

6. McGregor J. The Vapour Screen Method of Flow Visualization J. Fluid Mech., 1961, No. 11, pt. 4.
7. Bate man P. Wing Tunnel Measurements of Lift, Drag and Pitching Moment of Two Highly Swept ($\chi = 87^\circ$ and 83°), Della Wing-Body Combination Models with small Tip Fins at M-2. 47. ARC Current Papers, 1960, No. 514
8. Авдудевский В. С., Медведев К. И. Исследование отрыва ламинарного пограничного слоя на конусе под углом атаки. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 3.
9. Алферов В. И., Бушмин А. С., Калачев Б. В. Экспериментальное исследование свойств электрического разряда в потоке воздуха. Ж. эксперим. и теор. физ., 1966, т. 51, № 11.
10. Мессе Г., Бархот Е. Электронные и ионные столкновения. Изд. иностр. лит., 1958.
11. Керреброк Д. Инженерные вопросы магнитной гидродинамики. Изд. «Мир», 1964.
12. Спитцер Л. Физика полностью ионизированного газа. Изд. иностр. лит., 1959.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ПЛОСКОЙ ЗАДАЧИ О НЕАВТОМОДЕЛЬНЫХ СТРУЙНЫХ ТЕЧЕНИЯХ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Б. П. БЕЛОГЛАЗОВ, А. С. ГИНЕВСКИЙ

(Москва)

1. **Постановка задачи.** Рассмотрим в приближении теории пограничного слоя распространение ламинарной или турбулентной струи несжимаемой жидкости в спутном однородном потоке.

Пусть из плоского сопла шириною $2\delta_0$ истекает струя со скоростью u_0 в спутный поток, скорость которого равна u_δ , причем в плоскости среза сопла ($x = 0$) происходит скачкообразное изменение скорости. Величина этого скачка характеризуется отношением скоростей $m = u_\delta / u_0$. Уравнения пограничного слоя запишем в виде

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu_t \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1.1)$$

Здесь x, y — координаты прямоугольной системы координат, причем ось x направлена вдоль по потоку; u, v — составляющие скорости вдоль осей x, y ; величина ν_t — либо коэффициент кинематической вязкости жидкости при ламинарном течении ($\nu_t = \nu = \text{const}$), либо коэффициент турбулентного обмена при турбулентном течении ($\nu_t = \nu_t(x)$). Граничные условия запишем в форме

$$\left. \begin{aligned} u &= u_0 = \text{const} & (0 \leq y \leq \delta_0) \\ u &= u_\delta = \text{const} & (\delta_0 < y < \infty) \end{aligned} \right\} (x = 0) \quad (1.2)$$

$$\left. \begin{aligned} v &= \frac{\partial u}{\partial y} = 0 & (y = 0) \\ \lim u &= u_\delta & (y \rightarrow \infty) \end{aligned} \right\} (x > 0)$$

Необходимо отметить, что в рамках примененной в настоящей работе расчетной схемы условие (1.2) при $x = 0$ может быть заменено более общим условием

$$u = f_1(y) \quad (0 \leq y \leq \delta_0), \quad u = f_2(y) \quad (\infty > y > \delta_0) \quad \lim f_2 = u_\delta \quad (y \rightarrow \infty)$$

причем функции f_1 и f_2 непрерывны и $f_1(\delta_0) \neq f_2(\delta_0)$.

Указанная задача при различных частных предположениях решалась многими авторами. Отметим прежде всего линеаризованные решения для ламинарной струи. Так, на больших удалениях от сопла, где скорость в струе мало отличается от скорости спутного потока, т. е. $u_1 = u - u_\delta$ и $u_1 \ll u_\delta$, вместо уравнений (1.1) получаем уравнение теплопроводности

$$u_\delta \frac{\partial u_1}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} \quad (1.3)$$

решение которого получено Шлихтингом [1] и имеет вид

$$\frac{u_1}{u_{1m}^+} = \left(\frac{x}{x^+} \right)^{-1/2} \exp \left[- \frac{y^2 u_\delta}{4\nu x^+} \left(\frac{x^+}{x} - 1 \right) \right] \quad (u_{1m} = u_m - u_\delta) \quad (1.4)$$

Здесь u_{1m} — избыточная скорость на оси струи; индекс «плюс» соответствует некоторому начальному сечению, где выполняется основное допущение $u_1 \ll u_\delta$.

Уравнение теплопроводности может быть решено для любых заданных граничных условий, в том числе и для условий (1.2). Имея в виду, что в этом случае предположение $u_1 \ll u_0$ выполняется во всей области течения, т. е. параметр $m \approx 1$, получаем [2]

$$\frac{u - u_0}{u_0 - u_0} = \frac{1}{2} \left[F \left(\frac{1 - \eta}{2\xi^{1/2}} \right) + F \left(\frac{1 + \eta}{2\xi^{1/2}} \right) \right] \quad (1.5)$$

$$\left(F(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt, \quad \eta = \frac{y}{\delta_0}, \quad \xi = \frac{vx}{\delta_0^2 u_0} \right)$$

По-видимому, более точное линеаризованное решение получается, если выполнить линеаризацию не в плоскости физических переменных x, y , как это было сделано Баем [2], а в плоскости переменных Мизеса x, ψ

$$\frac{\partial u}{\partial x} = v \frac{\partial}{\partial \psi} \left(u \frac{\partial u}{\partial \psi} \right) \quad (1.6)$$

Здесь ψ — функция тока. Если теперь входящую в правую часть (1.6) скорость $u(x, \psi)$ приближенно заменить некоторой функцией одного переменного x , т. е. принять $u = u^-(x)$, то уравнение (1.6) принимает вид уравнения теплопроводности [3]

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial^2 u}{\partial \psi^2} \quad \left(s \equiv v \int_0^x u^-(x) dx \right) \quad (1.7)$$

Решение этого уравнения для $u(s, \psi)$ при ступенчатом распределении скоростей в начальном сечении формально ничем не отличается от выражения (1.5), если в нем η и ξ заменить соответственно на ψ и s . Остается лишь подходящим образом подобрать функцию $u^-(x)$; например,

$$u^-(x) = u_0, \quad u^-(x) = u_0, \quad u^-(x) = 1/2 [u_0 + u_m(x)] \text{ и т. д.}$$

Известны также попытки получения точного нелинеаризованного решения сформулированной задачи. Так, Л. Г. Лойцяским [4] рассмотрено решение уравнения (1.6) для затопленной струи конечного начального сечения ($m = 0$), Бай Ши-и [2] — для струи в спутном потоке, причем в последней из цитированных работ приводятся некоторые результаты численного интегрирования уравнения (1.6) методом конечных разностей.

В работе [5] приведены результаты выполненного при помощи статического электроинтегратора численного решения задачи об истечении плоской затопленной ламинарной струи из сопла конечной ширины с начальным параболическим профилем скоростей.

Асимптотический характер профиля скорости на больших удалениях от оси струи, где $u \approx u_0$, может быть изучен, как это сделал Бетц [6] для пограничного слоя, на основе упрощения уравнения (1.6).

Приближенные методы решения задачи о распространении турбулентной струи в спутном потоке рассмотрены в работах [7-11].

Отметим, что решение задачи для турбулентной струи может быть получено из соответствующего решения для ламинарной струи путем элементарного пересчета, сводящегося к деформации продольной координаты.

Такой пересчет основан на предположении, что коэффициент турбулентного обмена зависит лишь от продольной координаты, т. е. $\nu_t = \nu_t(x)$. Введем теперь новые переменные

$$\xi = \int_0^x \frac{\nu_t(x)}{u_0 \delta_0^2} dx, \quad \eta = \frac{y}{\delta_0}, \quad u^0 = \frac{u}{u_0}, \quad v^0 = \frac{v}{u_0} \frac{u_0 \delta_0}{\nu_t} \quad (1.8)$$

В случае ламинарной струи ($\nu_t = \nu = \text{const}$) отсюда получаем

$$\xi = \frac{x}{\delta_0} \frac{1}{N_{\text{Re}}}, \quad v^0 = \frac{v}{u_0} N_{\text{Re}} \quad \left(N_{\text{Re}} = \frac{u_0 \delta_0}{\nu} \right) \quad (1.9)$$

В случае турбулентной струи, в соответствии с полуэмпирической формулой Прандтля,

$$\nu_t = \kappa \delta u_{1m} \quad (u_{1m} = u_m - u_0) \quad (1.10)$$

Здесь δ — некоторая эффективная ширина струи и κ — опытная константа. Из первого соотношения (1.9) и (1.10) следует

$$\kappa x^\circ = \frac{1}{1-m} \int_0^\xi \frac{d\xi}{\delta^\circ(\xi) \Delta u_{m^\circ}(\xi)} \quad \left(x^\circ = \frac{x}{\delta_0}, \quad \delta^\circ = \frac{\delta}{\delta_0}, \quad \Delta u_{m^\circ} = \frac{u_m - u_\delta}{u_0 - u_\delta} \right) \quad (1.11)$$

и, обратно,

$$\xi = (1-m) \int_0^{\kappa x^\circ} \delta^\circ(\kappa x^\circ) \Delta u_{m^\circ}(\kappa x^\circ) d(\kappa x^\circ) \quad (1.12)$$

Поставленная задача решается методом прямых с помощью ЭЦВМ.

2. Преобразование уравнений и метод их решения. С целью понижения порядка первого уравнения системы (1.1) введем величину

$$q^\circ = \frac{\delta_0}{u_0} \frac{\partial u}{\partial y} \quad (2.1)$$

после чего эта система может быть представлена в безразмерной форме

$$\frac{\partial u^\circ}{\partial \eta} = q^\circ, \quad \frac{\partial q^\circ}{\partial \eta} = u^\circ \frac{\partial u^\circ}{\partial \xi} + q^\circ v^\circ, \quad \frac{\partial v^\circ}{\partial \eta} = - \frac{\partial u^\circ}{\partial \xi} \quad (2.2)$$

Граничные условия (1.2) приводятся соответственно к виду

$$\left. \begin{aligned} u^\circ = 1 \quad (0 \leq \eta \leq 1) \\ u^\circ = m \quad (1 < \eta < \infty) \end{aligned} \right\} (\xi = 0), \quad \left. \begin{aligned} v^\circ = q^\circ = 0 \quad (\eta = 0) \\ \lim u^\circ = m \quad (\eta \rightarrow \infty) \end{aligned} \right\} (\xi > 0) \quad (2.3)$$

Таким образом, решение системы (2.2) с граничными условиями (2.3) зависит лишь от одного параметра m , т. е. $u^\circ = u^\circ(\xi, \eta, m)$, $q^\circ = q^\circ(\xi, \eta, m)$ и $v^\circ = v^\circ(\xi, \eta, m)$.

В соответствии с методом прямых [12], будем искать решение системы нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных (2.2) с граничными условиями (2.3) на прямых $\xi = \text{const}$. Пусть при $\xi = \xi_i$ известно решение $u_i^\circ = u_i^\circ(\xi_i, \eta, m)$. Тогда при $\xi_{i+1} = \xi_i + h_i$ решение u_{i+1}° , q_{i+1}° и v_{i+1}° может быть найдено из системы обыкновенных дифференциальных уравнений, а именно

$$\begin{aligned} \frac{du_{i+1}^\circ}{d\eta} &= q_{i+1}^\circ, & \frac{dq_{i+1}^\circ}{d\eta} &= u_{i+1}^\circ \frac{u_{i+1}^\circ - u_i^\circ}{h_i} + q_{i+1}^\circ v_{i+1}^\circ \\ \frac{dv_{i+1}^\circ}{d\eta} &= - \frac{u_{i+1}^\circ + u_i^\circ}{h_i} \quad \left(\frac{\partial u_{i+1}^\circ}{\partial \xi} = \frac{u_{i+1}^\circ - u_i^\circ}{h_i} \right) \end{aligned} \quad (2.4)$$

Граничные условия для системы (2.4) примем в виде

$$q_{i+1}^\circ = v_{i+1}^\circ = 0 \quad (\eta = 0); \quad u_{i+1}^\circ \rightarrow m \quad (\eta \rightarrow \infty) \quad (i = 0, 1, 2, \dots)$$

Решение, соответствующее $i = 0$, определяется из условий (2.3) при $\xi = 0$.

Таким образом, задача может быть решена путем перехода от слоя к слою по переменной ξ . Решение на каждом слое $\xi = \text{const}$ определяется методом «стрельб» по следующей схеме.

В системе (2.4) из трех требуемых начальных условий для решения задачи Коши неизвестно одно, а именно $u_{i+1}^\circ(0)$, которому соответствует предельное условие при $\eta \rightarrow \infty$. Характер пробных решений, соответствующих начальным значениям $u_{i+1}^\circ(0)$, большим и меньшим истинного $u_{i+1}^\circ(0)$, приведен на фиг. 1 для $m = 0.5$ и $\xi = 0.375$. Используя в качестве η_∞ значения независимой переменной, соответствующие $q_{i+1}^\circ(\eta_\infty) = 0$, по значениям $u_{i+1}^\circ(\eta_\infty)$ можно «стрельбой» определить с требуемой точностью $u_{i+1}^\circ(0)$. Уменьшение количества «стрельб» достигается использованием метода деления отрезка пополам и интерполяцией (экстраполяцией) по значениям $u_{i+1}^\circ(\eta_\infty)$ в зависимости от начальных значений u_{i+1}° . В результате, помимо выполнения условия $\lim (u_{i+1}^\circ - m) = 0$ при $\eta \rightarrow \infty$, достигается выполнение естественного условия асимптотики, т. е. $\lim q_{i+1}^\circ = 0$ при $\eta \rightarrow \infty$, которое необходимо учитывать для оценки правой границы отрезка $[0, \eta_\infty]$.

В проведенных расчетах значения η_∞ не превышали $\eta = 12$ при точности по $u_{i+1}^\circ(0)$ не ниже $0.5 \cdot 10^{-7}$. При решении каждой частной задачи Коши на любом слое требуемая точность численного интегрирования системы (2.4) получается при использовании метода Рунге — Кутты с автоматическим выбором шага по перемен-

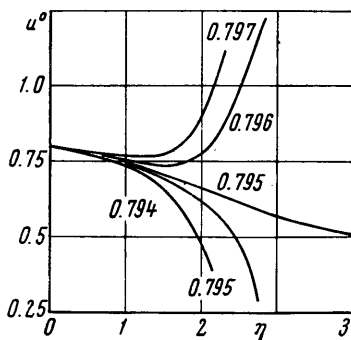
ной η . Уменьшить длину отрезка интегрирования можно путем прекращения интегрирования, как только при грубом начальном значении u°_{i+1} достигаются значения η^* , при которых

$$u^{\circ}_{i+1}(\eta^*) > u^{\circ}_{i+1}(0) < 1$$

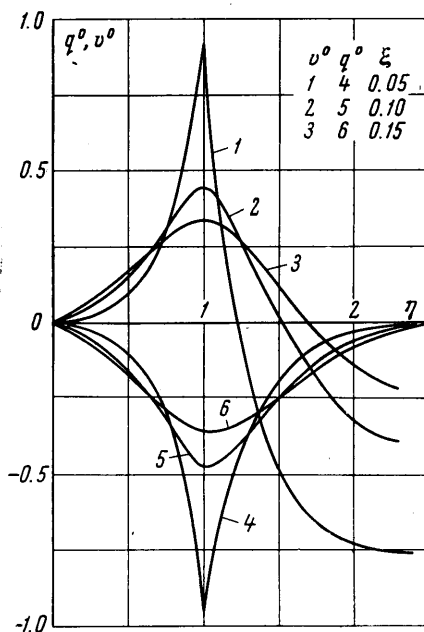
или

$$u^{\circ}_{i+1} - m < 0$$

При использовании указанной схемы определения η_{∞} получается значительная экономия машинного времени, так как при выборе грубых пробных значений $u^{\circ}_{i+1}(0)$ величины η_{∞} получаются меньше $\eta = 12$ и увеличиваются по мере уточнения величины $u^{\circ}_{i+1}(0)$.



Фиг. 1



Фиг. 2

При расчете первого слоя имеется особенность, связанная с разрывом функции u° при $\eta = 1$. При интегрировании методом Рунге — Кутты с шагом $\Delta\eta$ этот разрыв реализуется следующим образом: на четвертой строке шага интегрирования, предшествующего точке разрыва, т. е. при

$$\eta = (1 - \Delta\eta) + \Delta\eta, \quad \frac{\partial q_1^{\circ}}{\partial \eta} = u_1^{\circ} \frac{u_1^{\circ} - 1}{h_0} + q_1^{\circ} v_1^{\circ}, \quad \frac{\partial v_1^{\circ}}{\partial \eta} = -\frac{u_1^{\circ} - 1}{h_0}$$

а на первой строке следующего шага ($\eta = 1$)

$$\frac{\partial q_1^{\circ}}{\partial \eta} = u_1^{\circ} \frac{u_1^{\circ} - m}{h_0} + q_1^{\circ} v_1^{\circ}, \quad \frac{\partial v_1^{\circ}}{\partial \eta} = \frac{m - u_1^{\circ}}{h_0}$$

Следовательно, функции q_1° и v_1° в точке $\eta = 1$ будут иметь излом (фиг. 2; $m = 0.5$). На следующих слоях этот излом сглаживается. Величина скачка в разрыве, равная $1 - m$, влияет на величину шага по ξ . Очевидно, минимальное значение шага имеет место при $m = 0$. Минимальный шаг, выбранный для каждого m на первом слое, через несколько слоев, по мере удаления от начального сечения $\xi = 0$, увеличивается.

Выбор шага h_1 , обеспечивающего необходимую точность расчета, осуществлялся путем удвоения числа прямых $\xi = \text{const}$ до тех пор, пока достигалась заданная степень точности. Удобным критерием для оценки точности расчета и выбора необходимого числа шагов является удовлетворение во всех поперечных сечениях струи интегрального условия сохранения избыточного импульса

$$\int_0^{\infty} u(u - u_0) dy = u_0(u_0 - u_0) \delta_0$$

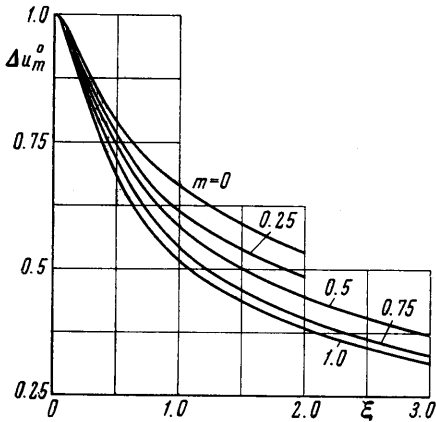
или, в безразмерном виде,

$$\int_0^{\infty} u^{\circ}(u^{\circ} - m) d\eta = 1 - m \quad (2.5)$$

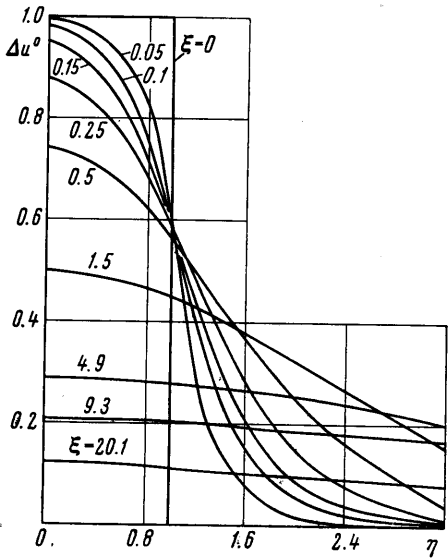
причем точность расчета повышалась, а число шагов уменьшалось с ростом параметра m . Другая форма записи интегрального соотношения (2.5) имеет вид

$$\int_0^{\infty} (2u^{\circ} - m) \frac{\partial u^{\circ}}{\partial \xi} d\eta = 0 \tag{2.6}$$

и позволяет оценить точность аппроксимации $\partial u^{\circ} / \partial \xi$. Лучшее выполнение условий (2.5) или (2.6) при одном и том же шаге по ξ дает замена первого члена в выражении $\partial q^{\circ}_{i+1} / \partial \eta$ системы (2.4) на $1/2[(u^{\circ}_{i+1})^2 - (u_i^{\circ})^2]h_i^{-1}$, т. е. вместо множителя u°_{i+1} перед $\partial u^{\circ}_{i+1} / \partial \xi$ берется полусумма $1/2(u^{\circ}_{i+1} + u_i^{\circ})$. Это соответствует использованию тождества $u \partial u / \partial \xi \equiv 1/2 \partial u^2 / \partial \xi$.



Фиг. 3



Фиг. 4

Более высокий порядок аппроксимации производной $\partial u / \partial \xi$ и, следовательно, более точное выполнение интегрального условия (2.5) дает решение другой системы, полученной из (2.2) заменой $\partial u^{\circ} / \partial \xi$ при $\xi = \xi_{i+1}$ на

$$\frac{\partial u^{\circ}_{i+1}}{\partial \xi} = u^{\circ}_{i-1} \frac{h_i}{h_{i-1}(h_{i-1} + h_i)} - u_i^{\circ} \frac{h_{i-1} + h_i}{h_{i-1}h_i} + u^{\circ}_{i+1} \frac{2h_{i-1} + h_i}{h_i(h_{i-1} + h_i)} \tag{2.7}$$

$$\begin{pmatrix} h_i = \xi_{i+1} - \xi_i \\ h_{i-1} = \xi_i - \xi_{i-1} \end{pmatrix}$$

Определив решение на первом слое при помощи системы (2.4), можно перейти к интегрированию этой новой системы при $i = 1, 2, 3, \dots$

3. Результаты расчета. Расчет выполнялся для четырех значений параметра $m = 0, 0.25, 0.50, 0.75$. На фиг. 3–5 представлены некоторые из полученных результатов — изменение скорости вдоль оси струи $\Delta u_m^{\circ}(\xi, m)$ и профили продольной (Δu°) и поперечной (v°) составляющих скорости в различных поперечных сечениях струи при $m = 0.5$, причем

$$\Delta u^{\circ} = (u - u_{\delta}) / (u_0 - u_{\delta}) = (u^{\circ} - m) / (1 - m)$$

Кривая $\Delta u_m^{\circ}(\xi)$ на фиг. 3, соответствующая $m = 1$, рассчитана по формуле (1.5). Здесь прежде всего обращает на себя внимание то обстоятельство, что в координатах $\Delta u_m^{\circ}, \xi$ увеличение параметра m при фиксированных ξ приводит к уменьшению Δu_m° , в то время как в координатах $\Delta u_m^{\circ}, x^{\circ}$ для турбулентных струй [7–11] имеет место обратный эффект. Поскольку для ламинарных струй величина ξ пропорциональна физической длине x , то отсюда следует существенное различие закономерностей распространения ламинарных и турбулентных спутных струй.

Аналогичный вывод может быть получен при помощи приближенного интегрального метода [10], основанного на условном разделении струи на два участка — началь-

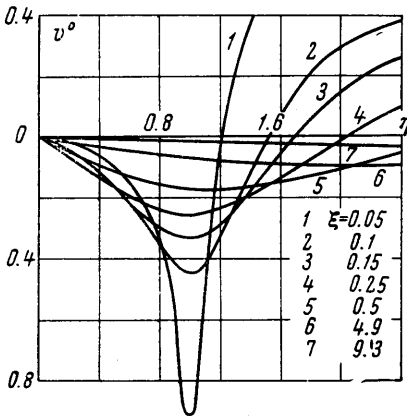
ный и основной. Используя полученные в работе [10] зависимости, при помощи формулы (1.12) определяем длину начального участка

$$\xi_0 = \frac{7}{48} \frac{19 + 23m}{(5 + 2m)^2} \quad (3.1)$$

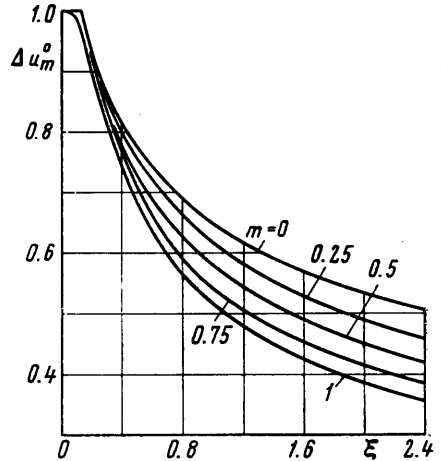
и закон изменения скорости в пределах основного участка

$$\xi = \xi_0 + \frac{1}{2}(1-m) \int_{\kappa x_0^0}^{\kappa x} \left[\frac{1}{5} m + \frac{1}{7}(1-m) \Delta u_m^0(\kappa x^0) \right]^{-1} d(\kappa x^0) \quad (3.2)$$

Результаты соответствующего расчета, представленные на фиг. 6, находятся в удовлетворительном соответствии с зависимостями фиг. 3. Отсюда, в частности, следует еще одно существенное отличие закономерностей распространения ламинарных



Фиг. 5



Фиг. 6

и турбулентных спутных струй. Если длина начального участка турбулентной струи в спутном потоке весьма существенно возрастает с ростом параметра m , то в случае ламинарных струй, как следует из (3.1), такое возрастание практически отсутствует.

Авторы благодарят В. В. Сутягину, выполнившую большую работу по программированию и машинному счету.

Поступило 6 V 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. Изд. иностр. лит., 1956.
2. Бай Ши-и. Теория струй. Физматгиз, 1960.
3. Schetz J. A., Jannone J. A study of linearized approximations to the boundary-layer equations. Trans. ASME. J. Appl. Mech. E., 1965, vol. 32, No. 4.
4. Лойцянский Л. Г. Ламинарный пограничный слой. Физматгиз, 1962.
5. Vulis L. A., Kashkarov V. P., Lukanov A. T. Numerical solution of some problems of boundary-layer theory. Intern. J. Heat Mass. Transfer, 1966, vol. 9.
6. Бетц А. К расчету перехода ламинарного пограничного слоя во внешний поток. Сб. «Проблема пограничного слоя и вопросы теплопередачи», Госэнергоиздат, 1960.
7. Абрамович Г. Н. Теория турбулентных струй. Физматгиз, 1960.
8. Булис Л. А., Кашкаров В. П. Теория струй вязкой жидкости. Изд-во «Наука», 1965.
9. Гиневский А. С. Турбулентные след и струя в спутном потоке при наличии продольного градиента давления. Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1959, № 2.
10. Гиневский А. С. Приближенные уравнения движения в задачах теории турбулентных струй. Изв. АН СССР. Механика и машиностроение, 1963, № 5.
11. Гиневский А. С. Расчет переходного участка турбулентной струи. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 3.
12. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений, т. 2. Физматгиз, 1960.