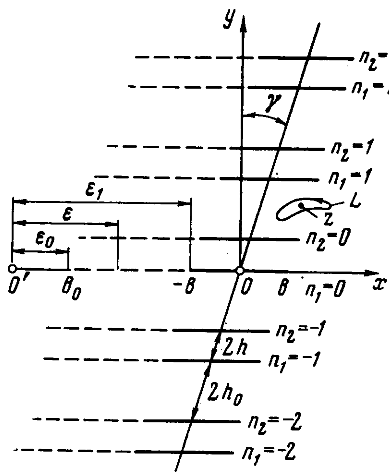
О НЕУСТАНОВИВШЕМСЯ ДВИЖЕНИИ РЕШЕТКИ БИПЛАНОВ

В. П. ВАХОМЧИК *(Москва)*

Вопросам неустановившегося обтекания движущейся решетки профилей, расположенных на равном расстоянии t друг от друга, посвящено много работ. Однако неустановившееся движение в жидкости однорядной решетки полипланов, состоящей из конечного или бесконечного числа систем (групп) профилей, изучено слабо. Предполагается, что в такой решетке в каждой i-й системе (группе) профилей имеется свой шаг t_i $(i = 1, 2, \ldots, s)$, свой постоянный сдвиг фаз колебаний α_i между соседними профилями. Расстояние между группами профилей решетки полипланов h_i различное: $h_i \neq t_i$. Такие решетки возникают, например, при решении задачи о движении одного или двух профилей под свободной поверхностью невесомой жидкости на расстоянии h от твердой стенки. В данной работе в качестве примера рассматривается неустановившееся движение решетки бипланов в несжимаемой невязкой жидкости. Получено выражение комплексной скорости течения вне профилей решетки и ее вихревых следов. Получено соответствующее интегральное уравнение относительно неизвестной функции $u(\alpha)$ — разрыва касательной составляющей скорости вдоль вихревого следа. Написано решение этого уравнения для гармонических колебаний профилей.



Фиг. 1

§ 1. Рассмотрим неустановившееся движение решетки из тонких слабоизогнутых профилей в плоском безвихревом потоке несжимаемой невязкой жидкости с постоянной скоростью U под малым углом атаки. Решетка с углом выноса γ (угол γ отсчитывается от направления фронта решетки до нормали к хорде профиля) составлена из пар профилей-бипланов, расстояние между которыми одинаково и равно $2h_0$, а расстояние между профилями биплана равно $2h$ $(2h \neq 2h_0)$ (фиг. 1). Помимо основного движения со скоростью U, профили решетки совершают неустановившиеся синхронные колебания с заданной в каждой точке профиля нормальной составляющей скорости $v_n(x, \tau)$ (τ — время). Согласно теореме Гельмгольца о постоянстве циркуляции, при таком движении с выходных кромок профилей сбегает вихревая пелена, которая имеет конечную длину b_0. В процессе колебаний профили движутся так, что профили биплана не имеют сдвига фаз колебаний, а сдвиг фаз колебаний между соседними парами (бипланами) равен π. Система координат жестко скреплена с серединой одного из движущихся профилей. Положительная часть оси абсцисс направлена по скорости основного поступательного течения. Предположим, что тонкие профили решетки представляют собой криволинейные дужки, мало отличающиеся от прямолинейного отрезка $(-b, b)$ оси x. На выходных кромках каждого профиля должно выполняться условие Жуковского — Чаплыгина о конечности скорости.

Такая решетка возникает, например, при изучении неустановившегося движения изолированного профиля на глубине h в слое жидкости постоянной толщины. Верхней границей этого слоя является свободная поверхность, нижней границей — неподвижная твердая стенка. Выполняя последовательные отражения течения относительно свободной и твердой границы, получим описанную выше решетку бипланов.

§ 2. Выберем систему контуров L_r около каждого профиля и следа (предположим сначала, что имеется конечное число r профилей в решетке) и бесконечно-удаленный контур L_n, охватывающий все профили. Соединим контуры L_r и контур L_n между собой соответствующими разрезами так, чтобы построенный контур $L_r + L_n$ был односвязным и его можно было бы непрерывной деформацией свести к контуру L около точки z. Так как интегралы по одинаковым разрезам, соединяющим контуры L_r между собой, взаимно уничтожаются, по теореме Коши применительно к многосвязной области имеем

$$f(z) = -\frac{1}{2\pi i}\sum_{r=-l}^{r=l}\oint_{L_r}\frac{f_r(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} + \frac{1}{2\pi i}\oint_{L_n}\frac{f(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} \qquad (2.1)$$

Здесь $f_r(\zeta)$ — граничное значение функции $f(z)$ на r-м контуре L_r ($r = 0, \pm1, \pm2, \ldots, +l$), охватывающем r-й профиль решетки и вихревой след. Первая сумма взята со знаком минус, так как контур L_r обходится по часовой стрелке, а контур L_n — против часовой стрелки. Разобьем первую сумму в равенстве (2.1) на две суммы. В одной сумме будем суммировать значение интегралов по контурам только с номерами $r = n_1$ ($n_1 = 0, \pm1, \pm2, \ldots \pm s_1$), а в другой — по контурам с номерами $r = n_2$ ($n_2 = 0, \pm1, \pm2, \ldots \pm s_1$).

Поэтому равенство (2.1) перепишем так:

$$f(z) = -\frac{1}{2\pi i}\left[\sum_{n_1=-s_1}^{n_1=s_1}\oint_{L_{n_1}}\frac{f_{n_1}(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} + \sum_{n_2=-s_1}^{n_2=s_1}\frac{f_{n_2}(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z}\right] + f_n(\zeta) \tag{2.2}$$

где $f_n(\zeta)$ — значение функции по контуру L_n.

Перейдем от интегрирования по всем контурам L_r к интегрированию по основному контуру L_0, расположенному вдоль оси x ($r = 0$). Заметим, что функция $f_{n_1}(\zeta)$ периодическая с периодом $T_1 = 2n_1(h_0 + h)e^{-i\gamma}$

$$f_{n_1}(\zeta) = f_{n_1}[\zeta_0 + 2in_1(h_0 + h)e^{-i\gamma}] = f(\zeta_0)e^{-jn_1\pi}$$

В этом равенстве $f(\zeta_0)$ — значение функции по контуру L_0, $e^{-jn_1\pi}$ указывает, что значение функции на соседних контурах L_{n_1} отличаются друг от друга постоянным множителем. Точно таким же свойством периодичности обладает функция f_{n_2}, начиная с профиля $n_2 = 0$ в точке $\zeta_0 + 2ihe^{-i\gamma}$

$$f_{n_2}(\zeta) = f_{n_2}[\zeta_0 + 2ihe^{-i\gamma} + 2ihn_2(h_0 + h)e^{-i\gamma}] = f[\zeta_0 + 2ihe^{-i\gamma}]e^{-jn_2\pi}$$

Кроме того $f[\zeta_0 + 2ihe^{-i\gamma}] = f(\zeta_0)$, так как по условию задачи граничные значения функции $f(\zeta)$ на контурах биплана шага $2he^{-i\gamma}$ одинаковы. Учитывая условие периодичности, выражение (2.2), после простых преобразований приводится к виду:

$$\begin{gathered}f(z) = -\frac{1}{2\pi i}\oint_{L_0}\left[\sum_{n_1=1}^{s_1}\frac{(-1)^{n_1}}{\zeta + 2in_1(h_0 + h)e^{-i\gamma} - z} + \sum_{n_1=-1}^{-s_1}\frac{(-1)^{n_1}}{\zeta + 2in_1(h_0 + h)e^{-i\gamma} - z} + \right.\\ + \frac{1}{\zeta - z} + \sum_{n_2=1}^{s_1}\frac{(-1)_2^{n}}{\zeta + 2ihe^{-i\gamma} + 2in_2(h_0 + h)e^{-i\gamma} - z} + \\ \left. + \sum_{n_2=-1}^{-s_1}\frac{(-1)^{n_2}}{\zeta + 2ihe^{-i\gamma} + 2in_2(h_0 + h)e^{-i\gamma} - z} + \frac{1}{\zeta - z + 2ihe^{-i\gamma}}\right]f(\zeta_0)\,d\zeta + f_n(\zeta)\end{gathered} \tag{2.3}$$

Здесь $f(\zeta_0)$ — уже значение функции на нулевом профиле ($n_1 = 0$). Рассматриваемый способ выражения значений функции $f(z)$ в области течения вне системы контуров L_r к значениям по основному контуру L_0 никаких ограничений на форму контуров L_r (исключая их самопересечения) не накладывает. Следовательно, это выражение применимо к исследованиям течения вне решетки из произвольных профилей. Кроме того, такой метод не зависит от структуры решетки. Поэтому можно выполнить такое преобразование в более общем случае однорядной решетки полипланов, расстояние между которыми h_i может быть, вообще говоря, разным ($i = 1, \pm2, \pm3, \ldots$). В пределах каждой группы профилей в решетке полипланов имеется свой сдвиг фаз колебаний α_i между соседними профилями и свой постоянный шаг t_i.

Возвращаясь снова к формуле (2.3), используя известное разложение

$$\frac{\pi}{\operatorname{sh}\pi z} = \frac{1}{z} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k z}{z^2 + k^2}$$

и выполняя суммирование под знаком интеграла в выражении (2.3) при $s_1 \to \infty$, окончательно получим

$$f(z) = -\frac{1}{2\pi i}\oint_{L_0} f(\zeta_0)\Phi(\zeta - z, h + h_0, \gamma)\,d\zeta \tag{2.4}$$

Таким образом, значение функции $f(z)$ в любой точке z течения вне бесконечной системы контуров L_r выражается через значение функции на основном контуре L_0, а влияние всех остальных контуров сводится к одной функции

$$\Phi(z)=\frac{\pi e^{i\gamma}}{2(h+h_0)}\left\{\operatorname{csch}\left[\frac{\pi z e^{i\gamma}}{2(h+h_0)}\right]+\operatorname{csch}\left[\frac{\pi(z+2ihe^{-i\gamma})e^{i\gamma}}{2(h+h_0)}\right]\right\} \tag{2.5}$$

Действительная часть функции $\Phi(z)$ при $\gamma=0$ совпадает с аналогичным выражением, полученным вихревым методом в работе [1]. Если $2h=2h_0=t$, действительная часть функции $\Phi(z)$ переходит в соответствующую функцию для решетки постоянного шага t при наличии сдвига фаз колебаний $\alpha=\pi/2$.

Отметим частные случаи двух профилей (одиночный биплан).

1. При $h_0\to\infty$ (h — фиксировано)

$$\Phi_1(z)=\frac{1}{z}+\frac{1}{z+2ihe^{-i\gamma}} \tag{2.6}$$

и случай изолированного профиля.

2. При $h\to\infty$, h_0 — достаточно большое, но фиксированное.

$$\Phi_2(z)=1/z \tag{2.7}$$

В случае конечного числа контуров L_r значение функции определяется по формуле (2.3). Следовательно вместо функции $\Phi(z)$ получим другую функцию

$$\Phi_n(z)=\sum_{n_1=-s_1}^{s_1}\frac{(-1)^{s_1}}{\zeta+2is_1(h_0+h)e^{-i\gamma}-z}+$$

$$+\sum_{n_2=-s_1}^{s_1}\frac{(-1)^{s_1}}{\zeta+2ihe^{-i\gamma}+2is_1(h_0+h)e^{-i\gamma}-z}\qquad(s_1=0,\pm1,\pm2,\pm3,\ldots,\pm N)$$

В качестве примера рассмотрим теперь решетку бипланов переменного шага (фиг. 2). Решетка состоит из конечного числа систем профилей, а в каждой системе содержится по четыре профиля. Расстояние между такими системами постоянно и равно $2t_2$, а расстояние между бипланами системы равно $2t_1$, при этом $2t_1\neq 2t_2$. Если угол выноса $\gamma=0$, то такая решетка получается при последовательном отражении относительно свободной поверхности и твердой стенки подводного биплана, совершающего неустановившееся движение под горизонтальной свободной поверхностью жидкости конечной глубины. Выполняя преобразования, аналогичные проведенным выше для решетки бипланов постоянного шага, получим

$$\Phi(z)=qe^{i\gamma}\{\operatorname{csch}[qze^{i\gamma}]+\operatorname{csch}[q(z+2ite^{-i\gamma})e^{i\gamma}]+$$

$$+\operatorname{csch}[q(z+2ite^{-i\gamma}+2it_1e^{-i\gamma})e^{i\gamma}]+\operatorname{csch}[q(z+4ite^{-i\gamma}+2it_1e^{-i\gamma})e^{i\gamma}]\}$$

$$q=\pi/[2(t_1+t_2)+4t]$$

§ 3. Комплексную функцию скоростей абсолютного течения жидкости вне решетки обозначим через dw/dz. Следуя общему методу построения комплексной скорости течения [2] введем функцию [1]

$$g(z)=\left(\frac{\operatorname{sh}p(z-b)\operatorname{sh}p(z-b-2ihe^{-i\gamma})}{\operatorname{sh}p(z+b)\operatorname{sh}p(z+b-2ihe^{-i\gamma})}\right)^{1/2}=g_1(z)g_2(z) \tag{3.1}$$

Здесь $p=\pi e^{i\gamma}/2(h+h_0)$.

В случае решетки из конечного числа профилей функции под знаком корня нужно разложить в бесконечные произведения и ограничиться произведением конечного числа сомножителей, равного числу профилей решетки. Пример выбора такой функции $g(z)$ для решетки из конечного числа профилей имеется в работе [4].

Остановимся на некоторых основных свойствах функции $g(z)$.

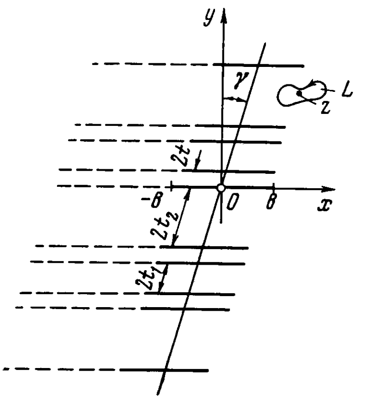
1. Функция периодическая с двумя комплексными периодами

$$T_1=2n_1(h+h_0)e^{-i\gamma}\qquad T_2=2ihe^{-i\gamma}+2n_2(h+h_0)e^{-i\gamma}$$

[1] При $2h=2h_0=t$ функция $g(z)$ совпадает с соответствующей функцией для решетки постоянного шага.

2. Функция исключает особенности во всей физической плоскости течения в точках, соответствующих передним кромкам профилей, и неограниченно возрастает в точках, соответствующих выходным кромкам профилей решетки.

3. Функция $g_1(z)$, например, на выбранном основном (а также и на любом другом профиле) вдоль верхнего и нижнего берегов разреза принимает чисто мнимые, противоположные по знаку значения. Это свойство необходимо для построения комплексной скорости течения с помощью формулы Келдыша — Седова [5]. Второй сомножитель $g_2(z)$ в точках разреза основного профиля — аналитическая функция и на обоих берегах разреза принимает одинаковые значения и не влияет на свойства функции $g_1(z)$.



Фиг. 2

4. Выбираем ту ветвь функции $g_1(z)$, которая при $z = |x| > b$ принимает положительные значения $g_1(x) > 0$.

5. На бесконечности перед и за решеткой контуров L_r

$$g(z,\ p) \to \exp(\mp pb)$$

Запишем сразу комплексный потенциал течения вне решетки бипланов (3.2)

$$\frac{dW}{dz} = \frac{1}{i\pi g(z)} \left[\int_{-b}^{b} v_n g_3(\xi, p)\Phi d\xi + \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon_1(\tau)} u(\varepsilon) g_4(\xi, p)\Phi d\varepsilon \right]$$

$$\xi = \varepsilon - \varepsilon_1 - b, \qquad \varepsilon_1 = \varepsilon_0 + U(\tau - \tau_0)$$

$$g_3(\xi) = \left(\frac{\operatorname{sh} p(b-\xi)}{\operatorname{sh} p(b+\xi)}\right)^{1/2} g_2(\xi), \quad g_4(\xi) = \left(\frac{\operatorname{sh} p(\xi - b)}{\operatorname{sh} p(\xi + b)}\right)^{1/2} g_2(\xi)$$

Если в этом выражении при фиксированном значении h устремить $h_0 \to \infty$, выбрать соответствующую функцию $g(z)$ [4] и функцию Φ заменить на функцию Φ_1, согласно равенству (2.6), получим комплексный потенциал неустановившегося течения вне одиночного биплана в безграничной жидкости. Если при достаточно большом фиксированном значении h_0 устремить $h \to \infty$ и, выбирая надлежащим образом функцию

$$g(z) = \left(\frac{z-a}{z+a}\right)^{1/2}$$

а функцию Φ заменить через функцию Φ_2 в соответствии с равенством (2.7), получим комплексную скорость неустановившегося течения вне изолированного профиля. В частности, можно на основании аналогичных идей решить задачу о неустановившемся движении биплана под свободной поверхностью жидкости на расстоянии h от твердой стенки.

Комплексная скорость разлагается в ряд по последовательным производным функции $\Phi(z)$ [2]

$$\frac{dW}{dz} = \frac{\Gamma_0}{2\pi i}\Phi(z) - iB_1\frac{d\Phi}{dz} + i\frac{B_2}{2}\frac{d^2\Phi}{dz^2} + \ldots \tag{3.3}$$

Разлагая произведение $g^{-1}(z)\Phi(\zeta - z,\ p)$ под знаком интеграла в ряд вида (3.3), находим, что

$$\Gamma_0 = 2\int_{-b}^{b} v_n g_3 a_{00}\, d\xi + 2\int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon_1} u(\varepsilon) g_4 b_{00}\, d\varepsilon \tag{3.4}$$

$$B_2 = -\frac{1}{\pi}\left[\int_{-b}^{b} v_n g_3 a_{10}\, d\xi + \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon_1} u(\varepsilon) g_4 b_{10}\, d\varepsilon\right] \tag{3.5}$$

$$B_3 = -\frac{1}{\pi}\left[\int_{-b}^{b} v_n g_3 a_{20}\, d\xi + \int_{\varepsilon_0}^{\varepsilon_1} u(\varepsilon) g_4 b_{20}\, d\varepsilon\right] \tag{3.6}$$

В этих равенствах функция

$$a_{k0}(\xi, p) = \int\limits_{-b}^{b} x^k g(x, h+h_0)\Phi(\xi - x)\,dx \tag{3.7}$$

$$(-1 \leqslant x \leqslant 1,\ -1 \leqslant \xi \leqslant 1,\ k = 0,\ 1,\ 2)$$

а функция

$$b_{k0}(\xi, p) = \int\limits_{-b}^{b} x^k g(x, p)\Phi(\xi - x)\,dx - \xi^k g_4^{-1} \tag{3.8}$$

$$(-1 \leqslant x \leqslant 1,\ b_0 \leqslant \xi \leqslant -1,\ k = 0,\ 1,\ 2)$$

§ 4. Опустим подробные преобразования, которые аналогичны преобразованиям, проведенным в работе [2], напишем сразу относительно неизвестной касательной составляющей скорости в следе интегральное уравнение

$$\int\limits_{\varepsilon_0}^{\varepsilon_1(\tau)} u(\varepsilon)\, b_{00}(\xi, p)\, g_4(\varepsilon - \varepsilon_1)\,d\varepsilon = \int\limits_{-b}^{b} (v_{n0} - v_n)\, g_3(\xi, p)\, a_{00}\,d\xi$$

Функции $b_{00}(\xi, p)$ и $a_{00}(\xi, p)$ определяются по формулам (3.7) и (3.8) при $k=0$. В правой части величина v_{n0} обозначает значение нормальной составляющей скорости $v_n(\xi, \tau)$ (τ — время) в установившемся движении. Полученное интегральное уравнение Вольтерра нужно решить вместо соответствующего неверного интегрального уравнения (2.3) в работе [6].

Решая это интегральное уравнение [2], найдем функцию $u(\varepsilon)$, определяющую разрыв касательной составляющей скорости

$$u(\varepsilon) = j\frac{k}{b} B(k, p) \exp(jk)(1 - s + \varepsilon) \qquad (\xi = -bs)$$

$$B(k, p) = A_\alpha(p)\left(jk \exp(jk) \int\limits_{s_1}^{1} e^{-jks} g_4(s, p)\, b_{00}^{(1)}(s)\,ds + 1\right)^{-1}$$

$$A_\alpha(p) \equiv 2\int\limits_{-b}^{b} v(\xi)\, g_3(\xi, p)\, a_{00}(\xi, p)\,d\xi, \qquad b_{00}^{(1)} \equiv \int\limits_{-b}^{b} g(x, p)\Phi(\xi - x, p)\,dx$$

Применяя общие формулы Л. И. Седова [3], получим нестационарную подъемную силу и момент, действующий на один основной профиль решетки с выносом γ. Аналитические выражения для сил совпадают с выражениями (4.1) работы [2], в которых нужно коэффициенты Γ_0, B_1 и B_2 определять по формулам (3.4), (3.5), (3.6).

Поступило 16 I 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Ефремов И. И. Неустановившееся движение тонкого профиля под свободной поверхностью невесомой жидкости конечной глубины. Приклэд. механика, Отд. матем., механ. и кибернетики, 1966, т. 2, № 10.
2. Вахомчик В. П. Общие выражения нестационарных сил в решетке профилей. Изв. АН СССР. МЖГ, 1966, № 4.
3. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики, Изд-во «Наука», 1966.
4. Вахомчик В. П. Замечания по работе Егорова И. Т. «О неустановившемся движения систем тонких подводных профилей». Изв. АН СССР, МЖГ, 1967, № 1.
5. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функции комплексного переменного. Физматгиз, 1958.
6. Егоров И. Т. О неустановившемся движении систем тонких подводных профилей. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 4.