

§ 5. Предлагаемым методом рассчитано обтекание затупленного по сфере конуса с углом полураствора $\theta = 10^\circ$ при $M_\infty = 23$ и высоте $H = 60$ км. Расчет проведен методом Эйлера до $\bar{x} = x/\delta = 25$ (начало координат находится в носике конуса, δ — радиус затупления).

Устойчивость счета исследовалась экспериментально путем варьирования величины шага. При этом оказалось, что величина шага, обеспечивающая устойчивый счет, примерно в десять раз меньше той, которая следует из оценки зоны влияния двух соседних точек $\Delta x \leq \Delta x_{\max}$. Эта оценка дает

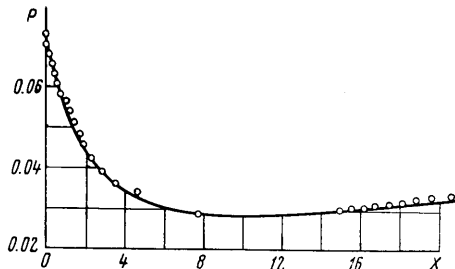
$$\Delta x_{\max} = \frac{r_{k+1} - r_k}{2} \frac{M_{k,k+1}^2 - 1}{\sqrt{M_{k,k+1}^2 (1 + r_{k,k+1}^2) - 1}}$$

Расчет велся с минимальным числом линий тока, равным 9. Когда число линий тока достигало 17, производилось выбрасывание промежуточных линий тока, т. е. число линий тока уменьшалось до 9.

Для контроля точности аппроксимации по направлению Y проводился расчет с меньшим числом линий тока. Для контроля точности численного интегрирования проверялось выполнение условий на скачке уплотнения. Согласно этим оценкам, ошибки расчета не превышали величины порядка 1%.

Было проведено также сравнение с результатами расчетов методом характеристик, которое дало отличие порядка 2% во всем поле течения.

На фигуре дается сравнение распределения давления $\bar{p} = p/\rho_\infty u_\infty^2$, полученного предложенным методом, с результатами расчетов П. И. Чушкина и Н. П. Шулишниковой [1] (газ термически совершенный, $\gamma = 1.4$, $M_\infty = 10$, $\theta = 10^\circ$). Данные из работы [1] нанесены кружками.



Поступило 5 II 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Чушкин П. И., Шулишникова Н. П. Таблицы сверхзвукового течения около затупленных конусов. ВЦ АН СССР, 1961.

ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ПЛАСТИН В ПОТОКЕ, БЛИЗКОМ К СВОБОДНОМОЛЕКУЛЯРНОМУ

М. Н. КОГАН, О. Г. ФРИДЕНДЕР, Г. Е. ЦАРЬКОВА

(Москва)

Если пластина произвольной формы обтекается свободномолекулярным потоком, то на каждый элемент ее поверхности одинаковое количество молекул приносит одинаковые импульсы и энергию. Поэтому все пластины данной площади, но произвольной формы обладают в свободномолекулярном потоке одинаковым сопротивлением, подъемной силой, и на них приходят равные потоки тепла.

При учете столкновений набегающих и отраженных молекул форма пластины имеет существенное значение, и поэтому пластины разной формы обладают различными аэродинамическими характеристиками.

Будем следовать теории первых столкновений [1]. Рассмотрим в потоке, близком к свободномолекулярному ($K \gg 1$), при больших скоростях ($M \gg 1$) плоские пластины, имеющие один характерный линейный размер. Предположим, что температура диффузно отраженных молекул порядка температуры невозмущенного потока и постоянна ($T_e \sim T_\infty$, $T_e = \text{const}$). Так как $V_e \ll V_\infty$, можно считать, что налетающие со скоростью V_∞ молекулы сталкиваются с неподвижными отраженными молекулами. Для справедливости теории первых столкновений в предположении, что столкновения между молекулами происходят по закону столкновения упругих шаров, необходимо дополнительное условие $M/K \ll 1$. При этом столкновениями между отраженными молекулами можно пренебречь, а плотность набегающих и отраженных молекул

кул в какой-либо точке при расчете числа столкновений надо полагать той же, что и в свободномолекулярном потоке.

При этих предположениях можно подсчитать импульс $P_{ij} ds_i ds_j$ и энергию $E_{ij} ds_i ds_j$, приносимые молекулами на элемент ds_i за счет столкновений с молекулами, отраженными от какого-либо другого элемента пластины ds_j , а для определения полного изменения импульса, приносимого на одну сторону пластины, просуммировать влияние всех элементов пластины

$$P = \iint P_{ij} ds_i ds_j = 1/2 \iint (P_{ij} + P_{ji}) ds_i ds_j \quad (1)$$

Варьируя (1) при фиксированной площади пластины

$$S = \int ds_i = \text{const} \quad (2)$$

получим условие экстремальности (точнее — стационарности).

Решая эту задачу обычным вариационным методом (четырёхмерная изопериметрическая задача со свободной границей), получим, что уравнения Эйлера выполняются тождественно, а вместо условия трансверсальности, которое получаем в одномерном случае, здесь имеет место равенство

$$J = \int (P_{ik} + P_{ki}) ds_k = \text{const} \quad (3)$$

элемент ds_i находится в произвольной точке границы пластины. Физически это ясно: условие стационарности кривой, ограничивающей пластину, заключается в том, что при малых изменениях границы пластины с сохранением ее площади (прибавление элемента ds_i и вычитание равного ему элемента ds_j) полный импульс (или энергия), приносимый молекулами на пластину, не изменится, т. е.

$$\delta P = 0 = \int (P_{ik} + P_{ki}) ds_k - \int (P_{jk} + P_{kj}) ds_k$$

что эквивалентно уравнению (3) ввиду произвольности точек i и j .

Преобразуем уравнение (3) к более удобной форме. Ниже будет показано, что

$$P_{ij} = P_{ij}(x_i - x_j, y_i - y_j) \sim [(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2]^{-1/2}$$

где (x_i, y_i) — координаты элемента ds_i .

Распространяя метод дифференцирования интегралов со слабой особенностью [2] на точки границы области, можно показать, что хотя производных $\partial J / \partial x_i$ и $\partial J / \partial y_i$ не существует, но существует производная

$$\frac{\partial J}{\partial x_i} + \frac{dy_i}{dx_i} \frac{\partial J}{\partial y_i} = \oint_{\Gamma} \left(\frac{dy_i}{dx_i} - \frac{dy_k}{dx_k} \right) (P_{ik} + P_{ki}) dx_k = 0 \quad (4)$$

При вычислении правой части (4) используется тот факт, что функции P_{ij} зависят от разности координат (x_i, y_i) и (x_k, y_k) и применяется формула Грина.

Рассмотрим сначала обтекание пластин, перпендикулярных набегающему потоку. В силу симметрии задачи, ясно, что одним из экстремумов будет круг, причем он будет соответствовать минимуму сопротивления и потока энергии, так как отраженные молекулы экранируют пластину [3, 4]. Другим экстремумом (максимумом) будет бесконечная пластина ограниченной площади, произвольно ориентированная в пространстве. Ее аэродинамические характеристики будут такими же, что и в свободномолекулярном потоке, так как экранный эффект у нее отсутствует, что нетрудно показать, вычисляя концентрацию отраженных молекул.

Перейдем к более сложному случаю — обтеканию пластин, расположенных под нулевым углом атаки.

В этом случае бесконечная пластина ограниченной площади имеет минимальные сопротивление и поток энергии.

Рассматривая столкновения молекул в элементе объема, найдем величины импульса и энергии, приносимые на пластину в результате столкновений в этом объ-

еме. Интегрируя по полупространству, найдем характеристики тангенциального и нормального импульса и энергии, приносимых из-за столкновений на элементы ds_i и ds_j

$$T_{ij} + T_{ji} = \frac{2}{V_\infty} (E_{ij} + E_{ji}) = k \frac{1 - |\cos \varphi|^5}{\sin^2 \varphi} \frac{1}{r} \quad (5)$$

$$N_{ij} + N_{ji} = k [1 + \frac{2}{3} \cos^2 \varphi] r^{-1}, \quad r = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2} \quad (6)$$

$$k = \frac{\rho_\infty V_\infty^2}{2} \frac{1}{\lambda_\infty} \left(\frac{T_\infty}{T_e} \right)^{1/2} \frac{1}{20 \sqrt{2} \pi}, \quad \lambda_\infty = \frac{1}{\sqrt{2} \pi \sigma^2 n_\infty}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y_i - y_j}{x_i - x_j}$$

Из равенств (5) и (6) видно, что на пластину, обладающую максимальным сопротивлением, приходит максимальный поток энергии, однако пластина той же площади с максимальной подъемной силой (одной стороны) имеет иную форму. Определение формы пластин, на которые приходят максимальные потоки энергии и нормального импульса, проводилось численно по следующей итерационной схеме:

$$\frac{dy^{n+1}}{dx} = \frac{dy^n}{dx} + \beta L_q(y^{*n}) \quad (q=1,2) \quad (7)$$

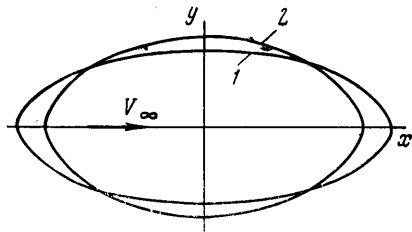
$$y^{n+1} = \int_0^x \frac{dy^{n+1}}{dx} dx + y^{n+1}(\alpha_n), \quad S_{n+1} = 4 \int_0^{\alpha_n} y^{n+1} dx \quad (8)$$

$$y^{*n+1} = y^{n+1} \sqrt{S_0/S_{n+1}}, \quad \alpha_{n+1} = \alpha_n \sqrt{S_0/S_{n+1}} \quad (0 \leq x \leq \alpha_k) \quad (9)$$

Здесь L_q — нелинейный интегральный оператор, стоящий в правой части уравнения (4) с ядром $E_{ik} + E_{ki}$ при $q = 1$ и ядром $N_{ik} + N_{ki}$ при $q = 2$; β — число, подбираемое так, чтобы итерации сходились; S_n — площадь пластины в незаконченной n -й итерации; α_n — пересечение кривой $y^n(x)$ с осью x при $x > 0$. В формулах (7)–(9) учтено, что оптимальная пластина имеет две оси симметрии — ось x , направленную вдоль по потоку, и ось y [5].

На фигуре приведены результаты расчетов. На пластину 1 приносится максимальный поток энергии (она же имеет максимальное сопротивление), на пластину 2 — максимальный нормальный импульс (на одну сторону).

Расчеты проводились с относительной погрешностью, меньшей 10^{-3} ; число β равнялось — 0,05; S_0 было выбрано равным $2,5\pi$. В обоих случаях требовалось не больше 40 приближений. В заключение отметим, что при выполнении соотношения $M/K \ll 1$ сопротивление, нормальный импульс и поток тепла за счет первых столкновений могут быть в R раз больше сопротивления и т. д. в свободномолекулярном потоке.



Поступило 3 IV 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Коган М. Н. Динамика разреженного газа. Изд-во «Наука», 1967.
2. Михлин С. Г. Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. Физматгиз, 1962.
3. Перепухов В. А. О сопротивлении плоской пластины в потоке сильно разреженного газа. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1961, т. 1, № 4.
4. Фридлендер О. Г. О сопротивлении плоской пластины, перпендикулярной гиперзвуковому потоку разреженного газа. ПМТФ, 1963, № 3.
5. Коган М. Н. Теорема обратимости для течений, близких к свободномолекулярным. Докл. АН СССР, 1962, т. 144, № 6.