

РАСЧЕТ ТЕЧЕНИЯ В СОПЛЕ ЛАВАЛЯ

У. Г. ПИРУМОВ

(Москва)

Рассматривается обратная задача теории сопла Лавалья, которая приводится к задаче Коши для уравнений газовой динамики; определяются линии тока и параметры течения по известному распределению скорости на оси симметрии.

Обратную задачу теории сопла Лавалья еще в 1908 г. рассматривал Мейер [1], который, разлагая потенциал скорости в ряд по степеням декартовых координат, построил дозвуковое и сверхзвуковое решения в окрестности центра сопла. Аналогичным методом Тейлор [2] построил поле течения, которое является дозвуковым, но имеет местные сверхзвуковые зоны в окрестности минимального сечения. Ф. И. Франкль [3] и С. В. Фалькович [4] исследовали течение в окрестности центра сопла в плоскости годографа. Их решение, так же как и решение Мейера, позволило получить представление о структуре трансзвукового потока в окрестности центра сопла.

Большой цикл работ по исследованию трансзвукового течения в окрестности центра сопла был выполнен благодаря использованию метода малых возмущений. Приближенное уравнение для трансзвукового потенциала скорости в физической плоскости, полученное в работах [3-6], было детально исследовано для плоского и осесимметричного случаев. В работе О. С. Рыжова [7] с использованием этого уравнения исследован вопрос об образовании ударных волн в окрестности центра сопла, и для плоского и осесимметричного случая сформулированы условия, при выполнении которых течение не будет содержать ударных волн. Однако ни одно из перечисленных выше решений обратной задачи теории сопла Лавалья не позволяет рассчитывать течения в дозвуковой и трансзвуковой частях сопел с большими градиентами газодинамических параметров по нормали к оси симметрии.

Из работ, посвященных численному расчету течения в дозвуковой части сопла Лавалья, следует отметить работу Я. Н. Алихашкина, А. П. Фаворского, П. И. Чущкина [8] и работу А. П. Фаворского [9], в которых методом интегральных соотношений решалась прямая задача для плоского и осесимметричного случаев.

В настоящей работе численно решена обратная задача теории сопла Лавалья. Предложена устойчивая разностная схема, позволяющая с высокой точностью рассчитывать дозвуковую, трансзвуковую и сверхзвуковую области течения. В результате расчетов получена серия сопел с прямолинейной и криволинейной поверхностями перехода, течение в которых значительно отличается от одномерного. Изучено поле течения в дозвуковой и трансзвуковой частях сопел. Получено несколько асимптотических решений и проведено сравнение этих решений с численным решением.

1. Постановка задачи и метод расчета. В настоящей работе рассматривается обратная задача теории сопла Лавалья. На оси симметрии задается аналитическое распределение скорости в дозвуковой, трансзвуковой и сверхзвуковой областях. Согласно теореме Коши — Ковалевской при аналитических начальных данных для уравнений газовой динамики в некоторой окрестности оси симметрии существует единственное решение задачи Коши. Постановка обратной задачи, которая является по существу задачей Коши, не содержит каких-либо принципиальных трудностей. Следует отметить, что в этом смысле обратная задача выгодно отличается от прямой задачи, для которой до настоящего времени строго не доказана единственность решения и не сформулированы условия безударности течения в трансзвуковой области даже для сопел, стенки которых выполнены в виде аналитических кривых [7].

Однако при численном решении задачи Коши возникают определенные трудности. В эллиптической области в общем случае задача Коши некорректна, хотя, если рассматривается класс аналитических функций, то в

ограниченной области задача становится корректной [10]. Тем не менее, даже при аналитических начальных данных в дозвуковой области сопла, где уравнения газовой динамики являются эллиптическими, при неудачно выбранной разностной схеме при решении задачи Коши чрезвычайно быстро возрастают ошибки округления, которые неизбежно возникают при численном решении. Поэтому для получения устойчивого решения необходимо выбрать такую разностную схему, при применении которой ошибки округления не превосходили бы существенно ошибок аппроксимации.

С другой стороны, в общем случае в гиперболической области соотношение шагов в разностной схеме должно быть таково, что область влияния аппроксимирующей системы не должна выходить за область влияния исходной системы дифференциальных уравнений [11]. Однако в классе аналитических функций соотношение шагов в разностной схеме может быть произвольным, так как в силу аналитичности начальных данных, нельзя изменить их на каком-либо участке, не изменив их во всей области аналитичности [12].

Система уравнений газовой динамики, описывающая безвихревое, изэнтропическое течение идеального газа с постоянным показателем адиабаты в переменных ψ (ψ — функция тока) и x , имеет вид [13]:

$$\frac{\partial y^{2j}}{\partial \psi} = \frac{2^j}{\rho u}, \quad \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{v}{u}, \quad \frac{\partial p}{\partial \psi} = -\frac{k}{y^j} \frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\rho = p^{1/k}, \quad u = \left(\frac{k+1}{k-1} - \frac{2p^{(k-1)/k}}{k-1} - v^2 \right)^{1/2} \quad (1.1)$$

Здесь u и v — проекции вектора скорости w на оси x и y декартовой системы координат, отнесенные к a_* — критической скорости звука; p , ρ — давление и плотность, отнесенные к давлению и плотности при $w = a_*$; k — отношение удельных теплоемкостей, а $j = 0$ или 1 для плоского или осесимметричного случая соответственно.

Запишем используемую в настоящей работе разностную схему, соответствующую системе (1.1). Пусть на n -м слое $\psi_n = \text{const}$ известны все параметры течения в i точках, в общем случае неравно отстоящих друг от друга ($i = 0, 1, \dots, M$). Тогда параметры на $(n+1)$ -м слое $\psi_{n+1} = \text{const}$ определяются по формулам:

$$[y_{i(n+1)}^{(v)}]^{2j} = y_{in}^{2j} + 2^{j-1} \Delta \psi \left[\frac{1}{(\rho u)_{in}} + \frac{1}{(\rho u)_{i(n+1)}^{(v-1)}} \right] \quad (1.2)$$

$$p_{i(n+1)}^{(v)} = p_{in} - \frac{1}{2} k \Delta \psi \left[\frac{1}{y_{in}^j} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_{in} + \frac{1}{[y_{i(n+1)}^{(v-1)}]^j} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)_{i(n+1)}^{(v-1)} \right] \quad (1.3)$$

$$v_{i(n+1)}^{(v)} = \frac{(\partial y / \partial x)_{i(n+1)}^{(v)}}{\sqrt{1 + [(\partial y / \partial x)_{i(n+1)}^{(v)}]^2}} \left[\frac{k+1}{k-1} - \frac{2[p_{i(n+1)}^{(v)}]^{(k-1)/k}}{k-1} \right]^{1/2} \quad (1.4)$$

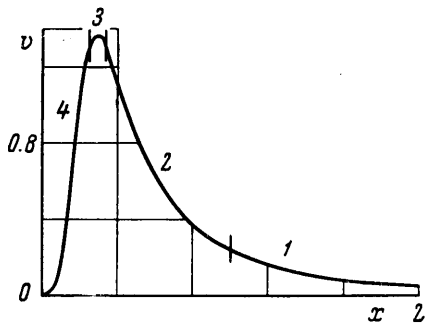
$$\rho_{i(n+1)}^{(v)} = [p_{i(n+1)}^{(v)}]^{1/k}, \quad u_{i(n+1)}^{(v)} = \left[\frac{k+1}{k-1} - \frac{2[p_{i(n+1)}^{(v)}]^{(k-1)/k}}{k-1} - [v_{i(n+1)}^{(v)}]^2 \right]^{1/2} \quad (1.5)$$

Здесь v — номер итерации, а $\Delta \psi$ — шаг интегрирования по нормали к линиям тока. Ошибка аппроксимации в этом направлении $(\Delta \psi)^2$.

Рассмотрим итерационный метод вычисления параметров по формулам (1.2) — (1.5). В первом приближении по формулам (1.2) и (1.3) во всех точках $(n+1)$ -го слоя рассчитываются величины $y^{(1)}_{i(n+1)}$ и $p^{(1)}_{i(n+1)}$, при

этом величины с верхним индексом (o) принимаются равными соответствующим величинам на n -м слое. Затем по найденным значениям u определяется $(\partial u / \partial x)_{i(n+1)}^{(1)}$ (метод вычисления $\partial u / \partial x$ и $\partial v / \partial x$ описан ниже) и по формуле (1.4) определяется $v^{(1)}_{i(n+1)}$. И, наконец, по формулам (1.5) определяются значения ρ и u . Аналогично вычисляются параметры во всех последующих итерациях.

В осесимметричном случае уравнение (1.3) на оси симметрии имеет устранимую особенность. В связи с этим в осесимметричном случае расчет начинается не с оси симметрии, как в плоском случае, а с некоторой линии тока, вблизи оси симметрии.



Фиг. 1

Обратимся к разностной записи производных $\partial v / \partial x$ и $\partial u / \partial x$. На фиг. 1 представлена типичная зависимость v от длины сопла. Как видно из этой фигуры, в области 1, соответствующей дозвуковому течению с малыми скоростями, изменение функции v невелико, и ее производные малы, напротив, области 2 и 4 являются областями больших градиентов функции v , а в области 3, в окрестности максимума, изменение v незначительно. Естественно в связи с этим при замене производной разностным отношением в области 1 выбирать

шаги разностной сетки в направлении оси x большими, так как из-за небольших градиентов в этой области ошибки аппроксимации будут невелики, так же как и ошибки округления из-за больших шагов разностной сетки. С другой стороны, в областях 2 и 4 шаг разностной сетки должен быть достаточно мал, так чтобы ошибки аппроксимации были невелики, при этом ошибки округления в этой области также невелики из-за больших значений производных. В области максимума, так же, как и в области 1, шаг разностной сетки должен быть выбран достаточно большим по аналогичным соображениям.

Таким образом, при расчете течения в эллиптической области целесообразно использовать разностную сетку с переменным шагом. Использование больших шагов разностной сетки в областях с малыми градиентами приводит к тому, что рост ошибок округления при численном решении задачи Коши для эллиптических уравнений оказывается практически незаметным и не сказывается на устойчивости счета. Для проверки отмеченных фактов были проведены специальные расчеты, в которых использовалось различное расположение точек на слое. При использовании разностной сетки с постоянным, но мелким шагом, рост ошибок округления в области 1 приводил к тому, что после небольшого числа шагов в направлении по нормали к линии тока счет становился неустойчивым. При использовании разностной сетки с постоянным, но большим шагом, таким, что рост ошибок округления в области 1 становился практически неощутимым, ошибки аппроксимации в областях 2 и 4 становились настолько значительными, что по-прежнему счет быстро становился неустойчивым. Только при использовании разностной сетки с малыми шагами в областях 2 и 4 и большими в областях 1 и 3 удавалось получить с высокой точностью устойчивое решение во всей области течения вплоть до особой точки в трансзвуковой области.

Для вычисления производных $\partial v / \partial x$ и $\partial u / \partial x$ можно пользоваться различными разностными схемами. Проведенные в настоящей работе специальные расчеты по выбору количества точек для расчета производных показали, что наиболее устойчивой является трехточечная схема. Так, при расчете по пятиточечной схеме при том же расположении точек на слое, что и при расчете по трехточечной схеме, неустойчивость счета проявлялась при значительно меньшем числе шагов по нормали к линиям тока, чем при

расчете по трехточечной схеме. Таким образом, производные по x рассчитывались по формуле

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_i = \varphi_{i-1} \frac{2x - (x_{i+1} + x_i)}{(x_{i-1} - x_i)(x_{i-1} - x_{i+1})} + \varphi_i \frac{2x - (x_{i+1} + x_{i-1})}{(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})} + \\ + \varphi_{i+1} \frac{2x - (x_i + x_{i+1})}{(x_{i+1} - x_{i-1})(x_{i+1} - x_i)}$$

где φ — любая из функций v и y . При расчете производных в крайних точках слоя x полагается равным x_{i-1} или x_{i+1} для левого и правого концов соответственно. В остальных точках слоя $x = x_i$.

Для определения максимального шага $\Delta\psi$ в трехточечной схеме с переменным шагом на слое была проведена серия расчетов с различными шагами $\Delta\psi$, равными $0.2 \cdot 10^{-1}$, $0.1 \cdot 10^{-1}$, $0.4 \cdot 10^{-2}$, $0.2 \cdot 10^{-2}$, $0.1 \cdot 10^{-2}$ и $0.5 \cdot 10^{-3}$. Оказалось, что с точностью 0.01% результаты расчета с шагами $0.2 \cdot 10^{-2}$, $0.1 \cdot 10^{-2}$ и $0.5 \cdot 10^{-3}$ совпадали между собой. Этот факт означает также, что ошибки округления практически не сказываются на результатах расчета. Была проведена также интегральная проверка точности расчета. С этой целью рассчитывалась разность импульсов между фиксированным сечением на левом конце и некоторыми текущими сечениями. Разность импульсов сравнивалась с рассчитанным вдоль линии тока интегралом сил давления, спроектированных на ось x . Во всех расчетах отличие этих величин составляло не более 0.05%.

Была сделана попытка рассчитать течение в дозвуковой части методом матричной прогонки [11]. В процессе расчетов оказалось, что для обеспечения условия устойчивости метода прогонки в дозвуковой области необходимо настолько значительно увеличивать шаг разностной сетки, что ошибки аппроксимации становятся чрезмерно большими, так что метод прогонки оказался не пригодным для расчета течения в дозвуковой области.

2. Некоторые асимптотические решения. Ниже приводятся некоторые асимптотические решения, которые в дальнейшем будут сравниваться с численным решением. Такое сравнение позволяет установить не только область сходности асимптотических решений, но и оценить точность численного решения, которое в определенном диапазоне должно совпадать с приближенным решением.

2.1°. Разложение в ряд по ψ в окрестности оси симметрии. Построим решение системы (1.1) в окрестности оси симметрии в виде рядов. В этом подпункте рассмотрено лишь осесимметричное течение, хотя нетрудно получить аналогичные результаты и для плоского случая. В силу симметрии течения относительно оси представим искомые параметры в виде

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\psi^n \quad (2.1)$$

где f — любая из функций p , ρ , u , $v/\sqrt{\psi}$, $y/\sqrt{\psi}$. Если подставить эти разложения в систему (1.1) и приравнять коэффициенты при одинаковых степенях ψ в левой и правой частях уравнений, то получим систему уравнений для определения функций p_n , ρ_n , v_n , u_n , y_n .

Ниже выписана система для определения первых и вторых коэффициентов рядов (2.1).

$$\rho_0 u_0 y_0^2 = 2, \quad u_0 \frac{dy_0}{dx} = v_0, \quad k \frac{dv_0}{dx} = -y_0 p_1, \quad u_1 \frac{dy_0}{dx} + u_0 \frac{dy_1}{dx} = v_1 \\ y_0(\rho_1 u_0 + \rho_0 u_1) + 4y_1 \rho_0 u_0 = 0 \quad (2.2)$$

$$k \frac{dv_1}{dx} = -(y_1 p_1 + 2y_0 p_2), \quad \frac{\rho_1}{\rho_0} = \frac{p_1}{k p_0}, \quad u_1 = \frac{1}{2u_0} \left[\frac{2p_1}{k \rho_0} + v_0^2 \right] \quad (2.3)$$

При решении обратной задачи на оси симметрии при $\psi = 0$ задается $u = u_0(x)$. Тогда

$$p_0 = \left[\frac{k+1}{2} - \frac{k-1}{2} u_0^2 \right]^{k/(k-1)}, \quad \rho_0 = p_0^{1/k}$$

Из (2.2) получаем, что

$$y_0 = \left[\frac{2}{u_0} \left(\frac{k+1}{2} - \frac{k-1}{2} u_0^2 \right)^{1/(1-k)} \right]^{1/2}, \quad v_0 = \frac{y_0}{2} \frac{u_0^2 - 1}{1 - u_0^2(k-1)/(k+1)} \frac{du_0}{dx} \quad (2.4)$$

$$p_1 = - \frac{k}{2[1 - u_0^2(k-1)/(k+1)]} \left\{ \frac{(du_0/dx)^2}{1 - u_0^2(k-1)/(k+1)} \left[\frac{(u_0^2 - 1)}{2u_0} + \frac{4u_0}{k+1} \right] + \right.$$

$$\left. + (u_0^2 - 1) \frac{d^2 u_0}{dx^2} \right\}$$

Аналогичным образом из (2.3) можно определить $v_1(x)$, $y_1(x)$, $p_2(x)$. Аналитические выражения для этих величин, так же как и для $y_2(x)$, были получены, но здесь не приводятся из-за громоздкости формул.

Формулы (2.4) были использованы для расчета близлежащей к оси линии тока, от которой начиналось численное интегрирование системы (1.1). При помощи рядов (2.1) можно рассчитывать в окрестности оси симметрии течение как в сверхзвуковой, так и в дозвуковой областях. Это решение будет в некотором смысле обобщением решения Мейера.

Однако область сходимости рядов (2.1) ограничена и, как показывает сравнение с численным решением (смотри следующий раздел), особенно мала в трансзвуковой области течения. Поэтому указанное решение нельзя использовать для расчета областей, достаточно удаленных от оси симметрии.

2.2°. Разложение в ряд по x в окрестности прямолинейной звуковой линии. Детальное исследование течения в окрестности прямолинейной звуковой линии было выполнено Л. В. Овсянниковым [14]. Результаты, изложенные в этом подпункте, повторяют некоторые результаты Л. В. Овсянникова. Здесь для осесимметричного течения уравнения газовой динамики рассматриваются в цилиндрических координатах. Для приближенного решения используется уравнение отсутствия вихри

$$du / dy = dv / dx \quad (2.5)$$

и уравнение неразрывности

$$\left[\frac{k+1}{2}(1-u^2) - \frac{k-1}{2}v^2 \right] \frac{\partial u}{\partial x} + \left[\frac{k+1}{2}(1-v^2) - \frac{k-1}{2}u^2 \right] \frac{\partial v}{\partial y} +$$

$$+ 2uv \frac{\partial v}{\partial x} + \left[\frac{k+1}{2} - \frac{k-1}{2}(u^2+v^2) \right] \frac{v}{y} = 0 \quad (2.6)$$

В окрестности прямолинейной звуковой линии, на которой $u = 1$ и $v = 0$, естественно искать решение уравнений (2.5) и (2.6) в виде

$$u = 1 + u_1(y)x + u_2(y)x^2 + u_3(y)x^3 + \dots + u_n(y)x^n + \dots$$

$$v = v_1(y)x + v_2(y)x^2 + v_3(y)x^3 + v_4(y)x^4 + \dots + v_n(y)x^n + \dots \quad (2.7)$$

После подстановки рядов (2.7) в уравнения (2.5) и (2.6) и приравнивания коэффициентов при нулевой и первой степенях x в левой и правой частях этих уравнений нетрудно получить, что $v_1(y) \equiv 0$, $u_1(y) \equiv 0$, $v_2(y) \equiv 0$. Эти условия являются известными условиями Гертлера [15], которые необходимы и достаточны для того, чтобы звуковая линия была прямолинейной. Приравнивая коэффициенты при других степенях x , получим

$$\frac{du_2}{dy} = 3v_3, \quad -6(k+1)u_2^2 + \frac{1}{y} \frac{du_2}{dy} + \frac{d^2 u_2}{dy^2} = 0 \quad (2.8)$$

$$\frac{du_3}{dy} = 4v_4, \quad \frac{d^2 u_3}{dy^2} + \frac{1}{y} \frac{du_3}{dy} - 20(k+1)u_3 u_2 = 0 \quad (2.9)$$

$$\frac{du_4}{dy} = 5v_5, \quad \frac{dv_5}{dy} = 6(k+1)u_2 u_4 + 3(k+1)(2k-1)u_2^3 + 6v_3^2 - \frac{v_5}{y} \quad (2.10)$$

и т. д.

Пусть на оси симметрии в окрестности прямолинейной звуковой линии со стороны дозвуковой части при $x > 0$ задано распределение скорости в виде

$$u = 1 + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + \dots + a_nx^n + \dots \quad (2.11)$$

Тогда граничные условия будут следующими: для системы (2.8)

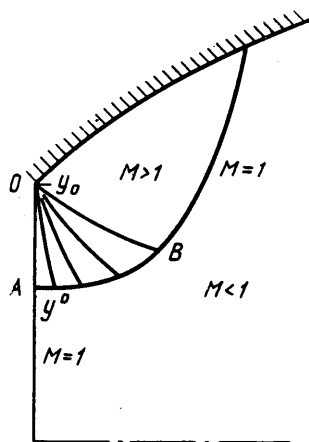
$$du_2 / dy = 0, \quad u_2 = a_2 < 0 \quad \text{при } y = 0$$

для системы (2.9)

$$du_3 / dy = 0, \quad u_3 = a_3 \quad \text{при } y = 0$$

для системы (2.10)

$$du_4 / dy = 0, \quad u_4 = a_4 \quad \text{при } y = 0$$



Фиг. 2

Система уравнений (2.8) — (2.10) при $a_2 \neq 0$ в осесимметричном случае не интегрируется в замкнутом виде. Поэтому для распределения скорости на оси, заданного в виде $u = u_\infty + (1 - u_\infty)/(1 + Ax^2)$ для $u_\infty = 0.1$ и $A = 10$, эта система была проинтегрирована численно и вычислены значения $u_2(y)$, $u_4(y)$, $u_6(y)$ и $v_3(y)$, $v_5(y)$, $v_7(y)$; функции u с нечетными номерами и функции v с четными номерами равны нулю.

При некотором значении $y = y^0$ функция $u_2(y)$ обращается в нуль и затем меняет знак, становясь положительной; а при некотором $y = y_0$ функция $u_2(y)$ обращается в бесконечность. Перемена знака у функции $u_2(y)$ означает, что помимо прямолинейной звуковой линии в точке, где $u_2(y) = 0$, возникает еще одна звуковая линия, начинающаяся от точки $y = y^0$ прямолинейной звуковой линии и простирающаяся вверх по потоку от прямолинейной звуковой линии в сторону дозвуковой зоны [14]. При этом течение между прямолинейной и криволинейной звуковыми линиями сверхзвуковое (фиг. 2). В окрестности точки $y = y_0$, в которой функция $u_2(y)$ обращается в бесконечность, решение второго уравнения (2.8) отыскивается в виде [14, 7]

$$u_2(y) = \frac{d_0}{(y - y_0)} + \frac{d_1}{(y - y_0)^2} + d_2 + d_3(y - y_0) + d_4(y - y_0)^2 + d_5(y - y_0)^3 + d_6(y - y_0)^4 \ln(y - y_0) + C_2(y - y_0)^4 + \dots \quad (2.12)$$

Подставляя соотношение (2.12) в уравнение (2.8) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях $y - y_0$, можно определить коэффициенты d_i . В частности,

$$d_0 = \frac{1}{k + 1}, \quad d_1 = -\frac{d_0}{5y_0}$$

Значения y_0 и C_2 определялись из условия стыковки асимптотического решения (2.12) с решением, получающимся при численном интегрировании уравнения (2.8). Из соотношений (2.11) и (2.12) следует, что точка $x = 0$, $y = y_0$ является угловой, и в этой точке имеет место течение Прандтля — Майера [14]. Для распределения скорости по оси $u = u_\infty + (1 - u_\infty)/(1 + Ax^2)$ при $u_\infty = 0.1$ и $A = 10$ имеем $y_0 = 0.725$.

В местной сверхзвуковой зоне в окрестности прямолинейной звуковой линии возникает веер волн сжатия, начинающийся с некоторой характеристики OB (фиг. 2) и заканчивающийся прямолинейной характеристикой OA , совпадающей со звуковой линией.

2.3°. *Решение обратной задачи теории сопла Лавалля для несжимаемой жидкости.* При малых скоростях течение в дозвуковой части сопла можно рассматривать как течение несжимаемой жидкости. Течение несжимаемой жидкости описывается уравнениями

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + j \frac{1}{y} \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (2.13)$$

Для обратной задачи граничные условия $v = 0$ и $u = u_0(x)$ при $y = 0$. В плоском случае, когда второе из уравнений (2.13) является уравнением Лапласа, решение обратной задачи имеет вид

$$u = \operatorname{Re} [u_0(x + iy)], \quad v = \operatorname{Re} [iu_0(x + iy)]$$

В осесимметричном случае заменой $y_1 = iy$ сводим второе из уравнений (2.13) к уравнению Дарбу, решение которого после несложных преобразований можно привести к виду [16]

$$u = \operatorname{Re} \frac{1}{\pi} \int_{-1/2\pi}^{1/2\pi} F(x - iy \sin t) dt$$

где $F(x - iy \sin t)$ — произвольная функция. Тогда в действительной плоскости решение обратной задачи имеет вид

$$\begin{aligned} u &= \operatorname{Re} \left[\frac{1}{\pi} \int_{-1/2\pi}^{1/2\pi} u_0(x - iy \sin t) dt \right] \\ v &= \operatorname{Re} \left[-\frac{i}{\pi} \int_{-1/2\pi}^{1/2\pi} u_0(x - iy \sin t) \sin t dt \right] \end{aligned} \quad (2.14)$$

Течение несжимаемой жидкости было рассчитано для осесимметричного случая и распределения скорости по оси, заданного в виде

$$u_0 = u_\infty + (1 - u_\infty) / (1 + Ax^2), \quad u_\infty = 0.1, \quad A_1 = 10$$

Для этого распределения скорости в плоскости $x = 0$ при $y = \sqrt{1/A}$ скорость u обращается в бесконечность, т. е. точка $x = 0$, $y = \sqrt{1/A}$ будет угловой. При произвольном распределении скорости по оси угловая точка для течения несжимаемой жидкости возникает в полюсах продолженной в комплексную плоскость начальной функции. Для течения сжимаемой жидкости столь просто установить координаты особой точки не удастся, хотя, как показывают результаты расчетов, такая точка всегда существует.

2.4°. *Решение приближенного уравнения для потенциала трансзвукового течения.* Приближенное уравнение для потенциала трансзвукового течения получено в работах [3-6]. При выводе этого уравнения предполагалось, что скорость газа по величине близка к скорости звука, а угол между направлением скорости и осью x мал. Получено точное решение этого уравнения, которое является также первым членом ряда, построенного Мейером вблизи центра сопла. В работе [17] для плоского случая в окрестности центра сопла было проведено сравнение точного решения, полученного с использованием решения Ф. И. Франкля [9], и приближенного трансзвукового решения. Было показано, что точные и приближенные значения координат звуковой линии и линии $\theta = 0$ отличаются примерно на 10-20%. Показано также, что точные и приближенные значения параметров течения, например, угла наклона скорости на звуковой линии, числа M на линии $\theta = 0$ уже при небольших расстояниях от оси различаются существенно. Поэтому приближенное трансзвуковое решение [3-6] по существу не пригодно для расчета течений в соплах в практически интересных случаях. Только в соплах, в которых течение в окрестности критического сечения незначительно отличается от одномерного, это решение можно использовать для расчета, как предполагалось при выводе приближенного уравнения для потенциала трансзвукового течения. В настоящей работе (см. 3.2°) аналогичные результаты получены для осесимметричного случая.

2.5°. *Асимптотическое решение в окрестности бесконечно удаленной точки в дозвуковой области.* Для прямой и обратной задачи построим асимптотическое решение в окрестности бесконечно удаленной точки системы (1.1) для осесимметричного случая. Представим искомые параметры в виде

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(\psi) x^{-n} \quad (2.15)$$

где f — любая из функций p , ρ , u , y и v . Граничные условия для обратной задачи имеют вид

$$y = v = 0, \quad u = u_\infty + \frac{u_1}{x} + \frac{u_2}{x^2} + \dots + \frac{u_n}{x^n} + \dots \quad \text{при } \psi = 0$$

Для прямой задачи граничные условия имеют вид

$$y = v = 0 \quad (\psi = 0)$$

$$y = f_0 + \frac{f_1}{x} + \frac{f_2}{x^2} + \dots + \frac{f_n}{x^n} \dots, \quad \frac{u}{v} = y' = -\frac{f_1}{x^2} - 2\frac{f_2}{x^3} - \dots - \frac{nf_n}{x^{n+1}} \quad (\psi = \psi_k)$$

В прямой задаче ψ_k — значение расхода на контуре сопла — должно задаваться в зависимости от режима течения, но ψ не должно превышать критического значения, при котором течение в дозвуковой части не зависит от противодавления.

Подставляя ряды (2.15) в систему (1.4) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях x , получим систему уравнений для определения функций $y_n(\psi)$, $p_n(\psi)$, $v_n(\psi)$, $\rho_n(\psi)$, $u_n(\psi)$, которая разрешается в замкнутом виде. В частности, имеем

$$v_0 = v_1 = 0, \quad p_0 = \text{const}, \quad p_1 = \text{const}, \quad p_2 = \text{const}$$

$$y_0 = \left(\frac{2\psi}{\rho_\infty u_\infty} \right)^{1/2}, \quad y_1 = -\frac{1}{k} \left(\frac{\psi}{2\rho_\infty u_\infty} \right)^{1/2} \frac{p_1 (M_\infty^2 - 1)}{\rho_\infty M_\infty^2} \quad (2.16)$$

Для обратной задачи неизвестные константы p_0 , p_1 и p_2 определяются при помощи граничных условий по известным u_∞ и u_1 . Имеем

$$p_0 = p_\infty = \frac{\pi(u_\infty)}{\pi(1)}, \quad \pi(u_\infty) = \left(1 - \frac{k-1}{k+1} u_\infty^2 \right)^{k/(k-1)}$$

$$p_1 = -k\rho_\infty u_\infty u_1, \quad p_2 = \frac{1}{k} \frac{p_1^2}{\rho_\infty} - \frac{k\rho_\infty}{2} (2u_\infty u_2 + u_1^2)$$

$$p = p_\infty + \frac{p_1}{x} + \frac{p_2}{x^2} + \dots \quad (2.17)$$

Из формул (2.16) и (2.17) следует, во-первых, что первые три члена асимптотического разложения функции p не зависят от ψ (зависимость от ψ появляется в следующих членах разложения, которые можно получить аналогичными методами), а во-вторых, что при уменьшении x , т. е. в направлении движения газа в окрестности бесконечно удаленной точки, давление на всех линиях тока может только уменьшаться ($p_1 < 0$; $p_2 < 0$, если $p_1 = 0$ и т. д.). Последнее означает, что положительный градиент давления в месте сопряжения цилиндрического и сужающегося участков в дозвуковой части сопла должен сопровождаться и участком минимума давления. Такой характер распределения наблюдался экспериментально и получен в результате расчетов, проведенных в настоящей работе.

В прямой задаче константы p_0 и p_1 определяются следующим образом. При заданном ψ_k из граничных условий и формул (2.16) находим

$$\rho_\infty u_\infty = q(u_\infty) = 2\psi_k / f_0, \quad q(u_\infty) = u_\infty [^{1/2}(k+1) - ^{1/2}(k-1)u_\infty^2]^{(k-1)}$$

$$p_\infty = \frac{\pi(u_\infty)}{\pi(1)}, \quad p_1 = -\frac{\rho_\infty f_1 k M_\infty^2}{M_\infty^2 - 1} \sqrt{\frac{2\rho_\infty u_\infty}{\psi_k}} \quad (2.18)$$

Из этой формулы следует, что если $f_1 < 0$ (т. е. если дозвуковая часть сужающаяся), то на всех линиях тока $p_1 < 0$, и давление на всех линиях тока в окрестности бесконечно удаленной точки уменьшается в направлении движения газа, т. е. имеет место такой же характер изменения давления, как и в обратной задаче.

Следует отметить, что в прямой задаче при заданном уравнении контура сопла параметры течения (см. формулы (2.18)) единственным образом определяются одним параметром ψ_k . (Это положение остается, если учесть и все последующие члены разложения.) Этот факт физически достаточно очевиден и свидетельствует о том, что при численном решении прямой задачи с использованием асимптотического разложения в окрестности бесконечно удаленной точки можно варьировать лишь один параметр ψ_k . Отметим, что асимптотическое поведение дозвукового потока на бесконечности применительно к внешним задачам рассмотрено в работе [18].

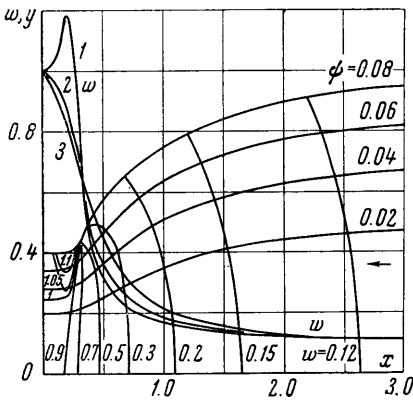
3. Результаты расчетов. В настоящем разделе приведены результаты расчета осесимметричного течения в дозвуковой, трансзвуковой и сверхзвуковой областях, полученные при численном решении обратной задачи с использованием трехточечной схемы с переменным шагом на слое. Проведено сравнение с приближенными решениями, описанными в предыдущем разделе. Отдельно проанализированы течения с прямолинейной и криволинейной поверхностями перехода.

3.1°. *Сопло Лавала с прямолинейной поверхностью перехода.* Для обеспечения прямолинейной звуковой линии необходимо и достаточно, чтобы $dw/dx = 0$ при $w = 1$ [15]. В связи с этим по оси сопла были заданы следующие распределения скорости

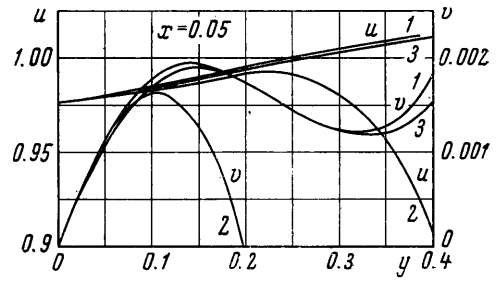
$$w = w_{\infty} + \frac{1 - w_{\infty}}{1 + Ax^2}, \quad w = w_{\infty} + \frac{1 - w_{\infty}}{1 + Ax^3}, \quad w_{\infty} = 0.1, \quad A = 10$$

Для первого распределения скорости были проведены численные расчеты поля течения и, кроме того, получены приближенные решения, описанные в предыдущем разделе. Расчеты проводились по формулам (1.2) — (1.5) с $\Delta\psi = 0.2 \cdot 10^{-2}$, а на каждом слое $\psi = \text{const}$ узлы разностной сетки располагались в точках $x = 0-0.16$ ($h = 0.02$), $0.2-0.6$ ($h = 0.05$), $0.67, 0.76, 0.88, 1.00, 1.15, 1.40, 1.70, 2.00, 2.25, 2.50, 2.75, 3.00$.

Результаты расчетов представлены на фиг. 3. На фиг. 3 представлено семейство линий тока и линии $w = \text{const}$. Каждая из этих линий тока может быть выбрана в качестве контура сопла. Как видно из этой фигуры, течение заметно отличается от одномерного, особенно при больших значениях скорости. В окрестности прямолинейной звуковой линии, расположенной в плоскости $x = 0$, при $y > 0.25$ возникает



Фиг. 3



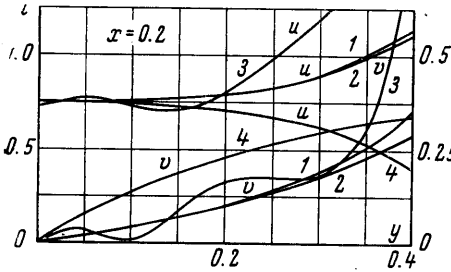
Фиг. 4

местная сверхзвуковая зона и вторая звуковая линия. Течение в этой зоне будет безударным. Между второй звуковой линией и прямолинейной звуковой линией газ первоначально разгоняется, а затем тормозится (фиг. 2), что приводит к появлению в этой области положительного градиента давления, который может привести к отрыву пограничного слоя. В окрестности прямолинейной звуковой линии, линии тока практически параллельны оси. На фиг. 3 представлена также зависимость скорости $w = \sqrt{u^2 + v^2}$ от длины на линии тока $\psi = 0.06$ (кривая 1). На этой же фигуре нанесены значения w , рассчитанные по одномерной теории (кривая 2), и зависимости w от длины на оси (кривая 3). Из этой фигуры следует, что если на линиях тока, достаточно близких к оси сопла ($\psi = 0.02$), течение близко к одномерному, то на линиях тока, удаленных от оси симметрии, течение значительно отличается от одномерного, особенно при больших значениях скорости. При малых значениях скорости течение также близко к одномерному. Из этой фигуры следует, что для обеспечения прямолинейной звуковой линии окрестность критического сечения должна быть полой.

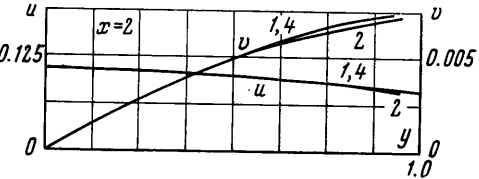
Были проведены расчеты поля течения для различных значений показателя адиабаты. В результате расчетов показано, что параметры течения в дозвуковой области очень слабо зависят от k .

На фиг. 4—6 представлено сравнение полученного в настоящей работе численного решения (кривая 1) с приближенным решением, полученным в результате разложения параметров течения в ряд по ψ в окрестности оси симметрии (кривая 2), с решением, полученным в результате разложения решения в ряд по x в окрестности прямолинейной звуковой линии (кривая 3), и с решением обратной задачи для несжимаемой жидкости (кривая 4). При этом в разложениях (2.1) учитывались три члена, а составляющие скорости при тении несжимаемой жидкости рассчитывались по формулам (2.14). Из фиг. 4—6 следует, что при малых значениях $x \approx 0.05$ разложение в ряд по ψ расходится уже при небольших значениях y (этот факт можно установить и аналитически). При больших значениях x радиус сходимости рядов (2.11) увеличивается, а при $x > 1$ результаты точного и приближенного решений практически совпадают. Таким образом, приближенное решение, полученное в

результате разложения параметров в ряд по ψ в окрестности оси симметрии, может быть использовано для расчета течения только при достаточно малых дозвуковых скоростях. Из фиг. 4—6 следует также, что при малых значениях x , при которых эффекты сжимаемости существенны, решение обратной задачи для несжимаемой жидкости не может быть использовано для описания течения сжимаемой жидкости. При больших значениях x , когда скорости движения газа невелики ($w < 0.3$), параметры течения сжимаемой и несжимаемой жидкостей практически не отличаются. Представленное на фиг. 4—6 сравнение с решением, полученным в результате разложения в ряд по x в окрестности прямолинейной звуковой линии, показывает, что при $x = 0.05$ соответствие между точным и приближенным решениями очень хорошее. При $x \geq 0.2$ ряды (2.7) расходятся.



Фиг. 5



Фиг. 6

Для распределения скорости по оси $w = w_\infty + (1 - w_\infty) / (1 + Ax^3)$ линии тока в окрестности прямолинейной звуковой линии параллельны оси на участке, еще более протяженном, чем в предыдущем случае. И в этом случае в поле течения возникает местная сверхзвуковая зона, однако вторая звуковая линия имеет общую точку с прямолинейной звуковой линией на бесконечности.

3.2°. *Сопло Лавы с криволинейной поверхностью перехода.* Когда градиент скорости в центре сопла отличен от нуля, звуковая линия будет криволинейной, и расчет дозвуковой и сверхзвуковой областей должен проводиться совместно. При этом из-за аналитичности распределения скорости по оси область расчета со стороны сверхзвуковой части не обязательно должна быть ограничена предельной характеристикой второго семейства.

Распределение скорости по оси задается в дозвуковой и сверхзвуковой областях. Были проведены расчеты поля течения для следующих распределений скорости по оси:

$$w = 1 + \frac{(1 - w_\infty)}{\pi} \operatorname{arctg}(e^{ax} - e^{-bx}) \quad (3.1)$$

$$w = 1 + \frac{(1 - w_\infty)(\bar{w}_\infty - 1)(e^{-x/b} - 1)}{(1 - w_\infty)e^{-x/b} + (\bar{w}_\infty - 1)} \quad (3.2)$$

Результаты расчета для распределения (3.1) с $w_\infty = 0.1$, $a = 2.3$, $b = 0.2$ представлены на фиг. 7. На фиг. 7 представлено семейство линий тока, линии $w = \text{const}$, звуковая линия (черными кружочками) и линия $\theta = 0$ (светлыми кружочками). Как видно из этой фигуры, звуковая линия и линия $\theta = 0$ отклоняются вверх по потоку от центра сопла так, что звуковая точка располагается за минимальным сечением сопла.

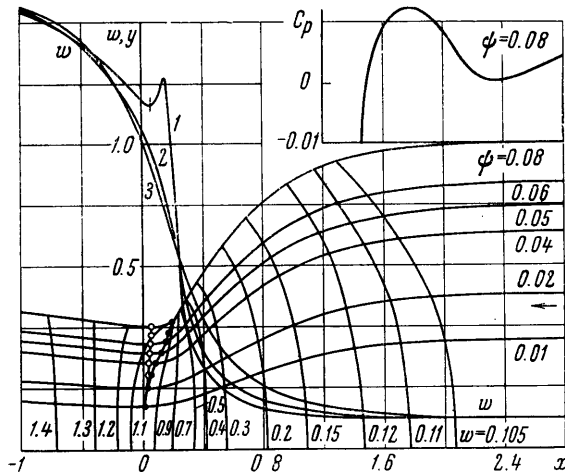
На фиг. 7 представлена также зависимость скорости w от длины на линии тока с $\psi = 0.08$ (кривая 1). На фиг. 7 представлены значения w , рассчитанные по одномерной теории (кривая 2) и зависимость w от длины по оси (кривая 3). Из этой фигуры следует, что рассчитанное течение заметно отличается от одномерного, особенно в диапазоне скоростей от 1.2 до 0.5. Для этого распределения скорости по оси течения в сверхзвуковой области при $w > 1.2$ близко к одномерному. Хотя при малых дозвуковых скоростях скорость w можно с небольшой погрешностью рассчитывать по одномерной теории, одномерная теория не позволяет естественно исследовать тонкие детали течения, например возникновение положительных градиентов давления в этой области (фиг. 7).

Представленное на фиг. 7 распределение скорости на линии тока $\psi = 0.08$ имеет две особенности. Во-первых, в трансзвуковой области за линией перехода изменение скорости происходит не монотонно. Это означает, что резкое изменение формы купура в трансзвуковой области может привести к образованию положительных градиентов давления и в этой области. Во-вторых, в области малых дозвуковых ско-

ростей, где контур сопла практически прямолинеен и параллелен оси, также возникает зона с положительным градиентом давления, которой, в соответствии со сказанным в пункте 2.5^о, предшествует область, в которой давление уменьшается.

На фиг. 7 представлена зависимость коэффициента давления $C_p = 2(p - p_\infty) / (\rho_\infty v_\infty^2)$ от длины сопла, максимальное значение которого для рассматриваемого случая равно 0.01. Следует особо подчеркнуть, что в результате расчетов сопел с прямолинейной звуковой линией, так же как и сопел с криволинейной звуковой линией, получено, что при некоторых формах трансзвуковой части контура сопла в этой области возможно возникновение областей с положительным градиентом давления.

Результаты расчета для распределения (3.2) с $\bar{w}_\infty = 1.9$, $w_\infty = 0.1$, $1/b = 3.5$ представлены на фиг. 8. Характерным для этого распределения скорости будет то, что в дозвуковой части при $x \geq 1.5$ линии тока практически прямолинейны и параллельны оси. В сверхзвуковой области, в отличие от предыдущего случая, течение значительно отличается от одномерного. На фиг. 8 представлена также зависимость скорости от длины на линии тока с $\psi = 0.06$ (кривая 1). Из этих фигур и из результатов расчетов следует, что на всех линиях тока, начиная с линии тока с $\psi = 0.03$, в



Фиг. 7

начале цилиндрического участка контура сопла имеется положительный градиент давления, величина которого увеличивается по мере увеличения длины цилиндрического участка. Так, на контуре с $\psi = 0.06$ максимальное значение $C_p = 0.2$, а на контуре с $\psi = 0.08$ оно равно 0.5. Следует отметить, что координаты контура сопла с $\psi = 0.06$ очень близки к координатам контура дозвуковой части сопла, у которого окрестность критического сечения со стороны дозвуковой части сопла выполнена в виде дуги окружности с радиусом $R_2 = 1.6r_*$, к которой пристраивается конический участок с углом $\theta_{\delta, \kappa} = 35^\circ$, сопрягающимся радиусом $R_1 = r^o$ с цилиндрической частью (фиг. 8).

Из результатов расчетов, представленных в этом параграфе, следует, что на цилиндрическом участке дозвуковой части сопла, как правило, возникает положительный градиент давления. Положительный градиент давления в этой области может быть устранен, если использовать контуры, которые достаточно полого выходят на заданный радиус входа в дозвуковую часть сопла. Так, на контуре сопла, соответствующем линии тока с $\psi = 0.05$ для распределения скорости (3.1), давление монотонно уменьшается по всей длине сопла, и положительный градиент давления не возникает ни в трансзвуковой, ни в дозвуковой областях.

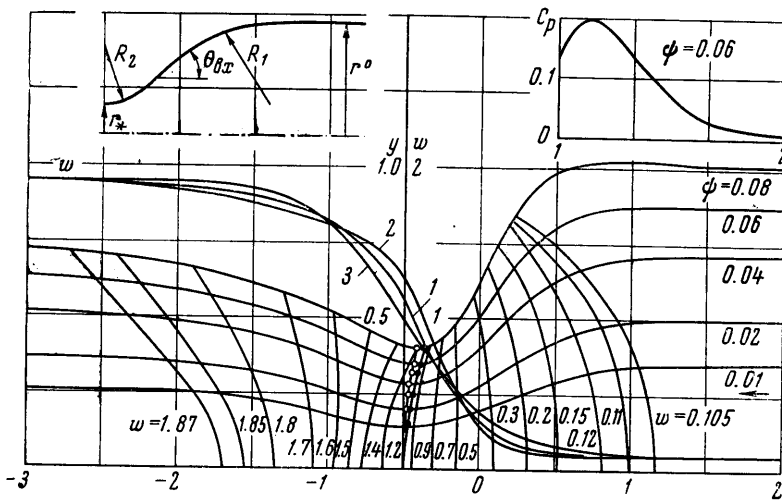
Предложенный в настоящей работе метод позволяет с высокой точностью рассчитывать течение как в дозвуковой, так и в сверхзвуковой частях сопла. Сверхзвуковую часть сопла можно рассчитать и методом характеристик, если известны параметры течения на некоторой начальной характеристике в трансзвуковой области. Метод, предложенный в настоящей работе, выгодно отличается от метода характеристик тем, что по единой схеме одновременно рассчитываются дозвуковая и сверхзвуковая части сопла.

Кроме того, расчет по предложенной схеме всего поля течения занимает 10—15 мин на ЭВМ «М-20», в то время как расчет сверхзвукового участка сопла по ме-

тому характеристик занимает 1—2 час. С использованием приближенного трансзвукового решения были рассчитаны координаты звуковой линии, линии $\theta = 0$, а также составляющая скорости на линии $\theta = 0$ и составляющая скорости v на линии $w = 1$, соответствующие распределение скорости (3.1). В результате расчетов было получено, что при $y > 0.1$ приближенное решение дает значительную ошибку при расчете составляющих скорости. Координаты линии $\theta = 0$ и звуковой линии рассчитываются достаточно точно до значения $y \approx 0.3$.

Во всех случаях на некоторой линии тока расчет прерывался в связи с образованием в трансзвуковой области угловых точек. Так как в безударном течении угловая точка не может существовать на жидкой линии тока, то из этой точки выходит ударная волна, распространяющаяся вниз по течению. Как правило, ударные волны образовывались на тех линиях тока, на которых производная скорости в центре сопла $d\lambda/d\bar{x}$ (\bar{x} — отношение координаты x к радиусу критического сечения) превышает некоторое предельное значение $(d\lambda/d\bar{x})^*$.

Значение $(d\lambda/d\bar{x})^*$ было определено из результатов проведенного А. А. Сергиенко экспериментального измерения по оси сопла распределения скорости, возникающего при обтекании угловых точек. Значения $(d\lambda/d\bar{x})^*$ по этим данным равны $\sim 0.6-0.7$ для осесимметричного случая. В плоском случае это значение ~ 0.5 [17].



Фиг. 8

В результате расчетов были получены примерно те же значения $(d\lambda/d\bar{x})^*$. Таким образом, не существует безударных течений с $(d\lambda/d\bar{x}) > (d\lambda/d\bar{x})^*$, в то время как при $(d\lambda/d\bar{x}) < (d\lambda/d\bar{x})^*$ возможно существование как безударных течений, так и течений с ударными волнами. Так, даже при $d\lambda/d\bar{x} = 0$ в потоке образуется угловая точка (2.2°).

В координатах ψ, x , использованных в настоящей работе, удобно проводить расчеты многослойных течений с различными физическими свойствами. Такой расчет можно провести в рамках идеальной жидкости без учета смешения слоев, при этом полные температуры, полные давления и показатели адиабаты в слоях могут быть различны. Пусть до некоторой линии тока $\psi = \psi_p$ газ имеет показатель адиабаты $k = k_1$ и полное давление p_{01} , а начиная с этой линии тока показатель адиабаты $k = k_2$ и полное давление p_{02} . На линии тока $\psi = \psi_p$ оба потока должны иметь одинаковые углы наклона скорости и одинаковые значения статического давления.

В связи с этим на линии тока $\psi = \psi_p$ должны быть выполнены соотношения

$$p_2 = \left(\frac{k_2 + 1}{2} \right)^{k_2/(k_2-1)} \sigma \left(1 - \frac{k_1 - 1}{k_1 + 1} w_1^2 \right)^{k_1/(k_1-1)}, \quad \rho_2 = p_2^{1/k_2}$$

$$v_2 = \frac{v_1}{w_1} \left[\frac{k_2 + 1}{k_2 - 1} - 2 \frac{p_2^{(k_2-1)/k_2}}{k_2 - 1} \right]^{1/2}, \quad u_2 = u_1 \frac{v_2}{v_1} \quad \left(\sigma = \frac{p_{01}}{p_{02}} \right)$$

После замены на линии $\psi = \psi_p$ параметров с индексами 1 на параметры с индексами 2, расчет продолжается по формулам (1.2)—(1.5).

Предложенный в работе метод может быть использован для расчета равновесных и неравновесных течений.

Автор благодарит Г. Д. Владимирову за составление большого числа программ и проведение расчетов на ЭЦВМ «М-20».

Поступило 19 XI 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Meyer Th. Ueber zweidimensionale Bewegungsvorgänge in einem Gas das mit Überschallgeschwindigkeit strömt, *Forschung neft*, 72, 1908.
2. Taylor G. I. The Flow of Air at High Speed past Curved Surfaces, Great Britain Aeronautical Research Committee Reports and Memoranda, 1930, No. 1381.
3. Франкль Ф. И. К теории сопел Лавалья. Изв. АН СССР. Сер. матем., 1945, т. 9, № 5.
4. Фалькович С. В. К теории сопел Лавалья. ПММ, 1946, т. 10, вып. 4.
5. Von Karman Th. The Similarity Law of Transonic Flow. *J. Mathem. and Phys.*, 1947, 26 p. 182—190. (Русск. перев.: Сб. «Газовая динамика». Изд. иностр. лит., 1950, стр. 41).
6. Гудерлей К. Г. Теория околосвуковых течений. Изд. иностр. лит., 1960.
7. Рыжов О. С. Исследование трансзвуковых течений в соплах Лавалья. Тр. ВЦ АН СССР, 1965.
8. Алихашкин Я. И., Фаворский А. П., Чушкин П. И. О расчете течения в плоском сопле Лавалья. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1963, т. 3, № 6.
9. Фаворский А. П. Расчет сопел Лавалья. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1965, т. 5, № 5.
10. Лаврентьев М. М. О задаче Коши для уравнения Лапласа. Изв. АН СССР. Сер. матем., 1956, т. 20, 6.
11. Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. Физматгиз, 1959.
12. Dahlquist G. Convergence and Stability for a hyperbolic difference equation with analytic values. *Math. Scand*, 1954, 2.
13. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, ч. 2, Физматгиз, 1963.
14. Овсянников Л. В. Исследование газовых течений с прямой звуковой линией. Тр. ЛКВВИА, 1950, вып. 33.
15. Görtler G. H. Zum Übergang von Unterschall zu Überschallgeschwindigkeiten in Düsen. *Z. angew. Math. und Mech.*, 1938, B. 19, H. 6.
16. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики, т. 2. Гостехиздат, 1951.
17. Камзолов В. Н., Пирумов У. Г. Расчетное исследование сверхзвуковой струи, истекающей из отверстия с плоскими стенками. ПМТФ, № 2, 1967.
18. Берс Л. Математические вопросы дозвуковой и околосвуковой газовой динамики. Изд. иностр. лит., 1961.