

На большом удалении от скважины при  $|z| \gg l$  эквипотенциалами будут окружности и течение совпадает с притоком к скважине другого (приведенного) радиуса  $r_c$ . Считая заданным давление  $p_k$  на круговом контуре питания радиуса  $R$  для расхода  $Q$  и дополнительного сопротивления  $C$  имеем

$$Q = \frac{2\pi k}{\mu} \frac{p_k - p_c}{\ln(R/r_c)} = \frac{2\pi k}{\mu} \frac{p_k - p_c}{\ln(R/a) + C}, \quad C = -\frac{1}{n} \ln \left\{ \sin^2 \frac{\alpha}{2} + \frac{(l^n - a^n)^2}{4a^n l^n} \right\} \quad (2)$$

Отсюда вытекает, что дополнительное сопротивление довольно быстро убывает с ростом числа щелей  $n$  и становится отрицательным при

$$l > a(2 + \cos \alpha + \sqrt{(2 + \cos \alpha)^2 - 1})^{1/n}$$

Если скважина имеет лишь одну щель ( $n = 1$ ) и не имеет трещины ( $l = a$ ), то приведенный радиус представляет собой радиус круга, вписанного в ограниченный открытой частью скважины сегмент.

Если скважина имеет две щели и не имеет трещин, то приведенный радиус равен половине хорды, стягивающей открытую часть скважины.

Если приток происходит только через одну трещину ( $n = 1$ ,  $\alpha = 0$ ), то приведенный радиус скважины удовлетворяет соотношению  $2r_c / (l - a) = (l - a) / 2l$ .

Формулы (1) перестают быть справедливыми, если задано постоянное давление на круговом контуре радиуса  $R$ , сравнимом с глубиной трещины  $l$ , так как при  $|z| \sim l$  эквипотенциалами решения (1) не являются окружности. Точное решение задачи и для этого случая нетрудно выписать через эллиптические интегралы, пользуясь методом конформных отображений, как делается для подобных задач в книге [2]. Но при этом для определения дебита приходится решать систему трансцендентных уравнений. Если же предположить радиус скважины  $a$  равным нулю, что оправдано при  $l \gg a$ , выкладки значительно упрощаются, и для определения дебита получим формулу

$$Q = \frac{2\pi k}{\mu} (p_k - p_c) \frac{K(\cos \gamma)}{K(\sin \gamma)}, \quad \sin \gamma = \frac{R^n - l^n}{R^n + l^n}$$

Из (2.1) следует, что  $Q \rightarrow \infty$  при  $l \rightarrow R$ . Последнее указывает на необходимость учета перепада давления вдоль трещины при их значительной глубине.

Поступило 17 I 1967

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Чарный И. А. Подземная гидрогазодинамика. Гостоптехиздат, 1963.
2. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. Гостехиздат, 1952.

### О ДВИЖЕНИИ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА ДВУХ ЖИДКОСТЕЙ В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ

Р. М. КАЦ (*Москва*)

В работе получено интегро-дифференциальное уравнение движения границы раздела двух несжимаемых жидкостей в различных системах площадной расстановки скважин. Приводится решение уравнения для пятиточечной системы в форме степенного ряда по времени. Предлагаются формулы, описывающие движение частиц, принадлежащих границе раздела, по неизменяющимся линиям тока для пятиточечной, семиточечной и девятиточечной систем расстановки скважин. Рассчитаны коэффициенты охвата пласта вытесняющей пластовую нефть жидкостью (в условиях пятиточечной системы) к моменту прорыва последней в эксплуатационные скважины. Результаты вычислений сравниваются с данными экспериментов [1].

1. Неограниченный горизонтальный нефтяной пласт (проницаемость  $k$ , мощность  $h$  и пористость  $m$  постоянны) разрабатывается бесконечной системой чередующихся равнодебитных эксплуатационных и нагнетательных скважин, которые в рассматриваемом случае имитируются линейными стоками и источниками постоянной обильности, вскрывающими пласт на всю мощность. Пористая среда и жидкости считаются несжимаемыми, фильтрация подчиняется закону Дарси.

Предполагается, что вытеснение поршнево (случай Лейбензона — Маскета). В этих условиях граница раздела — цилиндрическая поверхность, и в любом сечении ее горизонтальной плоскостью картина течения идентична, что дает возможность считать задачу плоской.

2. В работе [2] приводятся функциональные уравнения движения границы раздела двух несмешивающихся жидкостей для различных систем площадной расстановки скважин в условиях поршневого вытеснения (начальное положение контура известно)

$$2\lambda \operatorname{Re} \left[ F(\gamma, t) \frac{\partial \gamma}{\partial s} \right] + \psi(s, t) + \frac{\lambda}{\pi} \operatorname{Im} \left\{ \frac{\partial \gamma}{\partial s} \int_{(\sigma)} \psi(\sigma, t) \zeta[\gamma(\sigma, t) - \gamma(s, t)] d\sigma \right\} = 0 \quad (2.1)$$

$$m \operatorname{Im} \left( \frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial t} \frac{\partial \gamma}{\partial s} \right) = \operatorname{Im} \left[ \left\{ F(\gamma, t) + \frac{1}{2\pi i} \int_{(\sigma)} \psi(\sigma, t) \zeta[\gamma(\sigma, t) - \gamma(s, t)] d\sigma \right\} \frac{\partial \gamma}{\partial s} \right]$$

$$\lambda = \frac{c_2 - c_1}{c_1 + c_2}, \quad c_1 = \frac{k}{\mu_1}, \quad c_2 = \frac{k}{\mu_2}, \quad \gamma(s, t) = \xi(s, t) + i\eta(s, t)$$

Здесь  $F(z, t)$  — некоторая мероморфная двоякопериодическая (эллиптическая) функция, имеющая полюсы во всех точках, имитирующих скважины;  $\psi(s, t)$  — некоторая вспомогательная действительная функция;  $\gamma(s, t)$  — комплексная координата любой точки контура  $\Gamma$  (границы раздела), который нигде себя не пересекает;  $\zeta$  — обозначение дзета-функции Вейерштрасса;  $\mu_1, \mu_2$  — динамические вязкости вытесняющей и вытесняемой жидкостей.

В уравнениях (2.1) несобственные интегралы понимаются как сингулярные интегралы в смысле главного значения по Коши.

В [2] отмечалось, что сингулярные интегралы типа Коши, ядром которых является дзета-функция Вейерштрасса, обладают всеми основными свойствами обычных интегралов типа Коши; следовательно, в данном случае теория обычных сингулярных интегральных уравнений остается в силе.

Для преобразования системы уравнений (2.1) используется прием [3]. Первое уравнение (2.1) делится на  $2\lambda$ , а второе умножается на  $i$ . Преобразованные уравнения соответственно складываются

$$im \operatorname{Im} \left( \frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial t} \frac{\partial \gamma}{\partial s} \right) - F(\gamma, t) \frac{\partial \gamma}{\partial s} = \frac{1}{2\lambda} \psi(s, t) + \frac{1}{2\pi i} \frac{\partial \gamma}{\partial s} \int_{(\sigma)} \psi(\sigma, t) \zeta[\gamma(\sigma, t) - \gamma(s, t)] d\sigma \quad (2.2)$$

Комплексная функция  $\Phi(\gamma)$  определяется соотношениями

$$\Phi(\gamma) = \frac{\psi(s, t)}{\partial \gamma / \partial s}, \quad \operatorname{Im} \left[ \Phi(\gamma) \frac{\partial \gamma}{\partial s} \right] = 0 \quad (2.3)$$

Уравнение (2.2) при помощи (2.3) можно привести к виду

$$\frac{1}{\lambda} \Phi(\gamma) + \frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \Phi(\gamma_0) \zeta(\gamma_0 - \gamma) d\gamma_0 = \varphi(\gamma) \quad (\gamma_0 \in \Gamma) \quad (2.4)$$

Здесь

$$\varphi(\gamma) = 2im \left[ \operatorname{Im} \left( \frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial t} \frac{\partial \gamma}{\partial s} \right) \right] \frac{\partial \gamma}{\partial s} - 2F(\gamma, t) \quad (2.5)$$

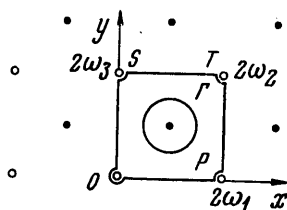
При  $|\lambda| \neq 1$  уравнение (2.4) имеет единственное решение

$$\Phi(\gamma) = \frac{\lambda}{1 - \lambda^2} \varphi(\gamma) - \frac{\lambda^2}{(1 - \lambda^2)\pi i} \int_{\Gamma} \varphi(\gamma_0) \zeta(\gamma_0 - \gamma) d\gamma_0 \quad (2.6)$$

В случае пятиточечной системы [4]

$$F(\gamma, t) = \frac{q}{\pi t h} [\zeta(\gamma - \omega_2) - \zeta(\gamma) + \zeta(\omega_2)] \quad (2.7)$$

Здесь  $q$  — дебит скважины, для простоты считается постоянным;  $\omega_2$  — полупериод (фиг. 1), где темная точка — источник, светлая — сток.



Фиг. 1

Подстановка  $\varphi(\gamma)$  в выражение (2.6) с использованием второго условия (2.3) дает интегро-дифференциальное уравнение движения границы раздела в элементе пятиточечной системы

$$\begin{aligned} & \operatorname{Im} \left( \frac{\partial \bar{\gamma}}{\partial t} \frac{\partial \gamma}{\partial s} \right) - \frac{\lambda}{\pi} \operatorname{Im} \left\{ \frac{\partial \gamma}{\partial s} \int_{(\sigma)} \operatorname{Im} \left( \frac{\partial \bar{\gamma}_0}{\partial t} \frac{\partial v_0}{\partial \sigma} \right) \zeta [\gamma(\sigma, t) - \gamma(s, t)] d\sigma \right\} = \\ & = \frac{(1 + \lambda)q}{\pi m h} \operatorname{Im} \left[ \frac{\partial \gamma}{\partial s} \zeta(\gamma - \omega_2) \right] - \frac{(1 - \lambda)q}{\pi m h} \operatorname{Im} \left[ \frac{\partial \gamma}{\partial s} \zeta(\gamma) \right] + \\ & \quad + \frac{(1 + \lambda)q}{\pi m h} \operatorname{Im} \left[ \frac{\partial \gamma}{\partial s} \zeta(\omega_2) \right] \end{aligned} \quad (2.8)$$

После ряда несложных преобразований и переноса начала координат в нагнетательную скважину можно получить нелинейное интегро-дифференциальное уравнение движения границы раздела в элементе пятиточечной системы в полярных координатах, аналогичное [5]

$$\frac{\partial f^2(\theta, t)}{\partial t} = \frac{\lambda}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial f^2(v, t)}{\partial t} K(v, \theta, t) dv - \frac{q}{\pi m h} [(1 - \lambda)L(\theta, t) - (1 + \lambda)N(\theta, t)] \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} K(v, \theta, t) = & \left\{ \zeta [f(v, t) \cos v - f(\theta, t) \cos \theta] + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \frac{\wp' [f(v, t) \cos v - f(\theta, t) \cos \theta]}{\wp [f(v, t) \cos v - f(\theta, t) \cos \theta] + \wp [f(v, t) \sin v - f(\theta, t) \sin \theta]} \right\} \times \\ & \times [f(\theta, t) \cos \theta + f_0(\theta, t) \sin \theta] + \left\{ \zeta [f(v, t) \sin v - f(\theta, t) \sin \theta] + \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \frac{\wp' [f(v, t) \sin v - f(\theta, t) \sin \theta]}{\wp [f(v, t) \cos v - f(\theta, t) \cos \theta] + \wp [f(v, t) \sin v - f(\theta, t) \sin \theta]} \right\} \times \\ & \times [f(\theta, t) \sin \theta - f_0(\theta, t) \cos \theta] \\ L(\theta, t) = & \left\{ \zeta [f(\theta, t) \cos \theta + \omega_1] + \frac{1}{2} \frac{\wp' [f(\theta, t) \cos \theta + \omega_1]}{\wp [f(\theta, t) \cos \theta + \omega_1] + \wp [f(\theta, t) \sin \theta + \omega_1]} \right\} \times \\ & \times [f(\theta, t) \cos \theta + f_0(\theta, t) \sin \theta] + \\ & + \left\{ \zeta [f(\theta, t) \sin \theta + \omega_1] + \frac{1}{2} \frac{\wp' [f(\theta, t) \sin \theta + \omega_1]}{\wp [f(\theta, t) \cos \theta + \omega_1] + \wp [f(\theta, t) \sin \theta + \omega_1]} \right\} \times \\ & \times [f(\theta, t) \sin \theta - f_0(\theta, t) \cos \theta] - \zeta(\omega_1) [f(\theta, t) (\cos \theta - \sin \theta) + f_0(\theta, t) (\sin \theta + \cos \theta)] \\ N(\theta, t) = & \left\{ \zeta [f(\theta, t) \cos \theta] + \frac{1}{2} \frac{\wp' [f(\theta, t) \cos \theta]}{\wp [f(\theta, t) \cos \theta] + \wp [f(\theta, t) \sin \theta]} \right\} \times \\ & \times [f(\theta, t) \cos \theta + f_0(\theta, t) \sin \theta] + \\ & + \left\{ \zeta [f(\theta, t) \sin \theta] + \frac{1}{2} \frac{\wp' [f(\theta, t) \cos \theta]}{\wp [f(\theta, t) \cos \theta] + \wp [f(\theta, t) \sin \theta]} \right\} [f(\theta, t) \sin \theta + f_0(\theta, t) \cos \theta] \end{aligned}$$

Здесь  $f(\theta, t)$ ,  $\theta$  — полярные координаты точек контура; индексами  $\theta$  и  $t$  обозначены частные производные;  $\gamma$  — символ  $\eta$ -функции Вейерштрасса;  $\gamma'$  — ее производная.

При выводе уравнения (2.9) использовалось соотношение [6]

$$\zeta(z, g_2, g_3) = \frac{1}{2} \frac{\wp'(x, g_2, g_3) - i\wp'(y, g_2, g_3)}{\wp(x, g_2, g_3) + \wp(y, g_2 - g_3)} + \zeta(x, g_2, g_3) - i\zeta(y, g_2 - g_3)$$

где  $g_2, g_3$  — инварианты эллиптических функций Вейерштрасса, причем для пяти-точечной системы  $g_3 = 0$ . В особой точке ( $\theta = \nu$ ) ядро

$$K(\theta, \nu, t) |_{\theta=\nu} = - \frac{f^2(\theta, t) + 2f\theta^2(\theta, t) - f(\theta, t)f_{\theta\theta}(\theta, t)}{2[f^2(\theta, t) + f\theta^2(\theta, t)]}, \quad f_{\theta\theta} = \frac{\partial^2 f(\theta, t)}{\partial \theta^2}$$

Начальное положение контура известно

$$f(\theta, 0) = f_0(\theta) \tag{2.10}$$

Таким образом, искомое решение  $f(\theta, t)$  будет решением задачи Коши для интегро-дифференциального уравнения (2.9) с начальным условием (2.10).

Следует заметить, что (2.9) получено в предположении гладкости контура (условие непрерывности и ограниченности  $f_\theta$  и  $f_{\theta\theta}$ ).

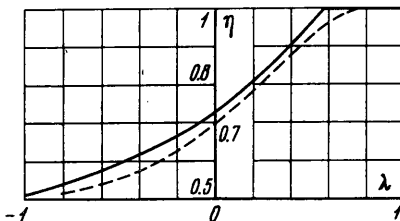
3. Следуя работе [7], можно получить решение (2.9) в форме степенного ряда по времени для функции  $\varphi(\theta, t) = f^2(\theta, t)$ .

Пусть начальной формой границы раздела будет окружность достаточно малого радиуса

$$f(\theta, t_0) = r_0 \tag{3.1}$$

Тогда, согласно [7], можно построить решение (2.9) в виде

$$\varphi(\theta, t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(\theta) (t - t_0)^n \tag{3.2}$$



Фиг. 2

Для фиксированного  $\theta$  разложение (3.2) представляет собой ряд Тейлора с постоянными коэффициентами

$$\begin{aligned} \varphi(\theta, t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_t^{(n)}(\theta, t_0) \frac{(t - t_0)^n}{n!} = \\ &= \varphi(\theta, t_0) + \frac{\partial \varphi(\theta, t_0)}{\partial t} \frac{t - t_0}{1!} + \frac{\partial^2 \varphi(\theta, t_0)}{\partial t^2} \frac{(t - t_0)^2}{2!} + \dots \end{aligned} \tag{3.3}$$

Из сравнения коэффициентов при одинаковых степенях  $t - t_0$  в (3.2) и (3.3) можно найти

$$a_0(\theta) = \varphi(\theta, t_0), \quad a_n(\theta) = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n \varphi(\theta, t_0)}{\partial t^n} \quad (n = 1, 2, \dots) \tag{3.4}$$

Функция  $\varphi(\theta, t_0)$  известна из (3.1), поэтому задача сводится к определению частных производных в правой части (3.4).

В начальный момент времени  $t_0$

$$\frac{\partial \varphi(\theta, t_0)}{\partial t} = \frac{\lambda}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\partial \varphi(\nu, t_0)}{\partial t} K(\nu, \theta, t_0) d\nu - \frac{q}{\pi m h} [(1 - \lambda)L(\theta, t_0) - (1 + \lambda)N(\theta, t_0)] \tag{3.5}$$

Это — интегральное уравнение Фредгольма второго рода относительно неизвестной функции  $\partial \varphi(\theta, t_0) / \partial t$ . Если решение (3.5) найдено, тем самым определен коэффициент ряда  $a_1(\theta)$ ; для получения следующего коэффициента необходимо продиффе-

ренцировать (2.9) по  $t$ , решить полученное уравнение для момента  $t_0$ , воспользовавшись известным  $a_1(\theta)$  и т. д.

Описанная процедура дает следующие выражения для первых пяти производных:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi(\theta, 0)}{\partial t} &= \frac{q}{\pi t h} = a, & \frac{\partial^2 \varphi(\theta, 0)}{\partial t^2} &= 0, & \frac{\partial^3 \varphi(\theta, 0)}{\partial t^3} &= -\frac{4}{5}(1-\lambda)a^3 e_1^2 \cos 4\theta \\ \frac{\partial^4 \varphi(\theta, 0)}{\partial t^4} &= 0, & \frac{\partial^5 \varphi(\theta, 0)}{\partial t^5} &= \frac{16}{5}(1-\lambda)^2 a^5 e_1^4 \cos 8\theta \end{aligned} \quad (3.6)$$

При решении уравнений Фредгольма использовалось условие

$$\varphi(\theta, t_0) = r_0^2 \rightarrow 0 \quad \text{при } t_0 \rightarrow 0 \quad (3.7)$$

Эллиптические функции заменялись рядами [6]

$$\begin{aligned} p(u) &= \frac{1}{u^2} + \frac{g_2 u^2}{20} + \frac{g_2^2 u^6}{1200} + \dots, & \zeta(u) &= \frac{1}{u} - \frac{g_2 u^3}{60} - \frac{g_2^2 u^7}{8400} - \dots \\ g_2 &= 4e_1^2, & e_1 &= 1.7187 / \omega_1^2, & u &\leq \omega_1 \end{aligned} \quad (3.8)$$

Решение уравнения движения границы раздела в элементе пятиточечной системы при начальном условии (3.7) с учетом найденных членов ряда имеет вид

$$\varphi(\theta, t) = at - {}^{2/15}(1-\lambda)a^3 t^3 e_1^2 \cos 4\theta + {}^{2/75}(1-\lambda)^2 a^5 t^5 e_1^4 \cos 8\theta - \dots \quad (3.9)$$

4. Соотношение (3.9) приближенно описывает движение границы раздела, причем точность его возрастает с увеличением числа удерживаемых членов ряда.

Подстановка  $\theta = 1/4\pi$  в (3.9) дает закон движения точек контура по главным линиям тока, а  $\theta = 0$  — по нейтральным

$$r^2(t) = at \pm {}^{2/15}(1-\lambda)a^3 t^3 e_1^2 + {}^{2/75}(1-\lambda)^2 a^5 t^5 e_1^4 \pm \dots \quad (4.1)$$

Знак плюс соответствует главной линии тока, минус — нейтральной.

Разложение (4.1) представляет собой ряд Тейлора для функции  $r^2(t)$ , определяемой из соотношений:

для главных линий тока

$$t = \frac{2}{ae_1 \sqrt{1-\lambda}} \left[ \operatorname{arctg} \frac{1}{e_1} \wp \left( \frac{1}{2} \sqrt{2} r (1-\lambda)^{1/4} + \omega_1 \right) - \frac{1}{4} \pi \right] \quad (4.2)$$

для нейтральных линий тока

$$t = \frac{1}{2ae_1 \sqrt{1-\lambda}} \ln \frac{1}{e_1} \wp (r (1-\lambda)^{1/4} + \omega_1) \quad (4.3)$$

Соотношения (4.2) и (4.3) при  $\lambda = 0$  (одножидкостная система) были получены в [4]. В частности, для главных линий тока

$$t = \frac{2}{ae_1} \left[ \operatorname{arctg} \frac{1}{e_1} \wp \left( \frac{1}{2} \sqrt{2} r + \omega_1 \right) - \frac{1}{4} \pi \right] \quad (4.4)$$

Положив в (4.4)  $r = \sqrt{2}\omega_1$ , получим

$$t^0 = 1/2\pi / ae_1$$

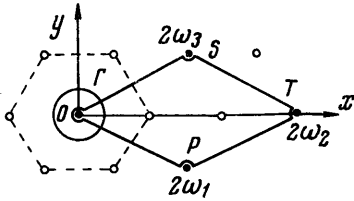
где  $t^0$  — время, за которое частица жидкости проходит расстояние между нагнетательной и эксплуатационной скважиной (время прорыва в одножидкостной системе).

В диапазоне  $-1 \leq \lambda \leq 0$  формула (4.2) имеет физический смысл при  $0 \leq r \leq \sqrt{2}\omega_1(1-\lambda)^{-1/4}$ . Верхняя граница последнего неравенства соответствует времени появления точки возврата

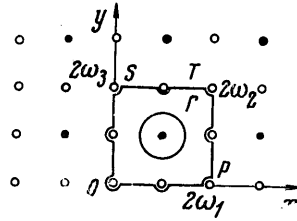
$$t_* = t^0(1-\lambda)^{-1/2} \quad (4.5)$$

В этой точке скорость контура становится бесконечно большой. Заметим, что интегро-дифференциальное уравнение (2.9) справедливо в области  $-1 \leq \lambda \leq 0$  только до момента времени (4.5).

Появление точек возврата на первоначально гладких контурах для случая Лейбнсона ( $\lambda = -1$ ) отмечалось в работах [8-10]. Следует заметить, что образование таких точек в условиях реальной пористой среды, с физической точки зрения, невозможно. П. Я. Полубаринова-Кочина [8] объясняет это противоречие тем, что закон Дарси неприменим при больших скоростях движения.



Фиг. 3



Фиг. 4

Считая (4.5) моментом прорыва вытесняющего агента в эксплуатационную скважину, коэффициент охвата можно записать в виде

$$\eta(\lambda) = \eta^\circ (1 - \lambda)^{-1/2} \quad (-1 \leq \lambda \leq 0) \quad (4.6)$$

Здесь  $\eta^\circ$  — коэффициент охвата в одножидкостной системе.

Приравняв правые части соотношений (4.2) при  $r = \sqrt{2}\omega_1$  и (4.3) при  $r = \omega_1$  и решая полученное трансцендентное уравнение относительно  $\lambda$ , можно получить то минимальное значение  $\lambda^*$ , при котором  $\eta(\lambda^*) = 1$ .

Таким образом,  $\eta(\lambda) = 1$  при  $\lambda^* < \lambda \leq 1$ . В области  $0 < \lambda \leq \lambda^*$  коэффициент охвата определяется при помощи (4.2), где  $r = \sqrt{2}\omega_1$ .

Можно считать, что (2.9) описывает процесс при  $0 < \lambda \leq \lambda^*$  вплоть до прорыва вытесняющего агента в эксплуатационную скважину, а при  $\lambda^* < \lambda \leq 1$  — до момента достижения линии TP точкой контура, движущейся по нейтральной (фиг. 1).

Функция  $\eta(\lambda)$  приведена на фиг. 2. Там же штриховой линией даны результаты экспериментов на физической модели [1].

5. Приводим формулы, аналогичные (4.2) и (4.3) для семиточечной и девяти-точечной систем площадного расположения скважин.

Семиточечная система (фиг. 3),  $q_+ = 2q_-$   
главная линия тока

$$t = \frac{1}{2a(1-\lambda)^{1/2}(e_2 - \kappa)} \left[ \ln \frac{[\wp(r(1-\lambda)^{1/2} - \omega_2) - \alpha]^2 + \beta^2}{(e^2 - \alpha)^2 + \beta^2} + \frac{2}{\beta} (\alpha - \kappa) \left\{ \arctg \frac{1}{\beta} [\wp(r(1-\lambda)^{1/2} - \omega_2) - \alpha] - \arctg \frac{1}{\beta} (e_2 - \alpha) \right\} \right] \quad (5.1)$$

нейтральная линия тока

$$t = \frac{1}{2a(1-\lambda)^{1/2}(\kappa + e^2)} \left[ \ln \frac{[\wp^*(r(1-\lambda)^{1/2} - \frac{1}{3}\sqrt{3}\omega_2) + \alpha]^2 + \beta^2}{(\chi + \alpha)^2 + \beta^2} + \frac{2}{\beta} (\alpha - \kappa) \left\{ \arctg \frac{1}{\beta} [\wp^*(r(1-\lambda)^{1/2} - \frac{1}{3}\sqrt{3}\omega_2) + \alpha] - \arctg \frac{1}{\beta} (\chi + \alpha) \right\} \right] \quad (5.2)$$

$$\wp^*(u) = \wp(u, g_2, -g_3), \quad \alpha = \operatorname{Re} e_1, \quad \beta = \operatorname{Im} e_1, \quad \kappa = \wp(\sqrt{3}\omega_2)$$

$$\chi = \wp^*(\frac{1}{3}\sqrt{3}\omega_2), \quad |\omega_1| = |\omega_3| = \frac{1}{3}\sqrt{3}\omega_2, \quad g_3 = 0$$

Здесь  $e_1, e_2$  — корни характеристического уравнения [6].

Время появления точки возврата

$$t_* = t^\circ (1 - \lambda)^{-1/2} \quad (-1 \leq \lambda \leq 0) \quad (5.3)$$

где  $t^\circ$  определяется из соотношения (5.1) при  $r = \frac{2}{3}\omega_2, \lambda = 0$ .

Девятиточечная система (фиг. 4),  $q_+ = 3q_-$

главная линия тока  $\theta = 0$

$$t = \frac{3}{2ae_1\sqrt{3}(1-\lambda)} \left\{ \ln \frac{\wp(r(1-\lambda)^{1/2} + \omega_1) + e_1(2 - \sqrt{3})}{\wp(r(1-\lambda)^{1/2} + \omega_1) + e_1(2 + \sqrt{3})} - \ln(2 - \sqrt{3}) \right\} \quad (5.4)$$

главная линия тока  $\theta = 1/4\pi$

$$t = \frac{3(\sqrt{6} + 2)}{ae_1 \sqrt{6(1-\lambda)(5+2\sqrt{6})}} \left[ \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\wp(1/2 \sqrt{2}r(1-\lambda)^{1/4} + \omega_1)}{e_1(5+2\sqrt{6})^{1/2}} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} (5+2\sqrt{6})^{-1/2} \right] +$$

$$+ \frac{3(\sqrt{6} - 2)}{ae_1 \sqrt{6(1-\lambda)(5-2\sqrt{6})}} \left[ \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\wp(1/2 \sqrt{2}r(1-\lambda)^{1/4} + \omega_1)}{e_1(5-2\sqrt{6})^{1/2}} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} (5-2\sqrt{6})^{-1/2} \right]$$

Время появления точки возврата

$$t_* = t^0(1-\lambda)^{-1/2} \quad (-1 \leq \lambda \leq 0) \quad (5.6)$$

где  $t^0$  определяется из соотношения (5.4) при  $r = \omega_1$ ,  $\lambda = 0$ .

Автор благодарит В. Л. Данилова за ряд ценных советов и замечания.

Поступило 12 XII 1966

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Slobod R., Caudle B. X-Ray Shadowgraph Studies of Areal Sweep-out Efficiencies. Trans. Amer. Inst. Mining Metallurg. Engrs, vol. 195, 1952.
2. Праведников Н. К., Кац Р. М. Об уравнениях движения водо-нефтяного контакта в системах площадного заводнения. Тр. ВНИИ, Изд. «Недра», 1965, вып. 42.
3. Пилатовский В. П. Об уравнениях неоднородного фильтрационного потока в тонком наклонном пласте. Тр. ВНИИ, Гостоптехиздат, 1962, вып. 32.
4. Праведников Н. К., Кац Р. М. К вопросу движения водонефтяного контакта при площадном заводнении. Тр. ТатНИИ, Изд. «Недра», 1965, вып. 8.
5. Данилов В. Л. Интегро-дифференциальные уравнения движения границы раздела двух жидкостей в пористой среде. Изв. Казанского филиала АН СССР. Сер. физ.-мат. и техн. наук, вып. 11, 1957.
6. Сикорский Ю. С. Элементы теории эллиптических функций с приложениями к механике. Гл. ред. общетехн. лит-ры и номогр., 1936.
7. Данилов В. Л. Об одном аналитическом методе решения задачи стягивания контура нефтеносности. Изв. АН СССР. ОТН, Механика и машиностроение, 1962, № 1.
8. Полубаринова-Кочина П. Я. К вопросу о перемещении контура нефтеносности. Докл. АН СССР, 1945, т. 47, № 4.
9. Галин Л. А. Неустановившаяся фильтрация со свободной поверхностью. Докл. АН СССР, 1945, т. 47, № 4.
10. Виноградов Ю. П., Куфарев П. П. О некоторых частных решениях задач фильтрации. Докл. АН СССР, 1947, т. 57, № 4.

### О ПЕРЕМЕЩЕНИИ ВОДО-НЕФТЯНОГО КОНТАКТА В НЕОДНОРОДНОМ ПЛАСТЕ

Ю. А. ТЕПЛОВ (Казань)

Для нахождения перемещающегося в однородном пласте водо-нефтяного контакта (ВНК) И. А. Чарный предложил использовать схему предельно анизотропных пластов [1]. В работе [2] исследованы автомодельные задачи о перемещении ВНК, численное решение которых приведено в статье [3]. Численному интегрированию полученных в работе [1] нелинейных уравнений параболического типа посвящены работы [4, 5]. В работе [4] проведено сравнение результатов численного решения задачи о перемещении ВНК для двух случаев предельной анизотропии ( $k_z = \infty$  и  $k_z = 0$ ) с экспериментальными данными для изотропного пласта, показавшее, что случай  $k_z = \infty$  дает результаты, весьма близкие к экспериментальным данным для изотропного пласта.

В настоящем исследовании метод, предложенный в работе [1], распространяется на неоднородный пласт, проницаемость которого — функция расстояния от подошвы пласта. Рассматривается только случай  $k_z = \infty$ . Выведены нелинейные уравнения параболического типа, определяющие плоское и осесимметричное перемещение ВНК в неоднородном пласте. Получены уравнения автомодельного движения ВНК в неоднородном пласте. Предложен возможный путь численного интегрирования полученных нелинейных уравнений параболического типа.