К ЗАДАЧЕ О ВЫЧИСЛЕНИИ ДЕБИТА СКВАЖИНЫ В НЕОДНОРОДНОМ ПЛАСТЕ

Г. А. ДОМБРОВСКИЙ, Р. Б. НУДЕЛЬМАН

(Харьков)

1. Рассматривается плоская задача установившейся напорной фильтрации несжимаемой жидкости в неоднородном слое постоянной мощности. Введем декартовы координаты x, y и полярные координаты r, θ с полюсом в точке $x=0$, $y=0$. Контур питания и контур скважины пусть представляют собой концентрические окружности с радиусами r_1 и r_0 соответственно; на контуре питания известны значения давления $p_1(\theta)$, на контуре скважины — значения давления $p_0(\theta)$. Определение поля давления $p(x, y)$ в двусвязной области, ограниченной контуром питания $r=r_1$ и контуром скважины $r=r_0$, при данных граничных условиях и линейном законе фильтрации представляет собой задачу Дирихле для уравнения

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial p}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial p}{\partial y}\right)=0 \qquad (1.1)$$

где $k(x, y)$ — коэффициент проницаемости.

Дебит скважины Q может быть вычислен по формуле

$$Q=\int\limits_0^{2\pi} r_*\left[\frac{k}{\mu}\frac{\partial p}{\partial r}\right]_{r=r_*} d\theta \qquad (1.2)$$

Здесь μ — коэффициент динамической вязкости и r_* — радиус окружности, охватывающей скважину ($r_0 \leqslant r_* \leqslant r_1$). Мощность пласта принята равной единице.

Вместо функции $p(x, y)$ введем новую функцию $u(x, y)$ при помощи преобразования

$$u=\sqrt{k}p \qquad (1.3)$$

Придем тогда к задаче Дирихле для уравнения

$$\Delta u + M(x, y)u = 0 \qquad (1.4)$$

где $M(x, y)$ — известная функция, определяемая по заданной функции $k(x, y)$ из соотношения

$$\Delta\sqrt{k} + M(x, y)\sqrt{k} = 0 \qquad (1.5)$$

Формула для вычисления дебита после применения преобразования (1.3) приобретает вид

$$Q=\frac{1}{\mu}\int\limits_0^{2\pi} r_*\left[\sqrt{k}\frac{\partial u}{\partial r} - u\frac{\partial}{\partial r}\sqrt{k}\right]_{r=r_*} d\theta \qquad (1.6)$$

В настоящей работе произведены вычисления дебита скважины для функций $k(x, y)$, принадлежащих к классам, определяемым условиями $M\equiv 0$ и $M\equiv -m^2$, $m^2=\mathrm{const}>0$. Случаи $M\equiv \pm m^2$ ранее рассматривались в статьях [1-3], однако полученные в этих статьях результаты оказались ошибочными.

2. *Случай $M\equiv 0$.* Согласно (1.4) и (1.5), имеем

$$\Delta\sqrt{k}=0, \qquad \Delta u = 0 \qquad (2.1)$$

т. е. $\sqrt{k(x, y)}$ и $u(x, y)$ суть гармонические функции.

Предполагая, что функция $\sqrt{k}$ в круге $r\leqslant r_1$ не имеет особенностей, представим ее в виде ряда

$$\sqrt{k}=a_0+\sum_{n=1}^{\infty} r^n(a_n\cos n\theta + c_n\sin n\theta) \qquad (2.2)$$

где a_0, a_n, c_n — известные постоянные.

Что касается решения задачи Дирихле для кольца, то его, как известно, можно представить рядом

$$u = A_0 + B_0 \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} \{[A_n r^n + B_n r^{-n}] \cos n\theta + [C_n r^n + D_n r^{-n}] \sin n\theta\} \tag{2.3}$$

коэффициенты которого A_0, B_0, A_n, B_n, C_n, D_n легко определяются из разложений в ряды Фурье функции u на границах $r = r_1$ и $r = r_0$. На контуре питания имеем $u = u_1 = p_1(\theta)\sqrt{k_1(\theta)}$, на контуре скважины $u = u_0 = p_0(\theta)\sqrt{k_0(\theta)}$, где $p_1(\theta)$, $k_1(\theta)$ и $p_0(\theta)$, $k_0(\theta)$ — известные функции.

Вычисления по формуле (1.6) приводят к результату

$$Q = \frac{2\pi}{\mu}\left[a_0 B_0 - \sum_{n=1}^{\infty} n(a_n B_n + c_n D_n)\right] \tag{2.4}$$

Если пласт однородный ($a_0 \neq 0$, $a_n = c_n = 0$, $n = 1, 2, \ldots$), получаем известную формулу Дюпюи — Маскета [4]

$$Q = 2\pi\mu^{-1} a_0 B_0 \tag{2.5}$$

Если на контуре питания и контуре скважины давление принимает соответственно постоянные значения p_1 и p_0, то формула (2.4) приобретает следующий окончательный вид

$$Q = \frac{2\pi}{\mu}(p_1 - p_0)\left[\frac{a_0^2}{\ln r_1 - \ln r_0} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(a_n^2 + c_n^2)}{r_0^{-2n} - r_1^{-2n}}\right] \tag{2.6}$$

Пример. Пусть

$$\sqrt{k} = \alpha + \beta x + \gamma y + \delta x y \tag{2.7}$$

где α, β, γ, δ — постоянные величины.

Сопоставляя (2.7) с (2.2), имеем

$$a_0 = \alpha, \quad a_1 = \beta, \quad c_1 = \gamma, \quad a_2 = 0, \quad c_2 = {}^1\!/_2\delta, \quad a_n = c_n = 0 \quad (n = 3, 4, \ldots) \tag{2.8}$$

По формуле (2.6) получаем

$$Q = \frac{2\pi}{\mu}(p_1 - p_0)\left[\frac{\alpha^2}{\ln r_1 - \ln r_0} + \frac{\beta^2 + \gamma^2}{r_0^{-2} - r_1^{-2}} + \frac{1}{2}\frac{\delta^2}{r_0^{-4} - r_1^{-4}}\right] \tag{2.9}$$

3. *Случай* $M \equiv -m^2$. Имеем в этом случае следующие уравнения одного и того же вида для $\sqrt{k(x, y)}$ и $u(x, y)$

$$\Delta\sqrt{k} - m^2\sqrt{k} = 0, \qquad \Delta u - m^2 u = 0 \tag{3.1}$$

Функция $\sqrt{k(r, \theta)}$ может быть взята в виде ряда

$$\sqrt{k} = a_0 I_0(mr) + \sum_{n=1}^{\infty} I_n(mr)[a_n \cos n\theta + c_n \sin n\theta] \tag{3.2}$$

где I_n — функции Бесселя мнимого аргумента и a_0, a_n, c_n — известные постоянные.

Искомое решение граничной задачи представляем следующим образом:

$$u = A_0 I_0(mr) + B_0 K_0(mr) + \sum_{n=1}^{\infty} \{[A_n I_n(mr) + B_n K_n(mr)] \cos n\theta + [C_n I_n(mr) + D_n K_n(mr)] \sin n\theta\} \tag{3.3}$$

где, кроме функций Бесселя мнимого аргумента I_n, фигурируют функции Макдональда K_n.

Постоянные A_0, B_0, A_n, B_n, C_n и D_n легко определяются обычным способом в результате сопоставления предполагаемого решения (3.3) на контурах питания и скважины с разложениями в ряды Фурье известных функций

$$u_1 = p_1(\theta)\sqrt{k_1(\theta)}, \qquad u_0 = p_0(\theta)\sqrt{k_0(\theta)}$$

Учитывая при вычислении дебита соотношения, справедливые для модифицированных функций Бесселя [5],

$$2I_n'(mr) = I_{n-1}(mr) + I_{n+1}(mr), \qquad -2K_n'(mr) = K_{n-1}(mr) + K_{n+1}(mr)$$

$$I_n(mr)K_{n+1}(mr) + I_{n+1}(mr)K_n(mr) = 1/mr \tag{3.4}$$

приходим к результату

$$Q = -\frac{2\pi}{\mu}\left[a_0B_0 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(a_nB_n + c_nD_n)\right] \tag{3.5}$$

При постоянных на контуре питания и контуре скважины давлениях p_1 и p_0 получаем

$$Q = \frac{2\pi}{\mu}(p_1 - p_0)\left[\frac{a_0^2I_0(mr_1)I_0(mr_0)}{\Delta_0} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(a_n^2+c_n^2)I_n(mr_1)I_n(mr_0)}{\Delta_n}\right]$$

$$\Delta_n = I_n(mr_1)K_n(mr_0) - I_n(mr_0)K_n(mr_1) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{3.6}$$

причем всегда $\Delta_n \neq 0$.

Пример. Пусть

$$\sqrt{k} = e^{my} \tag{3.7}$$

Имеет место разложение

$$e^{my} = I_0(mr) + 2\sum_{n=1}^{\infty} I_n(mr)\left[\cos\frac{n\pi}{2}\cos n\theta + \sin\frac{n\pi}{2}\sin n\theta\right] \tag{3.8}$$

Сопоставляя этот ряд с (3.2), имеем

$$a_0 = 1, \quad a_n = 2\cos {}^1/_2 n\pi, \quad c_n = 2\sin {}^1/_2 n\pi \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{3.9}$$

По формуле (3.6) получаем

$$Q = \frac{2\pi}{\mu}(p_1 - p_0)\left[\frac{I_0(mr_1)I_0(mr_0)}{\Delta_0} + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{I_n(mr_1)I_n(mr_0)}{\Delta_n}\right] \tag{3.10}$$

Поступило 7 I 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Осятинский С. Д. Об одном обобщении формулы Дюпюи. Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1964, № 3.
2. Осятинский С. Д., Юрисов В. А. Об одном точном решении задачи о дебите скважины в неоднородном пласте. Изв. высш. учебн. завед., Нефть и газ, 1964, № 4.
3. Осятинский С. Д. К задаче об определении дебита скважины в неоднородном пласте. Изв. АН СССР, Механика жидкости и газа, 1966, № 5.
4. Маскет М. Течение однородных жидкостей в пористой среде. Гостоптехиздат, 1949.
5. Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. Специальные функции (формулы, графики, таблицы). Изд-во «Наука», 1964.