид

$$\left\{-\frac{qk(z^*)}{[\mu_0 K(0, z^*)+K(z^*, 1)]^2}+\sin\alpha\frac{d\Phi(z^*)}{dz^*}+a\right\}\frac{dz^*}{d\xi_1}+$$

$$+\cos\alpha\frac{d\Phi(z^*)}{dz^*}\left(\frac{dz^*}{d\xi_1}\right)^2+\cos\alpha\Phi(z^*)\frac{d^2z^*}{d\xi_1^2}=0 \tag{3.1}$$

Уравнение (3.1) определяет стабилизированное перемещение ВНК в неоднородном пласте параллельно напластованию с постоянной скоростью $a = q / \mu_0$.

(б) Если ввести новую независимую переменную

$$\xi = x / \sqrt{\tau}$$

считая $z^* = z^*(\xi)$, то уравнение (1.8) при $\alpha = 0$ и $q(\tau) = A / \sqrt{\tau}$, где $A = \text{const}$, принимает вид

$$\left\{-\frac{Ak(z^*)}{[\mu_0 K(0, z^*)+K(z^*, 1)]^2}+\frac{\xi}{2}\right\}\frac{dz^*}{d\xi}+\frac{d\Phi(z^*)}{dz^*}\left(\frac{dz^*}{d\xi}\right)^2+\Phi(z^*)\frac{d^2z^*}{d\xi^2}=0 \tag{3.2}$$

Уравнение (3.2) — обобщение на неоднородный пласт уравнения (1.6) работы [2].

(в) Если ввести новую независимую переменную

$$\xi = r / \sqrt{\tau}$$

считая $z^* = z^*(\xi)$, то уравнение (2.1) при $q(\tau) = q = \text{const}$ принимает вид (3.3)

$$\left\{-\frac{qk(z^*)}{\xi[\mu_0 K(0, z^*)+K(z^*, 1)]^2}+\frac{\Phi(z^*)}{\xi}+\frac{\xi}{2}\right\}\frac{dz^*}{d\xi}+\frac{d\Phi(z^*)}{dz^*}\left(\frac{dz^*}{d\xi}\right)^2+\Phi(z^*)\frac{d^2z^*}{d\xi^2}=0$$

Уравнение (3.3) — обобщение на неоднородный пласт уравнения (5.2) работы [2].

4. Применение метода сеток для расчета перемещения ВНК в неоднородном пласте. Для численного интегрирования полученных выше нелинейных уравнений параболического типа (1.8) и (2.1) можно применить метод, использованный в работах [4, 5]. Непосредственное интегрирование методом сеток уравнений (1.8) и (2.1) наталкивается на следующую трудность — неизвестен интервал изменения независимой переменной x в (1.8) и r в (2.1), тогда как интервал изменения функции известен $0 \leqslant z^* \leqslant 1$. В уравнениях (1.8) и (2.1) примем за независимую переменную z^*, тогда x в (1.8) и r в (2.1) будут функциями z^* и τ. Следовательно, вместо функции $z^* = f(x, \tau)$ или $z^* = f(r, \tau)$ будем рассматривать функцию $x = \varphi(z^*, \tau)$ или $r = \varphi(z^*, \tau)$. Уравнения (1.8) и (2.1) после перехода к новым переменным принимают вид

$$\left\{-\frac{q(\tau)k(z^*)}{[\mu_0 K(0, z^*)+K(z^*, 1)]^2}+\sin\alpha\frac{d\Phi(z^*)}{dz^*}\right\}+$$

$$+\cos\alpha\frac{d\Phi(z^*)}{dz^*}\frac{1}{\partial x/\partial z^*}-\cos\alpha\Phi(z^*)\frac{\partial^2 x/\partial z^{*2}}{(\partial x/\partial z^*)^2}+\frac{\partial x}{\partial\tau}=0 \tag{4.1}$$

$$\frac{1}{r}\left\{-\frac{q(\tau)k(z^*)}{[\mu_0 K(0, z^*)+K(z^*, 1)]^2}+\Phi(z^*)\right\}+\frac{d\Phi(z^*)}{dz^*}\frac{1}{\partial r/\partial z^*}-\Phi(z^*)\frac{\partial^2 r/\partial z^{*2}}{(\partial r/\partial z^*)^2}+\frac{\partial r}{\partial\tau}=0 \tag{4.2}$$

Для определения ВНК в неоднородном пласте в различные моменты безразмерного времени τ надо проинтегрировать уравнения (4.1) или (4.2) при заданных начальном положении ВНК $x(z^*, 0) = x_0(z^*)$ или $r(z^*, 0) = r_0(z^*)$ и законе изменения дебита $q = q(\tau)$. Интегрирование уравнения (4.1) или (4.2) можно провести методом сеток при аппроксимации его явной конечно-разностной схемой. Для устойчивости решения методом сеток уравнения (4.1) или (4.2) необходимо, чтобы пространственный шаг и шаг сетки по времени удовлетворяли неравенствам (17.12) и (17.14) работы [7].

Поступило 28 X 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Чарный И. А. Методы расчета перемещения границы раздела нефти и воды в пластах. Изв. АН СССР. ОТН, 1954, № 4.
2. Чарный И. А. Движение границы раздела двух жидкостей в пористой среде. Изв. АН СССР. ОТН, Энергетика и автоматика, 1959, № 3.
3. Алихашкин Я. И. Численное интегрирование уравнения автомодельного движения границы раздела двух жидкостей в пористой среде. Изв. АН СССР. ОТН, Механика и машиностроение, 1961, № 5.
4. Зигангареев М. А., Теплов Ю. А. Расчеты перемещения водонефтяного контакта в наклонном пласте и сравнение их с данными моделирования. Тр. Всесоюзн. нефтегазового н.-и. ин-та, 1966, вып. 47.
5. Зигангареев М. А., Теплов Ю. А. Расчеты на ЭЦВМ осесимметричного перемещения водо-нефтяного контакта. Казан. физ. техн. ин-т. Тезисы докл. юбилейной научн. конф., посвященной 20-летию ин-та Секции механ.-матем. н., Казань, 1966.
6. Теплов Ю. А. О совместном притоке нефти и подошвенной воды к скважине в неоднородном пласте. Изв. АН СССР. ОТН, Механика и машиностроение, 1961, № 2.
7. Саульев В. К. Интегрирование уравнений параболического типа методом сеток. Физматгиз, 1960.

К ОДНОМЕРНОЙ ЗАДАЧЕ ВЫТЕСНЕНИЯ НЕФТИ ВОДОЙ В ТРЕЩИНОВАТО-ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

Э. В. СКВОРЦОВ

(Казань)

Рассматривается одномерное вытеснение нефти водой в трещиновато-пористой среде. Предлагается специальная зависимость насыщенности от времени, хорошо аппроксимирующая опытную кривую. Для ряда законов изменения дебита найдено положение фронта нагнетаемой воды с течением времени.

1. В работах [1, 2] теоретически и экспериментально изучаются основные процессы, происходящие в трещиновато-пористых средах при вытеснении нефти водой (жидкости считаются несмешивающимися). На основании работ Г. И. Баренблатта, Ю. П. Желтова и В. М. Рыжика [3, 4] выведены уравнения движения нефти и воды в трещинах и пористых блоках, которые в случае одномерного вытеснения после упрощений можно записать в форме

$$q(t)f'(\rho_1)\,\partial\rho_1 / \partial x + hb\varphi\,[t-\vartheta(x)] = 0 \tag{1.1}$$

где

$$f(\rho_1)=\frac{f_1(\rho_1)}{f_1(\rho_1)+\mu_0 f_2(\rho_1)},\qquad \mu_0=\frac{\mu_1}{\mu_2},\qquad q(t)=hb\int\limits_{x(\vartheta)}\varphi\,[t-\vartheta(x)]\,dx \tag{1.2}$$

Здесь h — мощность пласта; b — его ширина; $q(t)$ — объем воды, поступающей в пласт за единицу времени (дебит воды); μ_1 и μ_2 — вязкости воды и нефти; ρ_1 — насыщенность водой в системе трещин; $f_1(\rho_1)$ и $f_2(\rho_1)$ — относительные проницаемости воды и нефти в системе трещин; $t-\vartheta(x)$ — время нахождения каждого элемента среды в обводненной зоне ($t\geqslant\vartheta$); x — линейный размер; $V=\varphi\,[t-\vartheta(x)]$ — объем воды, впитывающейся в пористые блоки из трещин за счет капиллярных сил за единицу времени на единицу породы. Функция φ связана с насыщенностью ρ_2 блоков водой (m_2 — пористость блоков)

$$m_2\partial\rho_2 / \partial t = \varphi(t)$$

Функция $\rho_2(t)$ определяется экспериментально. Из графика, приведенного в работе [2], следует, что данная кривая при $t\to 0$ близка к параболе и имеет асимптоту $\rho_2(t)=\rho_n=\mathrm{const}$. Если $\rho_2(t)$ приближенно описать уравнением параболы

$$\rho_2(t)=\alpha\sqrt{t} \tag{1.3}$$

где α — постоянная, зависящая от ряда параметров, то это позволяет свести (1.2) к уравнению Абеля [2] и получить закон движения фронта нагнетаемой воды. Сле-