О НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ НЕСИММЕТРИЧНЫХ ЖИДКОСТЕЙ

НГУЕН ВАН ДЬЕП, А. Т. ЛИСТРОВ

(Воронеж)

Исследованию свойств моделей жидкостей с несимметричным тензором напряжений посвящен ряд работ [1–5].

Ниже рассматриваются особенности неизотермической модели Грэда [1]. Показывается, что при наличии в жидкости неоднородного поля температуры в общем случае имеет место пересечение потока тепла с потоком моментных напряжений. Учет пересечения потоков приводит к изменению уравнения момента количества движения и удельной энтропии.

В тех случаях, когда физические характеристики среды в области течения можно считать постоянными, пересечение потоков может оказывать влияние на течение жидкости лишь через посредство граничных условий.

Так, например, несимметричные моментные напряжения, созданные градиентом температуры, приводят слой жидкости в движение, если одна из поверхностей слоя будет свободной.

1. Рассмотрим структурный материальный континуум, для которого основные законы механики в интегральной форме имеют вид [1, 6]

$$\frac{d}{dt}\int\limits_V \rho\, dV = 0, \qquad \frac{d}{dt}\int\limits_V \rho\mathbf{v}\, dV = \int\limits_S \mathbf{t}_n\, dS + \int\limits_V \rho\mathbf{f}\, dV$$

$$\frac{d}{dt}\int\limits_V (\mathbf{r}\times\mathbf{v} + J\boldsymbol{\omega})\rho\, dV = \int\limits_S (\mathbf{r}\times\mathbf{t}_n + \mathbf{m}_n)\, dS + \int\limits_V (\mathbf{r}\times\mathbf{f} + \mathbf{c})\rho\, dV$$

$$\frac{d}{dt}\int\limits_V \left(\frac{v^2}{2} + u + \frac{I\omega^2}{2}\right)\rho\, dV = \int\limits_S (\mathbf{t}_n\cdot\mathbf{v} + \mathbf{m}_n\cdot\boldsymbol{\omega})\, dS -$$

$$- \int\limits_V \nabla\cdot\mathbf{q}\, dV + \int\limits_V (\mathbf{f}\cdot\mathbf{v} + \mathbf{c}\cdot\boldsymbol{\omega})\rho\, dV \tag{1.1}$$

Здесь $d(\ldots)/dt$ — полная производная по времени; ρ — массовая плотность; $\mathbf{r}$ — радиус-вектор точки континуума; ∇ — пространственный градиент; $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ — скорость точки; $\boldsymbol{\omega}$ — вектор, характеризующий среднюю угловую скорость вращения частиц, из которых состоит точка континуума; $\mathbf{q}$ — вектор теплового потока; u — внутренняя удельная энергия; J — скалярная константа с размерностью момента инерции единицы массы. Соотношения (1.1) имеют место для материального континуума, если предположить, что в каждой точке произвольного материального объема V приложен вектор массовой силы $\mathbf{f}$, вектор массового момента $\mathbf{c}$, в каждой точке поверхности S объема V приложен вектор силового напряжения $\mathbf{t}_n$ и вектор моментного напряжения $\mathbf{m}_n$; при этом моментные напряжения производят работу только на перемещениях внутреннего вращения [1, 4].

Воспользуемся соотношениями, связывающими диаду $\boldsymbol{\mu}$ моментных напряжений и диаду $\boldsymbol{\tau}$ силовых напряжений с вектором $\mathbf{m}_n$ моментных напряжений и вектором $\mathbf{t}_n$ силовых напряжений [6]

$$\mathbf{t}_n = \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\tau}, \qquad \mathbf{m}_n = \mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\mu} \tag{1.2}$$

Здесь $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль к поверхности S.

Принимая во внимание известные формулы диадного исчисления [6, 7], связывающие интегрирование по поверхности S с интегрированием по объему V, получим из (1.1) соотношения

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho\nabla\cdot\mathbf{v} = 0, \quad \rho\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \nabla\cdot\boldsymbol{\tau} + \rho\mathbf{f}, \quad \nabla\cdot\boldsymbol{\mu} + \rho\mathbf{c} + \boldsymbol{\tau}\times\cdot\mathbf{I} = \rho J\frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \tag{1.3}$$

$$\rho\frac{du}{dt} = \boldsymbol{\tau}\cdot\cdot\nabla\mathbf{v} + \boldsymbol{\mu}\cdot\cdot\nabla\boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\tau}\times\cdot\mathbf{I})\cdot\boldsymbol{\omega} - \nabla\cdot\mathbf{q}$$

Здесь $\mathbf{I}$ — единичная диада, операция $(\cdot\cdot)$ означает, что левые и правые множители диад перемножаются скалярно, операция $(\times\cdot)$ означает, что левые множители диад перемножаются векторно, а правые — скалярно.

Диады $\boldsymbol{\tau}$, $\nabla\mathbf{v}$, $\nabla\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\mu}$ представим в форме.

$$\boldsymbol{\tau} = (\pi_0 - p)\mathbf{I} + \boldsymbol{\pi}^a + \boldsymbol{\pi}^d, \quad \boldsymbol{\mu} = \mu_0\mathbf{I} + \boldsymbol{\mu}^a + \boldsymbol{\mu}^d$$

$$\nabla\mathbf{v} = {}^1/_3\,\nabla\cdot\mathbf{v}\mathbf{I} + (\nabla\mathbf{v})^a + (\nabla\mathbf{v})^d, \quad \nabla\boldsymbol{\omega} = {}^1/_3\nabla\cdot\boldsymbol{\omega}\mathbf{I} + (\nabla\boldsymbol{\omega})^a + (\nabla\boldsymbol{\omega})^d$$

$$\pi_0 = {}^1/_3\boldsymbol{\pi}\cdot\cdot\mathbf{I}, \quad \mu_0 = {}^1/_3\boldsymbol{\mu}\cdot\cdot\mathbf{I}, \quad \boldsymbol{\tau} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\pi} \tag{1.4}$$

Индексом a отмечены антисимметричные диады, индексом d — симметричные диады, p — равновесное давление.

Воспользуемся соотношением Гиббса [2]

$$T\frac{ds}{dt} = \frac{du}{dt} + \frac{p}{\rho}\nabla\cdot\mathbf{v} \tag{1.5}$$

Здесь T — абсолютная температура, s — удельная энтропия.

Из (1.5) при помощи (1.3), (1.4) находим

$$\rho\frac{ds}{dt} = \nabla\cdot\frac{\mathbf{q}}{T} + \sigma \tag{1.6}$$

Здесь выражение для энтропии σ имеет вид:

$$\sigma = -\mathbf{q}\cdot\frac{\nabla T}{T^2} + \frac{\pi_0\nabla\cdot v}{T} + \frac{\boldsymbol{\pi}^d\cdot\cdot(\nabla\mathbf{v})^d}{T} + \frac{\boldsymbol{\mu}^a\cdot\cdot(\nabla\boldsymbol{\omega})^a}{T} +$$

$$+ \frac{\mathbf{P}^a\cdot(\nabla\times\mathbf{v} - 2\boldsymbol{\omega})}{T} + \frac{\mu_0\nabla\cdot\boldsymbol{\omega}}{T} + \frac{\boldsymbol{\mu}^d\cdot\cdot(\nabla\boldsymbol{\omega})^d}{T} \geqslant 0 \tag{1.7}$$

При получении (1.7) были использованы замена диады $\boldsymbol{\pi}^a$ на эквивалентный ей псевдовектор $\mathbf{P}^a = {}^1/_2\boldsymbol{\tau}\times\cdot\mathbf{I}$ и замена диады $(\nabla\mathbf{v})^a$ на псевдовектор ${}^1/_2\,\nabla\times\mathbf{v}$. Отметим, что в (1.7) величина $\nabla\cdot\mathbf{v}$ — скаляр, T — вектор, $(\nabla\mathbf{v})^d$ — диада, $(\nabla\times\mathbf{v} - 2\boldsymbol{\omega})$ — псевдовектор, $\nabla\cdot\boldsymbol{\omega}$ — псевдоскаляр, $(\nabla\boldsymbol{\omega})^a$ — псевдодиада, $(\nabla\boldsymbol{\omega})^d$ — псевдодиада. Нетрудно убедиться [2, 7, 8], что псевдодиада $(\nabla\boldsymbol{\omega})^a$ эквивалентна полярному псевдовектору $\mathbf{b} = {}^1/_2(\nabla\boldsymbol{\omega})\times\cdot\mathbf{I}$. Так как вектора ∇T и $\mathbf{b}$ — полярные, то в изотропной среде возникает перекрестный термомеханический эффект.

Учитывая теорему Кюри [2, 9], находим линейную связь между потоками и силами в виде

$$\pi_0 = \eta_0\nabla\cdot\mathbf{v}, \quad \mu_0 = c_0\nabla\cdot\boldsymbol{\omega}, \quad \boldsymbol{\pi}^d = 2\eta(\nabla\mathbf{v})^d, \quad \boldsymbol{\mu}^d = 2c_d(\nabla\boldsymbol{\omega})^d$$

$$\mathbf{P}^a = \eta_r(\nabla\times\mathbf{v} - 2\boldsymbol{\omega}), \quad \mathbf{q} = -\varkappa\nabla T - \delta\mathbf{b}, \quad \mathbf{d} = \beta\,\nabla T + 2c_a\mathbf{b} \tag{1.8}$$

где $\mathbf{d} = {}^1/_2\boldsymbol{\mu}\times\cdot\mathbf{I}$ — полярный псевдовектор, эквивалентный псевдодиаде $\boldsymbol{\mu}^a$; величины η_0, μ_0, η, c_d, η_r, $\varkappa$, δ, β, c_a — скаляры, характеризующие изотропные свойства среды.

Термодинамическая сила $\nabla T/T^2$ — четная функция скоростей частиц, а сила $2\mathbf{b}/T$ — нечетная [2]. Из принципа Онзагера в этом случае следует соотношение

$$\delta = -2\beta T \tag{1.9}$$

Учитывая (1.9), из (1.8) находим выражения для $\mathbf{q}$ и $\mathbf{d}$ в виде

$$\mathbf{q} = -\varkappa\nabla T + 2\beta T\mathbf{b}, \qquad \mathbf{d} = \beta\nabla \mathrm{T} + 2c_a\mathbf{b} \tag{1.10}$$

Воспользовавшись соотношениями [6]

$$\mathbf{b} = {}^1/_2(\nabla\boldsymbol{\omega})\times\cdot\mathbf{I} = {}^1/_2\,\nabla\times\boldsymbol{\omega} \qquad \boldsymbol{\mu}^a = -\mathbf{I}\times\mathbf{d}, \qquad (\nabla\boldsymbol{\omega})^a = -\mathbf{I}\times\mathbf{b} \tag{1.11}$$

представим (1.10) в форме

$$\mathbf{q} = -\varkappa\nabla T + \beta T\,\nabla\times\boldsymbol{\omega}, \qquad \boldsymbol{\mu}^a = -\beta\mathbf{I}\times\nabla T + 2c_a(\nabla\boldsymbol{\omega})^a \tag{1.12}$$

Из (1.12) непосредственно видно, что несимметричность диады моментных напряжений обусловлена как несимметричностью диады $\nabla\boldsymbol{\omega}$, так и градиентом температуры. Наличие ротора $\boldsymbol{\omega}$ приводит к возникновению теплового потока.

Уравнения (1.3) с учетом (1.4), (1.8), (1.12) могут быть преобразованы к виду

$$\rho d\mathbf{v} / dt = -\nabla p + \nabla (\eta_0 \nabla \cdot \mathbf{v}) + 2 \nabla \cdot [\eta (\nabla \mathbf{v})^d] + \nabla \times [\eta_r (2\boldsymbol{\omega} - \nabla \times \mathbf{v})] + \rho \mathbf{f}$$

$$\rho J d\boldsymbol{\omega} / dt = \nabla (c_0 \nabla \cdot \boldsymbol{\omega}) + 2 \nabla \cdot [c_d (\nabla \boldsymbol{\omega})^d] + 2\eta_r (\nabla \times \mathbf{v} - 2\boldsymbol{\omega}) +$$

$$+ \rho \mathbf{c} + 2 \nabla \cdot [c_a (\nabla \boldsymbol{\omega})^a] - \nabla \cdot (\beta \mathbf{I} \times \nabla T), \qquad d\rho / dt + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \tag{1.13}$$

Принимая во внимание соотношение $\nabla \cdot (\beta \mathbf{I} \times \nabla T) = \nabla\beta \times \nabla T$, из (1.13) находим, что учет термомеханического эффекта в общем случае приводит к изменению формы уравнения момента количества движения. В тех случаях, когда β можно считать постоянной величиной или зависящей только от температуры, учет пересечения потоков не вносит никаких изменений в уравнения (1.13).

Отметим, что учет пересечения потоков не влияет на величину σ. Из (1.7) с учетом (1.8), (1.12) находим, что

$$\sigma = \frac{\varkappa (\nabla T)^2}{T^2} + \sigma' \geqslant 0, \quad \sigma' = \frac{\eta_0 (\nabla \cdot \mathbf{v})^2}{T} + \frac{2\eta (\nabla \mathbf{v})^d \cdot\cdot (\nabla \mathbf{v})^d}{T} +$$

$$+ \frac{2c_a (\nabla\boldsymbol{\omega})^a \cdot\cdot (\nabla\boldsymbol{\omega})^a}{T} + \frac{\eta_r (\nabla \times \mathbf{v} - 2\boldsymbol{\omega})^2}{T} + \frac{c_0 (\nabla \cdot \boldsymbol{\omega})^2}{T} + \frac{2c_d (\nabla\boldsymbol{\omega})^d \cdot\cdot (\nabla\boldsymbol{\omega})^d}{T} \geqslant 0 \tag{1.14}$$

В (1.14) величины η_0, η, c_a, c_d, η_r, c_0, T — неотрицательны [2].

Из (1.6), (1.8), (1.12), (1.14) получаем уравнение для s в виде

$$\rho \frac{ds}{dt} = \frac{\nabla \cdot (\varkappa \nabla T)}{T} - (\nabla \times \boldsymbol{\omega}) \cdot \nabla\beta + \sigma' \tag{1.15}$$

Таким образом, пересечение потоков не изменяет формы уравнения (1.15), если β можно считать постоянной величиной в области течения.

В том случае, когда разности температур в области течения малы и физические характеристики жидкости можно считать постоянными, воспользуемся термодинамическим соотношением [9]

$$T ds / dt = c_p dT / dt \tag{1.16}$$

где c_p — удельная теплоемкость при постоянном давлении.

Для несжимаемой жидкости при этих упрощающих предположениях уравнения (1.13), (1.15) с учетом (1.16) запишутся в виде

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p + 2\eta \nabla \cdot (\nabla \mathbf{v})^d + \eta_r \nabla \times [2\boldsymbol{\omega} - \nabla \times \mathbf{v}] + \rho \mathbf{f}$$

$$\rho J \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} = c_0 \nabla (\nabla \cdot \boldsymbol{\omega}) + 2c_d \nabla \cdot (\nabla\boldsymbol{\omega})^d + 2c_a \nabla \cdot (\nabla\boldsymbol{\omega})^a + 2\eta_r (\nabla \times \mathbf{v} - 2\boldsymbol{\omega}) + \rho \mathbf{c} \tag{1.17}$$

$$\frac{dT}{dt} = \chi \Delta T + \frac{T\sigma'}{\rho c_p}, \qquad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

Здесь $\chi = \varkappa / \rho c_p$ — коэффициент температуропроводности, величина σ' определяется согласно (1.14).

Из (1.8), (1.12), (1.18) видно, что для несжимаемой жидкости Грэда с постоянными физическими коэффициентами пересечение потоков может оказывать влияние на течение жидкости только через граничные условия.

2. В качестве примера приведем решение задачи о течении слоя несжимаемой жидкости модели Грэда в неоднородном поле температуры.

Рассмотрим невесомый слой жидкости толщины h, находящейся на неподвижной твердой плоскости. Предположим, что вдоль свободной поверхности $y = 0$ и внутри слоя имеется постоянный температурный градиент dT / dx. Будем считать, что атмосфера не оказывает на поверхность слоя ни силового, ни моментного воздействия, т. е. на свободной плоской поверхности слоя выполняются условия

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\tau} = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\mu} = 0 \quad \text{при } y = 0 \ (\mathbf{n} = -\mathbf{j}) \tag{2.1}$$

На твердой плоскости, ограничивающей слой, примем условия прилипания [4, 5]

$$\mathbf{v}=0, \quad \boldsymbol{\omega}=0 \quad \text{при } y=h \tag{2.2}$$

Массовые моменты с предполагаем отсутствующими. В уравнении теплопроводности (1.17) пренебрежем [9] источником σ'. Все физические характеристики жидкости будем считать постоянными. Стационарное течение, которое имеет место при этих условиях, описывается решением уравнений (1.17) вида

$$v_x=v_x(y), \quad \omega_z=\omega_z(y), \quad \omega_x=\omega_y=v_z=v_y=0 \tag{2.3}$$

$$p=p(x), \quad T=T(x), \quad dp\,/\,dx=\text{const}, \quad dT\,/\,dx=\text{const}$$

Из (1.17), (1.8), (1.12), (2.1)—(2.3) находим следующие соотношения для определения v_x, ω_z, $dp\,/\,dx$:

$$(\eta+\eta_r)\frac{d^2v_x}{dy^2}+2\eta_r\frac{d\omega_z}{dy}-\frac{dp}{dx}=0, \quad v_x(h)=\omega_z(h)=0$$

$$c^*\frac{d^2\omega_z}{dy^2}-2\eta_r\left(\frac{dv_x}{dy}+2\omega_z\right)=0, \quad \int\limits_0^h v_x\,dy=0, \quad (c^*=c_d+c_a) \tag{2.4}$$

$$(\eta+\eta_r)\frac{dv_x(0)}{dy}+2\eta_r\omega_z(0)=0, \quad c^*\frac{d\omega_z(0)}{dy}+\beta\frac{dT}{dx}=0$$

Из последнего соотношения (2.4) видно, что градиент температуры вследствие пересечения потоков создает несимметричные моментные напряжения, которые приводят жидкость в движение.

Уравнениям и граничным условиям (2.4) соответствует решение вида

$$v_x=\frac{1}{2\eta}\frac{dp}{dx}(y^2-h^2)-\frac{2\eta_r}{\eta+\eta_r}\left[\frac{C_1}{k}(\operatorname{ch}ky-\operatorname{ch}kh)+\frac{C_2}{k}(\operatorname{sh}ky-\operatorname{sh}kh)\right]$$

$$\omega_z=C_1\operatorname{sh}ky+C_2\operatorname{sh}ky-\frac{y}{2\eta}\frac{dp}{dx}, \quad \frac{dp}{dx}=2\eta\left(\frac{B}{c^*}\frac{dT}{dx}+kC_1\right)$$

$$C_1=-\frac{dT}{dx}\frac{D_1\operatorname{ch}kh+D_2\operatorname{sh}kh+D_3}{\delta}, \quad C_2=\frac{dT}{dx}\frac{D_1\operatorname{sh}kh+D_2\operatorname{ch}kh}{\delta}$$

$$D_1=-\frac{2h^3\beta(\eta+\eta_r)k^2+6\beta h\eta_r}{3c^*(\eta+\eta_r)k^2}, \quad D_2=\frac{2\beta h^2\eta_r}{c^*k(\eta+\eta_r)}$$

$$D_3=\frac{2\beta h\eta_r}{c^*k^2(\eta+\eta_r)}, \quad k=2\left(\frac{\eta_r\eta}{c^*(\eta_r+\eta)}\right)^{1/2}$$

$$\delta=\frac{12\eta_rkh+(6k^2\eta_rh^2-6\eta_r)\operatorname{sh}kh-(2h^3k^3\eta+6\eta_rhk+2h^3k^3\eta_r)\operatorname{ch}kh}{3(\eta+\eta_r)k^2}$$

Если наряду с термомеханическим эффектом принять во внимание разрыв касательного напряжения на свободной границе, который создается за счет изменения коэффициента поверхностного натяжения σ^* в неоднородном поле температуры [10], то предпоследнее из соотношений (2.4) примет вид

$$(\eta+\eta_r)\frac{dv_x(0)}{dy}+2\eta_r\omega_z(0)=\gamma\frac{dT}{dx}, \quad \gamma=\frac{\partial\sigma^*}{\partial T}=\text{const} \tag{2.6}$$

В этом случае, обозначая решение уравнений (2.4), (2.6) через v_x°, ω_z°, dp° / dx, найдем, что

$$v_x^\circ = v_x + \frac{\gamma}{\eta}\frac{dT}{dx}(y-h), \quad \omega_z^\circ = \omega_z - \frac{\gamma}{2\eta}\frac{dT}{dx}, \quad \frac{dp^\circ}{dx} = \frac{dp}{dx} \tag{2.7}$$

Здесь v_x, ω_z, dp / dx определяются соотношениями (2.4), в которых C_1, k, δ имеют тот же вид, а к C_2, D_1, D_2 и D_3 прибавляются соответственно величины

$$\frac{\gamma h^3 k}{6\eta\delta}\frac{dT}{dx}, \quad -\frac{\gamma(k^2h^2\eta + k^2h^2\eta_r + 2\eta_r)}{2\eta k^2(\eta+\eta_r)} \quad \frac{\gamma h}{k(\eta+\eta_r)} \quad \frac{\gamma\eta_r}{\eta k^2(\eta+\eta_r)}$$

Таким образом, в слое несимметричной жидкости, находящейся в неоднородном поле температуры, наличие термомеханического эффекта должно вызывать циркуляционное течение. Подобного рода движение может быть вызвано также наличием на свободной поверхности разрыва касательного напряжения, возникающего вследствие температурного изменения коэффициента поверхностного натяжения [10].

Отметим, что наличие постоянного градиента температуры вдоль слоя, заключенного между твердыми стенками $(\omega_z(0) = \omega_z(h) = v_x(0) = v_x(h) = 0)$, не возбуждает течения жидкости $(v_x = \omega_z = dp / dx \equiv 0)$.

В этом случае пересечение потоков создает в жидкости самоуравновешивающееся статическое напряженное состояние. Матрица диады моментных напряжений при этом имеет вид

$$\mu_T{}^a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta dT/dx \\ 0 & -\beta dT/dx & 0 \end{pmatrix} \tag{2.8}$$

Если одну из границ слоя сделать свободной, то частицы, из которых состоит точка континуума, получат возможность вращения. Наличие «трения» $(\eta_r \neq 0)$ между внутренним полем вращения $\boldsymbol{\omega}$ и внешним полем вращения $\nabla \times \mathbf{v}$ создаст антисимметричную диаду π^a силовых напряжений, которая приведет точки континуума в движение.

Антисимметричная диада моментных напряжений μ^a в движущейся жидкости может быть представлена в виде разности $\mu^a = \mu_T{}^a - \mu_\omega{}^a$, где матрица диады $\mu_\omega{}^a$ имеет вид

$$\mu_\omega{}^a = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c_a d\omega_z / dy \\ 0 & c_a d\omega_z / dy & 0 \end{pmatrix} \tag{2.9}$$

Диада $\mu_\omega{}^a$ характеризует ту часть несимметричных моментных напряжений, которая связана с вращением внутренних частиц точки.

Поступило 17 III 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Grad H. Statistical Mechanics, Thermodynamics and Fluid Dynamics of Systems with Arbitrary Number of Integrals. Comm. Pure Appl. Math., 1952, vol. 5, No. 4.
2. De Groot S. R., Mazur P. Non Equilibrium Thermodynamics. North. Holland Publishind Company, Amsterdam, 1962. (русск. перев.: Де-Гроот Мазур П. Неравновесная термодинамика, изд. «Мир», 1964).
3. Dahler T., Scriven L. Theory of Structured continia. Proc. Roy Soc. A, 1963, vol. 275, vol. 504.
4. Condiff D., Dahler T. Fluid Mechanical Aspects of Antisymmetric Stress. Phis. Fluids, 1964, vol. 7, No. 6.
5. Аэро Э. Л., Булыгин А. Н., Кувшинский Е. В. Асимметрическая гидромеханика. ПММ, 1965, т. 29, вып. 2.
6. Mindlin R., Tiersten H. Effects of couple-stresses in linear elasticity. Arch. Rat. Mech. and Analysis, 1962, vol. 11, No. 5. (русск. перев.: Механика. Сб. перев. и обоз. ин. период. литер., 1964, № 4).
7. Лагалли М. Векторное исчисление. ОНТИ, 1936
8. Мак-Коннел А. Введение в тензорный анализ. Физматгиз, 1963.
9. Ландау Л. Д., Лившиц Е. М. Механика сплошных сред. Гостехиздат, 1954.
10. Левич В. Г. Физико-химическая гидродинамика. Физматгиз, 1959.