

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ АКУСТИКИ ОДНОМЕРНЫХ НЕСТАЦИОНАРНЫХ И ДВУМЕРНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ ТЕЧЕНИЙ

А. Н. КРАЙКО

(Москва)

Поведение разрывов (слабых скачков) параметров возмущенного течения и их взаимодействие с разрывами основного потока в приближении геометрической акустики, когда изменение интенсивности таких скачков вдоль характеристик или бихарактеристик описывается обыкновенными дифференциальными уравнениями, исследовалось многими авторами. Так, Келлер [1] рассмотрел случай, когда невозмущенное течение является пространственным и стационарным, а внешние воздействия не зависят от параметров потока. Для магнитогазодинамического изэнтропического течения идеально проводящей среды аналогичное исследование выполнено Базером и Флейшманом [2], а для пространственного стационарного течения газа конечной проводимости при малых магнитных числах Рейнольдса и при отсутствии электрического поля — А. А. Луговцовым [3]. В ряде работ (например в [4]) поведение разрывов решений рассматривалось с общих позиций теории гиперболических систем квазилинейных уравнений. Наконец, взаимодействие слабых скачков (или эквивалентных им непрерывных возмущений) с ударными волнами исследовалось в работах [5-11].

Ниже рассмотрены одномерное (с плоскими, цилиндрическими и сферическими волнами) и квазиодномерное нестационарные течения, а также плоское и осесимметричное стационарные течения. Исследованы два вопроса: изменение интенсивности слабых скачков при наличии воздействий, зависящих от параметров потока, и взаимодействие слабых скачков с сильными разрывами, отличными от контактных (тангенциальных).

Термодинамические свойства газа считаются произвольными. Отмечено, что полученные формулы для коэффициентов взаимодействия слабых и сильных разрывов сохраняются и при неравновесном течении.

1. Пусть w — скорость, p — давление, ρ — плотность, h — удельная энтальпия газа и $h = h(p, \rho)$.

Рассмотрим одномерные нестационарные течения, описываемые уравнениями

$$(S\rho w)_r + S\rho_t = 0 \quad (\text{неразрывности})$$

$$\rho(w w_r + w_t) + p_r - \rho f(w, p, \rho, \Phi, r, t) = 0 \quad (\text{движения}) \quad (1.1)$$

$$\rho(w h_r + h_t) - w p_r - p_t - \rho \varepsilon(w, p, \rho, \Phi, r, t) = 0 \quad (\text{энергии})$$

Здесь r — пространственная переменная; t — время; индексы r и t приписаны соответствующим частным производным; f — массовая сила; ε — функция, связанная с силой f и внешними источниками тепла; вектор Φ представляет совокупность некоторых «внешних» параметров; S — известная функция r . Если

$$S \sim r^v, \quad v = 0, 1, 2$$

а r — расстояние от плоскости, оси или центра симметрии, то уравнения (1.1) описывают одномерные нестационарные течения с плоскими, цилиндрическими или сферическими волнами соответственно. При прочих зависимостях $S(r)$ эти уравнения суть уравнения квазиодномерного течения в канале с поперечным сечением S . Выражения для f , ε и S считаются известными.

Обозначим через d скорость перемещения поверхности разрыва, а через $[\xi]$ — разность ξ с обеих его сторон и ограничимся газодинамическими разрывами, на которых

$$\begin{aligned} [\rho(w-d)] &= 0, & [p + \rho(w-d)^2] &= 0 \\ \rho(w-d)[2h + (w-d)^2] &= 0 \end{aligned} \quad (1.2)$$

Рассматривая течение, близкое к некоторому известному течению, также удовлетворяющему (1.1) и (1.2), представим его параметры в виде $w + \delta w$, $p + \delta p$ и т. д., где w , p , ... — параметры известного течения, а δw , δp , ... — их возмущения. Возмущения будем считать малыми.

Обыкновенное дифференциальное уравнение, описывающее изменение интенсивности разрыва, который распространяется вдоль характеристики, получается стандартным путем, т. е. вычитанием линеаризованных уравнений, записанных с обеих сторон разрыва, и исключением скачков всех параметров, кроме одного, при помощи соотношений на слабых разрывах, следующих из (1.2).

В итоге для характеристик первого и второго семейств получим

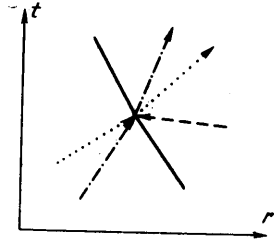
$$\begin{aligned}
 [\delta p] &= [\delta p]_0 \left(\frac{\rho c}{\rho_0 c_0} \right)^{1/2} \exp \left(\int_{t_0}^t L^\pm dt \right), \quad r = r_0 + \int_{t_0}^t (w \pm c) dt \\
 [\delta \rho] &= \frac{[\delta p]}{c^2}, \quad [\delta w] = \pm \frac{[\delta p]}{\rho c} \\
 2L^\pm &= \frac{c^2}{h_p} (w h_{p_r} + h_{p_t} - \varepsilon_p) + \frac{1}{\rho^2 h_p} (w p_r + p_t + w \rho^2 h_{or} + \\
 &+ \rho^2 h_{ot} - \rho^2 \varepsilon_p) \pm \frac{c}{\rho h_p} \left(h_r - \frac{1}{\rho} p_r - \varepsilon_w \right) \pm \frac{1}{\rho c} (\rho^2 f_\rho + p_r) - \\
 -2w_r - w(\ln S)_r &\mp c \{ \ln(S \rho) \}_r \pm \rho c f_p + f_w, \quad c = \sqrt{\rho h_p / (1 - \rho h_p)}
 \end{aligned} \tag{1.3}$$

Здесь c — скорость звука; индекс 0 приписан параметрам течения и координате скачка в момент времени t_0 ; индексы p , ρ и w означают частные производные, верхний (нижний) знак соответствует характеристикам первого (второго) семейства. Для слабого контактного разрыва, где $[\delta p] \equiv [\delta w] \equiv 0$, аналогичным образом получим

$$[\delta \rho] = [\delta \rho]_0 \frac{h_{\rho 0}}{h_\rho} \exp \left(\int_{t_0}^t L dt \right), \quad r = r_0 + \int_{t_0}^t w dt, \quad L = \frac{\varepsilon_\rho - p \rho^{-2} (\lg p)'}{h_\rho} \tag{1.4}$$

где штрихом обозначена полная производная по x вдоль траектории частицы. Для совершенного газа с показателем адиабаты κ первое равенство (1.4) имеет вид

$$[\delta \rho] = [\delta \rho]_0 \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^2 \left(\frac{p_0}{p} \right)^{1/\kappa} \exp \left(\int_{t_0}^t \frac{\varepsilon_\rho}{h_\rho} dt \right)$$



Фиг. 1

При выводе (1.3) и (1.4) предполагалось, что w , p и ρ входят в уравнения и граничные условия, определяющие Φ , таким образом, что их разрывы не вызывают разрывов Φ . Это имеет место, например, для тех течений проводящей среды, для которых напряженности электромагнитного поля или не зависят от течения или зависят от него только через интегральные характеристики (как для квазиодномерного течения при малых магнитных числах Рейнольдса). В качестве других примеров укажем на течение излучающего, но не поглощающего газа и на течение с инородными частицами, рассматриваемое на основе модели многократной сплошной среды.

2. Рассмотрим взаимодействие слабых разрывов с сильными, отличными от контактного. Пусть газ течет слева направо, система координат выбрана так, что в момент прихода слабого разрыва на сильный $d = 0$, и пусть скорость газа слева от разрыва больше или равна скорости звука. Из слабых скачков, приходящих слева, ограничимся теми, которые распространяются вдоль траекторий частиц и характеристик первого семейства. Если за разрывом скорость дозвуковая, то в дополнение к ним справа могут приходить слабые скачки, распространяющиеся по характеристикам второго семейства. Разрыв, образующийся при слиянии слабого разрыва с сильным, тут же распадается, так как на нем не выполняются условия (1.2). В результате изменяется скорость сильного разрыва и возникают слабые скачки, движущиеся вправо по траекториям частиц и характеристикам первого семейства, как показано на фиг. 1, где сплошная линия — сильный разрыв, пунктирные и штриховая — характеристики первого и второго семейств соответственно, а штрих-пунктирные — траектории частиц. Стрелки дают направление движения слабых скачков, а изменению скорости сильного разрыва отвечает излом сплошной линии.

Припишем нижние индексы минус (плюс) параметрам слева (справа) от сильного разрыва, а верхние индексы градус, плюс и минус — скачкам параметров на разрывах, движущихся по траекториям частиц и характеристикам первого и второго семейств, и обозначим через $[\delta \xi]$ разность $\delta \xi$ до и после разрыва по ходу его движения, через $[\delta d]$ — приращение скорости сильного разрыва в результате взаимодействия со слабыми и через $M = w/c$ — число Маха.

Линеаризуя (1.2) и проводя необходимые выкладки, получим

$$\begin{aligned} [\delta\rho]_+^\circ &= \lambda_{00} [\delta\rho]_-^\circ + \frac{\lambda_{01}}{w_+^2} [\delta\rho]_{-+} + \frac{\lambda_{02}}{w_+^2} [\delta\rho]_{+-} \\ [\delta\rho]_{++} &= \lambda_{10} w_+^2 [\delta\rho]_-^\circ + \lambda_{11} [\delta\rho]_{-+} + \lambda_{12} [\delta\rho]_{+-} \\ [\delta d] &= \lambda_0 \frac{w_+}{\rho_+} [\delta\rho]_-^\circ + \frac{\lambda_1}{\rho_+ w_+} [\delta\rho]_{-+} + \frac{\lambda_2}{\rho_+ w_+} [\delta\rho]_{+-} \end{aligned} \quad (2.1)$$

где λ_{ij} имеют смысл коэффициентов преломления ($j = 0$ и 1) и отражения ($j = 2$), а λ_i — коэффициентов воздействия слабых разрывов на сильный и определяются по формулам

$$\begin{aligned} \lambda_{00} &= \frac{w_+^2 \{1 - M_+ (\rho_+/\rho_-)\} (\rho_+/\rho_-) + (1 + M_+) \rho_- h_{\rho_-}}{w_+^2 \{1 - M_+ (\rho_-/\rho_+)\} + (1 + M_+) \rho_- h_{\rho_+}} \\ \lambda_{10} &= \frac{(\rho_+/\rho_-)^2 - \lambda_{00}}{(1 + M_+)^2}, \quad \lambda_{01} = (1 + M_-)^2 - (1 + M_+)^2 \lambda_{11} \\ \lambda_0 &= \frac{\lambda_{00} + M_+ (1 + M_+) \lambda_{10} - (\rho_+/\rho_-)}{1 - (\rho_-/\rho_+)} \\ \lambda_{11} &= \frac{M_+ M_- (1 + M_-) \{1 - (\rho_+/\rho_-)\} - (1 + M_-)^2 (1 - \rho_+ h_{\rho_+})}{M_+^2 (1 + M_+) \{1 - (\rho_+/\rho_-)\} - (1 + M_+)^2 (1 - \rho_+ h_{\rho_+})} \\ \lambda_1 &= \frac{\lambda_{01} + M_+ (1 + M_+) \lambda_{11} - M_- (1 + M_-) (\rho_-/\rho_+)}{1 - (\rho_-/\rho_+)} \\ \lambda_{12} &= \frac{(1 - M_+)^2 (1 - \rho_+ h_{\rho_+}) - M_+^2 (1 - M_+) \{1 - (\rho_+/\rho_-)\}}{M_+^2 (1 + M_+) \{1 - (\rho_+/\rho_-)\} - (1 + M_+)^2 (1 - \rho_+ h_{\rho_+})} \\ \lambda_{02} &= -(1 - M_+)^2 - (1 + M_+)^2 \lambda_{12}, \quad \lambda_2 = \frac{1 - M_+ + (1 + M_+) \lambda_{12}}{(\rho_-/\rho_+) - 1} \end{aligned}$$

Естественно, что полученные коэффициенты λ сохраняются и для непрерывных возмущений, если их протяженность мала по сравнению с масштабом неоднородностей основного потока, а в цилиндрическом и сферическом случаях — и по сравнению с r . Для совершенного газа для случая, когда сильный разрыв — ударная волна, преломление возмущений, приходящих слева по характеристике первого семейства, рассмотрено в [5], а отражение возмущений, приходящих справа, исследовалось Г. Г. Черным в 1953 г. и Мирелсом в 1959 г. (часть его результатов цитируется в [1]). Для волны детонации возмущения, приходящие справа, рассматривались А. Б. Бабицким в 1959 г.

3. Аналогичным образом могут быть исследованы плоские и осесимметричные сверхзвуковые течения.

Пусть x и y — оси прямоугольной системы координат (в осесимметричном случае они лежат в меридиональной плоскости и ось x совпадает с осью течения), u и v — проекции скорости на них, а X и Y — массовые силы в уравнениях движения. Если X , Y и ϵ — известные функции u , v , ρ , ρ , Φ , x и y , то вдоль характеристик первого и второго семейств

$$\begin{aligned} [\delta\rho] &= [\delta\rho]_0 \exp\left(\int_{x_0}^x L^\pm dx\right), \quad y = y_0 + \int_{x_0}^x \operatorname{tg}(\theta \pm \alpha) dx \\ [\delta u] &= \mp \frac{\sin(\theta \pm \alpha)}{\cos} [\delta\rho], \quad [\delta v] = -[\delta u] \operatorname{tg}(\theta \pm \alpha), \quad [\delta\rho] = c^{-2} [\delta p] \end{aligned}$$

Здесь и далее верхний (нижний) знак соответствует характеристикам первого (второго) семейства, $\alpha = \operatorname{arc} \sin(c/w)$ — угол Маха, w — модуль скорости, θ —

угол наклона вектора скорости к оси x , а L^\pm определяются параметрами исходного течения по формуле

$$L^\pm = -\frac{\rho v \operatorname{tg} \alpha}{2} \left\{ \frac{\sin(\theta \pm \alpha)}{\rho c} \right\}' - \frac{\rho u \operatorname{tg} \alpha}{2} \left\{ \frac{\cos(\theta \pm \alpha)}{\rho c} \right\}' + \frac{\sin(\theta \pm \alpha)}{2c \operatorname{ctg} \alpha} \times$$

$$\times \left\{ \left(\varepsilon_u + \frac{p_x}{\rho} - h_x + h_\rho \rho_x \right) \Lambda^\pm + y'(X_u - u_x) - Y_u + v_x \right\} -$$

$$- \frac{\cos(\theta \pm \alpha)}{2c \operatorname{ctg} \alpha} \left\{ \left(\varepsilon_v + \frac{p_y}{\rho} - h_y + h_\rho \rho_y + \frac{v}{y} \rho h_\rho \right) \Lambda^\pm + y'(X_v - u_y) - \right.$$

$$- Y_v + v_y \left. \right\} \mp \frac{\rho}{2c \operatorname{ctg} \alpha} \left\{ (\varepsilon_p - u h_{p_x} - v h_{p_y}) \Lambda^\pm + y' X_p - Y_p \right\} \mp$$

$$\mp \frac{\rho \operatorname{tg} \alpha}{2c^2} \left\{ \left(\varepsilon_\rho - u h_{\rho x} - v h_{\rho y} - \frac{u p_x + v p_y}{\rho^2} - \frac{u \rho_x + v \rho_y}{\rho} h_\rho \right) \Lambda^\pm + \right.$$

$$\left. + y' \left(X_\rho + \frac{p_x}{\rho^2} \right) - Y_\rho - \frac{p_y}{\rho^2} \right\}$$

$$\left(y' = \operatorname{tg}(\theta \pm \alpha), \Lambda^\pm = \pm \frac{c}{\rho h_\rho \cos(\theta \pm \alpha)} \right)$$

где $v = 0$ и 1 для плоского и осесимметричного случаев соответственно, а штрих означает полную производную по x вдоль характеристики.

Значения $[\delta u]$ и $[\delta \rho]$ на слабом тангенциальном разрыве, где

$$y' = \operatorname{tg} \theta, \quad [\delta p] = 0, \quad [\delta v] = [\delta u] \operatorname{tg} \theta$$

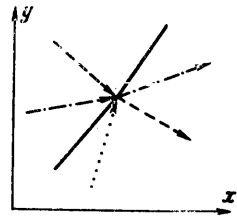
определяются уравнениями

$$w^2 [\delta u]' = \{u X_u + v Y_u + v(X_v + y' Y_v) + (y'^2 - 1) u u' - 2v v'\} [\delta u] +$$

$$+ (u X_p + v Y_p + \rho^{-2} u p') [\delta \rho]$$

$$u h_\rho [\delta \rho]' = (\varepsilon_u + y' \varepsilon_v - u^{-1} \varepsilon) [\delta u] + (\varepsilon_\rho - u h_\rho' - \rho^{-2} u p') [\delta \rho]$$

Тем же путем, что и в нестационарном случае, рассматривается взаимодействие слабых разрывов с сильным, отличным от тангенциального. Пусть в плоскости xu реализуется случай, показанный на фиг. 2, обозначения которой аналогичны принятым на фиг. 1. Газ течет слева направо и течение всюду сверхзвуковое. Обозначим через $[\delta \xi]$ разности $\delta \xi$ слева и справа от разрыва по направлению стрелок для всех разрывов, кроме приходящего вдоль характеристики первого семейства, и обратную величину — в последнем случае. Приняв ту же систему индексов, что и ранее, и выбрав направленные оси x так, чтобы $\theta_+ = 0$, получим



Фиг. 2

$$[\delta u]_+^\circ = \lambda_{00}^{(1)} [\delta u]_-^\circ + \frac{\lambda_{00}^{(2)} w_+}{\rho_+} [\delta \rho]_-^\circ +$$

$$+ \frac{\lambda_{01}^{(1)}}{\rho_+ w_+} [\delta p]_{++} + \frac{\lambda_{02}^{(1)}}{\rho_+ w_+} [\delta p]_{--} \quad (3.1)$$

$$[\delta \rho]_{++}^\circ = \frac{\lambda_{00}^{(2)} \rho_+}{w_+} [\delta u]_-^\circ + \lambda_{00}^{(4)} [\delta \rho]_-^\circ + \frac{\lambda_{01}^{(2)}}{w_+^2} [\delta p]_{++} + \frac{\lambda_{02}^{(2)}}{w_+^2} [\delta p]_{--}$$

$$[\delta p]_{+-} = \lambda_{10}^{(1)} \rho_+ w_+ [\delta u]_-^\circ + \lambda_{10}^{(2)} w_+^2 [\delta \rho]_-^\circ + \lambda_{11} [\delta p]_{++} + \lambda_{12} [\delta p]_{--}$$

$$[\delta \sigma] = \frac{\lambda_0^{(1)}}{w_+} [\delta u]_-^\circ + \frac{\lambda_0^{(2)}}{\rho_+} [\delta \rho]_-^\circ + \frac{\lambda_1}{\rho_+ w_+^2} [\delta p]_{++} + \frac{\lambda_2}{\rho_+ w_+^2} [\delta p]_{--}$$

Здесь σ — угол наклона сильного разрыва к оси x , а $[\delta\sigma]$ — его изменение в результате взаимодействия. Коэффициенты λ вычисляются по формулам

$$\begin{aligned}\lambda_{00}^{(1)} &= \frac{\rho_- w_- k_2}{\rho_+ w_+ k_1}, \quad \lambda_{00}^{(2)} = \frac{w_-^2 k_3}{w_+^2 k_1}, \quad \lambda_{01}^{(1)} = \frac{k_4}{k_1}, \quad \lambda_{02}^{(1)} = \frac{k_5}{k_1} \\ \lambda_{00}^{(3)} &= \frac{w_+}{\rho_+ h_{\rho+}} \left(\frac{w_-}{\cos \theta_-} - \lambda_{00}^{(1)} w_+ \right), \quad \lambda_{00}^{(4)} = \frac{h_{\rho-}}{h_{\rho+}} - \frac{\lambda_{00}^{(2)} w_+^2}{\rho_+ h_{\rho+}} \\ \lambda_{01}^{(2)} &= -\frac{\lambda_{01}^{(1)} w_+^2}{\rho_+ h_{\rho+}}, \quad \lambda_{02}^{(2)} = -\frac{\lambda_{02}^{(1)} w_+^2}{\rho_+ h_{\rho+}}, \quad \lambda_{10}^{(1)} = \frac{k_7 \lambda_{00}^{(1)} - k_8}{k_6} \\ \lambda_{10}^{(2)} &= \frac{k_7 \lambda_{00}^{(2)} + k_9}{k_6}, \quad \lambda_{11} = \frac{k_7 \lambda_{01}^{(1)} + k_{10}}{k_6}, \quad \lambda_{12} = \frac{k_7 \lambda_{02}^{(1)} - k_{11}}{k_6} \\ \lambda_0^{(1)} &= \frac{1}{k_{12}} \left\{ \frac{\cos(\sigma - \theta_-)}{\cos \theta_-} - \lambda_{00}^{(1)} \cos \sigma + \lambda_{10}^{(1)} \frac{\sin(\sigma + \alpha_+)}{\sin \alpha_+} \right\} \\ \lambda_0^{(2)} &= \frac{1}{k_{12}} \left\{ \lambda_{10}^{(2)} \frac{\sin(\sigma + \alpha_+)}{\sin \alpha_+} - \lambda_{00}^{(2)} \cos \sigma \right\} \\ \lambda_1 &= \frac{1}{k_{12}} \left\{ \lambda_{11} \frac{\sin(\sigma + \alpha_+)}{\sin \alpha_+} - \lambda_{01}^{(1)} \cos \sigma - \frac{\sin(\sigma - \alpha_+)}{\sin \alpha_+} \right\} \\ \lambda_2 &= \frac{1}{k_{12}} \left\{ \lambda_{12} \frac{\sin(\sigma + \alpha_+)}{\sin \alpha_+} - \lambda_{02}^{(1)} \cos \sigma - \frac{\rho_+ w_+ \sin(\sigma - \theta_- + \alpha_-)}{\rho_- w_- \sin \alpha_-} \right\}\end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned}k_1 &= \left\{ \frac{\cos(\sigma - \theta_-)}{\sin \sigma} + \frac{\cos(2\sigma - \theta_- - \alpha_+)}{\sin \alpha_+} - \frac{w_+^2 \sin(2\sigma - \theta_-)}{\rho_+ h_{\rho+}} \right\} \sin^2 \sigma \\ k_2 &= \frac{\sin^2(\sigma - \theta_-)}{\cos \theta_-} \left\{ \frac{\cos \sigma}{\sin(\sigma - \theta_-)} + \frac{\sin \sigma \cos(2\sigma - \theta_- - \alpha_+)}{\sin(\sigma - \theta_-) \sin \alpha_+} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(\rho_- - \rho_+) \sin(\sigma - \theta_-) \sin(\sigma + \alpha_+)}{\rho_+ \sin \alpha_+} - \frac{\rho_- w_-^2 \sin(2\sigma - \theta_-)}{\rho_+^2 h_{\rho+}} \right\} \\ k_3 &= \sin^2(\sigma - \theta_-) \sin(2\sigma - \theta_-) \left\{ 1 - \frac{\rho_-^2 h_{\rho-}}{\rho_+^2 h_{\rho+}} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(\rho_- - \rho_+) \sin(\sigma - \theta_-) \sin(\sigma + \alpha_+)}{\rho_+ \sin \alpha_+ \sin(2\sigma - \theta_-)} \right\} \\ k_4 &= \frac{2 \operatorname{ctg} \alpha_+}{\sin \alpha_+} \sin \sigma \sin(\alpha_+ - \sigma) \sin(2\sigma - \theta_-) \\ k_5 &= \frac{\sin^2(\sigma - \theta_-) \sin^2(\sigma - \theta_- + \alpha_-)}{\sin \alpha_-} \left\{ \frac{\sin(2\sigma - \theta_-)}{\sin^2(\sigma - \theta_-) \sin \alpha_-} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(\rho_- - \rho_+) \operatorname{ctg} \alpha_- - 2\rho_+ \operatorname{ctg}(\sigma - \theta_-)}{\rho_+ \sin \alpha_+ \sin(\sigma - \theta_- + \alpha_-)} \sin(\sigma + \alpha_+) \right\}\end{aligned}$$

$$k_6 = \frac{\sin(2\sigma - \theta_-) \sin(\sigma + \alpha_+)}{\sin \alpha_+}, \quad k_7 = \sin \sigma \cos(2\sigma - \theta_-)$$

$$k_8 = \frac{\sin \sigma}{\cos \theta_-} \left\{ \left(\frac{\rho_-}{\rho_+} - 1 \right) \sin^2(\sigma - \theta_-) + \cos 2(\sigma - \theta_-) \right\}$$

$$k_9 = \frac{\rho_+ - \rho_-}{\rho_+ w_+^2} w_-^2 \sin^3(\sigma - \theta_-), \quad k_{10} = \frac{\sin(\sigma - \alpha_+) \sin(2\sigma - \theta_-)}{\sin \alpha_+}$$

$$k_{11} = \frac{(\rho_- - \rho_+) \operatorname{ctg} \alpha_- - 2\rho_+ \operatorname{ctg}(\sigma - \theta_-)}{\rho_+ \sin \alpha_-} \sin^2(\sigma - \theta_-) \sin(\sigma - \theta_- + \alpha_-)$$

$$k_{12} = \frac{w_-}{w_+} \left(\frac{\rho_-}{\rho_+} - 1 \right) \sin(\sigma - \theta_-)$$

Взаимодействие ударной волны с возмущениями, приходящими на нее как слева, так и справа, для случая совершенного газа было исследовано Г. Г. Черным в 1950 г. Отражение возмущений от ударной волны (слагаемые с $[\delta p]_{+}^{+}$) рассматривалось также Лайтхиллом [6], Чу [7] и Г. Г. Черным [8], который отметил, в частности, неточности, допущенные двумя предыдущими авторами (правильные значения коэффициента отражения для $M_- = \infty$ приведены в работе [8]).

При неравновесном течении h функция не только p и ρ , но и некоторых параметров q , изменяющихся с конечной скоростью. Однако, если под h_p и h_ρ понимать частные производные при фиксированных q , то хотя в правых частях (2.1) и (3.1) и добавляются члены с $[\delta q]_-^{\circ}$; тем не менее, остальные слагаемые не изменяются. В связи с этим укажем на ошибочность заметки [12].

Поступило 24 III 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Keller J. B. Geometrical acoustics. I. The theory of weak shock waves. J. Appl. Phys., 1954, vol. 25, No. 8, p. 938—947.
2. Bazer J., Fleischman O. Propagation of weak hydromagnetic discontinuities. Phys. Fluids, 1959, vol. 2, No. 4, p. 366—378.
3. Луговцов А. А. Распространение слабых ударных волн в магнитном поле. ПМТФ, 1966, № 4, стр. 91—93.
4. Jeffrey A. The propagation of weak discontinuities in quasilinear symmetric hyperbolic systems. Z. angew. Math. und Phys., 1963, vol. 14, No. 4, p. 301—314.
5. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. Гостехиздат, 1954.
6. Lighthill M. J. The flow behind a stationary shock. Philos. Mag., 1949, vol. 40, No. 301, p. 214—220.
7. Воа-Тех Чу. On weak interaction of strong shock and Mach waves generated downstream of the shock. J. Aeron. Sci., 1952, vol. 19, No. 7, p. 433—446.
8. Черный Г. Г. Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. Физматгиз, 1959.
9. Chernyi G. G. Introduction to hypersonic flow. Academic Press, N. Y., 1961.
10. Хейз У. Д., Пробстин Р. Ф. Теория гиперзвуковых течений. Изд. иностр. лит., 1962.
11. Mirels H., Braun W. H. Perturbed onedimensional unsteady flows including transverse magneticfield effect. Phys. Fluids, 1962, vol. 5, No. 3, p. 259—265.
12. Gerber N. Note on shock reflection coefficient. AIAA J., 1967, vol. 5, No. 2, p. 369—371.