

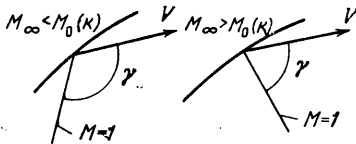
О НАКЛОНЕ ЗВУКОВОЙ ЛИНИИ НА УДАРНОЙ ВОЛНЕ В ОСЕСИММЕТРИЧНОМ ТЕЧЕНИИ

О. М. БЕЛОЦЕРКОВСКИЙ, Э. Г. ШИФРИН

(Москва)

Рассмотрим осесимметричное течение идеального газа за отошедшей ударной волной.

Существенной характеристикой течения является угол γ наклона звуковой линии к вектору скорости на ударной волне — от него зависит в общем случае вид минимальной области влияния смешанного течения. В плоском случае при условии, что кривизна ударной волны в звуковой точке не обращается в нуль или в бесконечность, этот угол определяется только числом Маха M_∞ набегающего потока [1-3]: при $M_\infty < M_0(k)$ угол γ тупой, при $M_\infty > M_0(k)$ — острый. Здесь $M_0(k)$ — некоторая постоянная, k — отношение удельных теплоемкостей (например, $M_0 \approx 1.69$ при $k = 1.4$); угол γ отсчитывается по часовой стрелке, как показано на фиг. 1.



Фиг. 1

Вычислим угол γ в осесимметричном течении в предположении, что кривизна ударной волны в звуковой точке не обращается в нуль или бесконечность.

Отнесем скорость к максимальной скорости, давление и плотность — к давлению и плотности перед ударной волной, линейные размеры — к характерному размеру; совместим ось x декартовой системы координат с осью симметрии течения. Преобразованные уравнения вихря и неразрывности вместе с двумя полными производными вдоль ударной волны от составляющих скорости u, v имеют вид

метрии течения. Преобразованные уравнения вихря и неразрывности вместе с двумя полными производными вдоль ударной волны от составляющих скорости u, v имеют вид

$$v_x - u_y = F_1 \frac{\kappa}{\cos \sigma}, \quad \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) u_x - \frac{uv}{c^2} (u_y + v_x) + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) v_y = -\frac{v}{y} \quad (1)$$

$$u_x + u_y \operatorname{tg} \sigma = F_2 \frac{\kappa}{\cos \sigma}, \quad v_x + v_y \operatorname{tg} \sigma = F_3 \frac{\kappa}{\cos \sigma}, \quad c^2 = \frac{k-1}{2} (1-u^2-v^2)$$

Здесь σ — угол наклона ударной волны к вектору скорости набегающего потока, отсчитываемый против часовой стрелки; $\kappa = ds/ds$ — кривизна ударной волны, c — скорость звука; выражения $F_i(M_\infty, \sigma, k)$, $i = 1, 2, 3$ приведены в [3]. Разрешая систему (1) относительно производных от u, v , получим

$$u_x = m_1 \frac{\kappa}{\cos \sigma} - v \frac{\operatorname{tg}^2 \sigma}{y \Delta}, \quad u_y = m_2 \frac{\kappa}{\cos \sigma} + \frac{v \operatorname{tg} \sigma}{y \Delta} \quad (2)$$

$$v_x = m_3 \frac{\kappa}{\cos \sigma} + \frac{v \operatorname{tg} \sigma}{y \Delta}, \quad v_y = m_4 \frac{\kappa}{\cos \sigma} - \frac{v}{y \Delta}$$

$$\Delta = 1 + \operatorname{tg}^2 \sigma - (u \operatorname{tg} \sigma - v)^2 / c^2$$

$$m_1 = \frac{1}{\Delta} \left\{ \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) [(F_1 - F_3) \operatorname{tg} \sigma + F_2] + \frac{uv}{c^2} \operatorname{tg} \sigma (F_1 \operatorname{tg} \sigma + 2F_2) \right\}$$

$$m_2 = (F_2 - m_1) \operatorname{ctg} \sigma, \quad m_3 = F_1 + m_2, \quad m_4 = (F_3 - m_3) \operatorname{ctg} \sigma$$

В плоском течении эти производные определяются теми же формулами (2), однако в этом случае члены, не содержащие κ , отсутствуют.

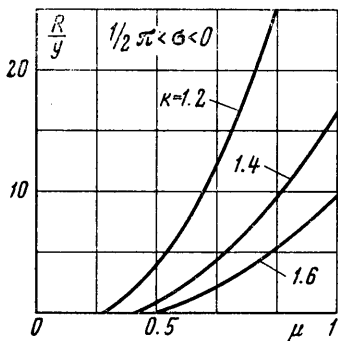
Угол наклона Φ линии $w = \sqrt{u^2 + v^2} = \text{const}$ на ударной волне определяется по формуле

$$\operatorname{tg} \Phi = \frac{dy}{dx} = -\frac{uu_x + vv_x}{uu_y + vv_y} = -\frac{(um_1 + vm_3)\kappa y \Delta - (u \sin \sigma - v \cos \sigma) v \operatorname{tg} \sigma}{(um_2 + vm_4)\kappa y \Delta + (u \sin \sigma - v \cos \sigma) v} \quad (3)$$

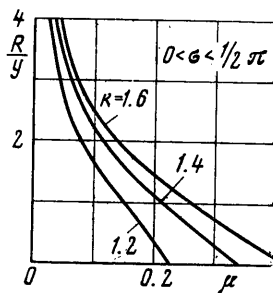
Положив $w = \sqrt{(k-1)/(k+1)}$, $\Phi = \beta - 1/2\pi$, $\beta = \arctg v/u$, разрешим уравнение (3) относительно $R/y = (|\kappa|y)^{-1}$ в звуковой точке на ударной волне. Получим

$$\frac{R}{y} = \frac{\Delta}{v} \operatorname{sign} \kappa \frac{\operatorname{tg}(\beta - 1/2\pi)(um_2 + vm_4) + (um_1 + vm_3)}{[\operatorname{tg} \sigma - \operatorname{tg}(\beta - 1/2\pi)](u \sin \sigma - v \cos \sigma)} \quad (4)$$

При постоянном значении величины k формула (4) определяет R/y как функцию M_∞ , непрерывную при $M_\infty > 1$; обозначим ее $f(M_\infty)$. Так как $R/y \geq 0$, выясним расположение графика $f(M_\infty)$ в первом квадранте плоскости R/y , $M_\infty - 1$. Ось $R/y = 0$ соответствует плоскому течению, поэтому получим, что кривая $f(M_\infty)$ пере-



Фиг. 2



Фиг. 3

секается с осью $R/y = 0$ при $M_\infty > 1$ только в точке $M_\infty = M_0(k)$. Расположение кривой $f(M_\infty)$ зависит от угла σ .

Рассмотрим сначала случай $0 < \sigma < 1/2\pi$. Имеем

$$v > 0, \quad u \sin \sigma - v \cos \sigma = \sin \sigma \left[1 - \frac{2}{k+1} \left(1 - \frac{1}{M_\infty^2 \sin^2 \sigma} \right) \right] > 0$$

$$\operatorname{tg}(\beta - 1/2\pi) < 0$$

Так как $\Delta = [c^2 - (u \sin \sigma - v \cos \sigma)^2] / c^2 \cos^2 \sigma > 0$, получим

$$\operatorname{sign} f(M_\infty) = \operatorname{sign} \{ \kappa [\operatorname{tg}(\beta - 1/2\pi)(um_2 + vm_4) + (um_1 + vm_3)] \} =$$

$$= \operatorname{sign} w_y^* \cdot \operatorname{sign} [\operatorname{tg}(\beta - 1/2\pi) - \operatorname{tg} \Phi^*]$$

Здесь w_y^* — производная по y от модуля скорости в звуковой точке ударной волны плоского течения, Φ^* — угол наклона на ударной волне звуковой линии в плоском течении

$$\frac{w}{2} w_y^* = \frac{\kappa}{\cos \sigma} (um_2 + vm_4), \quad \operatorname{tg} \Phi^* = - \frac{um_1 + vm_3}{um_2 + vm_4}$$

Знак функции $f(M_\infty)$ достаточно установить в малой окрестности точки $M_\infty = M_0(k)$. Используя результаты работы [3], получим в случае, когда при переходе через звуковую линию поток разгоняется, что $\operatorname{sign} w_y^* = 1$ при $M_\infty = M_0(k)$ и

$$\operatorname{sign} [\operatorname{tg}(\beta - 1/2\pi) - \operatorname{tg} \Phi^*] = \begin{cases} 1 & \text{при } M_\infty < M_0(k) \\ -1 & \text{при } M_\infty > M_0(k) \end{cases}$$

Таким образом, $f(M_\infty) \geq 0$ при $M_\infty \leq M_0(k)$.

Аналогично рассмотрим случай $-1/2\pi < \sigma < 0$ (этот случай может иметь место при обтекании кольцевого крыла). Получим

$$v < 0, \quad u \sin \sigma - v \cos \sigma < 0, \quad \operatorname{tg}(\beta - 1/2\pi) > 0$$

$$\operatorname{sign} f(M_\infty) = -\operatorname{sign} w_y^* \operatorname{sign} [\operatorname{tg}(\beta - 1/2\pi) - \operatorname{tg} \Phi^*]$$

Из [3] следует, что $w_y^* < 0$ при $M_\infty = M_0(k)$ и

$$\operatorname{sign} [\operatorname{tg}(\beta - 1/2\pi) - \operatorname{tg} \Phi^*] = \begin{cases} -1 & \text{при } M_\infty < M_0(k) \\ 1 & \text{при } M_\infty > M_0(k) \end{cases}$$

Отсюда получим, что $f(M_\infty) \geq 0$ при $M_\infty \geq M_0(k)$.

Таким образом, доказано, что как и в плоском течении независимо от формы ударной волны, а значит и от формы тела, имеет место следующее:

- 1) при $0 < \sigma < 1/2\pi$, $M_\infty > M_0(k)$ угол γ острый;
- 2) при $-1/2\pi < \sigma < 0$, $M_\infty < M_0(k)$ угол γ тупой.

В остальных случаях угол γ может быть острым, или тупым в зависимости от положения точки с координатами R/y , M_∞ относительно кривых $f = f(M_\infty)$ при $0 < \sigma < 1/2\pi$ и при $-1/2\pi < \sigma < 0$, которые приведены на фиг. 2, 3, на которых $\mu = (\lambda_\infty - 1) / \sqrt{(k+1)(k-1)} - 1$, $\lambda = w/c_*$ — коэффициент скорости набегающего потока.

Таблица 1

Значения функции $f(M_\infty)$
при $0 < \sigma < 1/2\pi$

| μ | $k = 1.2$ | $k = 1.4$ | $k = 1.6$ |
|-------|-----------|-----------|-----------|
| 0 | ∞ | ∞ | ∞ |
| 0.02 | 4.3888 | 5.3195 | 5.9167 |
| 0.04 | 3.0432 | 3.7154 | 4.1396 |
| 0.06 | 2.4065 | 2.9814 | 3.3340 |
| 0.08 | 1.9876 | 2.5229 | 2.8382 |
| 0.10 | 1.6623 | 2.1902 | 2.4857 |
| 0.12 | 1.3820 | 1.9252 | 2.2120 |
| 0.14 | 1.1227 | 1.7001 | 1.9864 |
| 0.16 | 0.8710 | 1.4994 | 1.7917 |
| 0.18 | 0.6180 | 1.3137 | 1.6177 |
| 0.20 | 0.3580 | 1.1368 | 1.4578 |
| 0.22 | 0.0864 | 0.9646 | 1.3074 |
| 0.24 | -0.2000 | 0.7937 | 1.1634 |
| 0.26 | | 0.6219 | 1.0231 |
| 0.28 | | 0.4472 | 0.8849 |
| 0.30 | | 0.2682 | 0.7471 |
| 0.32 | | 0.0837 | 0.6087 |
| 0.34 | | -0.1074 | 0.4686 |
| 0.36 | | | 0.3260 |
| 0.38 | | | 0.1803 |
| 0.40 | | | 0.0307 |
| 0.42 | | | -0.1231 |

Таблица 2

Значения функции $f(M_\infty)$
при $-1/2\pi < \sigma < 0$

| μ | $k = 1.2$ | $k = 1.4$ | $k = 1.6$ |
|-------|-----------|-----------|-----------|
| 0.20 | -0.3580 | | |
| 0.24 | 0.2000 | | |
| 0.28 | 0.8278 | | |
| 0.32 | 1.5420 | -0.0837 | |
| 0.36 | 2.3548 | 0.3060 | |
| 0.40 | 3.2758 | 0.7289 | -0.0307 |
| 0.44 | 4.3133 | 1.1900 | 0.2818 |
| 0.48 | 5.4746 | 1.6933 | 0.6152 |
| 0.52 | 6.7664 | 2.2424 | 0.9722 |
| 0.56 | 8.1950 | 2.8400 | 1.3552 |
| 0.60 | 9.7667 | 3.4888 | 1.7662 |
| 0.64 | 11.4873 | 4.1909 | 2.2066 |
| 0.68 | 13.3328 | 4.9485 | 2.6780 |
| 0.72 | 15.3991 | 5.7635 | 3.1817 |
| 0.76 | 17.6020 | 6.6373 | 3.7188 |
| 0.80 | 19.9772 | 7.5734 | 4.2903 |
| 0.84 | 22.5306 | 8.5717 | 4.8973 |
| 0.88 | 25.2679 | 9.6347 | 5.5407 |
| 0.92 | 28.1948 | 10.7641 | 6.2213 |
| 0.96 | 31.3173 | 11.9615 | 6.9402 |
| 1.00 | 34.6410 | 13.2287 | 7.6980 |

Результаты расчета функций $f(M_\infty)$ при $k = 1.6, 1.4, 1.2$ представлены в табл. 1, 2 и на фиг. 2, 3. Приведем также критические значения $M_0(k)$, получаемые как точки пересечения кривых $f(M_\infty)$ с осью $R/y = 0$: $M_0 = 1.6358$ при $k = 1.2$, $M_0 = 1.6895$ при $k = 1.4$, $M_0 = 1.7421$ при $k = 1.6$. Расчет проводился на ЭЦВМ М-20.

Поступило 17 III 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Drebinger J. W. Detached shock waves. Ph. D. Thesis, Faculty of Arts and Sci., Harvard Univ., Cambridge, Mass, 1950.
2. Hasimoto Z. Some local properties of plane flow behind a curved shock wave. Dept. Math. and Phys. Rep., Ritumeikan Univ., Kyoto, Japan, 1956.
3. Белоцерковский О. М. Обтекание симметричного профиля с оттопленной ударной волной. ПММ, 1958, т. 22, вып. 2.