

**УСТАНОВИВШАЯСЯ ФИЛЬТРАЦИЯ К НЕСОВЕРШЕННОЙ ГАЛЕРЕЕ В БЕЗНАПОРНОМ ПЛАСТЕ**

П. Я. ПОЛУБАРИНОВА-КОЧИНА, В. А. ПОСТНОВ, В. Н. ЭМИХ

(Новосибирск)

Рассматриваемая задача есть плоский аналог задачи о фильтрации к несовершенной скважине с затопленным фильтром. Решение последней задачи в гидродинамической постановке связано с большими трудностями и до настоящего времени не найдено. Однако рассмотрение случая плоского потока может дать некоторое представление о возможной зависимости фильтрационных характеристик от степени несовершенства скважины.

Область фильтрации представлена на фиг. 1, а. Ограничимся рассмотрением случая, когда водопримемная часть галереи BC примыкает к непроницаемой горизонтальной подошве пласта. Фильтрация считается установившейся, поэтому ордината  $y$  свободной поверхности, возрастающая по мере удаления от галереи влево, вверх по потоку, является неограниченной. Действительно, в противном случае

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} y \frac{dy}{dx} = 0 \text{ при } x \rightarrow -\infty$$

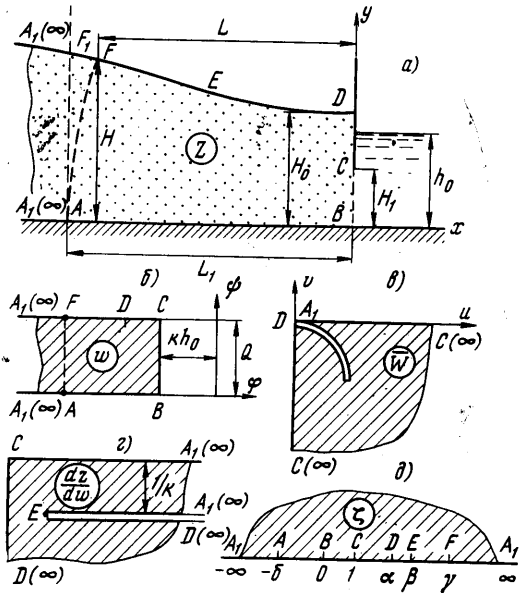
и, следовательно, расход потока неограниченно убывает при  $x \rightarrow -\infty$ , что невозможно при стационарном режиме.

Ввиду отмеченного обстоятельства рассмотрение потока в бесконечной области является не вполне естественным: в действительности, ордината свободной поверхности ограничена. Однако математическое решение при такой постановке несколько упрощается по сравнению со случаем ограниченной области с прямолинейным контуром питания [1] вследствие уменьшения числа особых точек, а указанную неувязку с физической картиной можно до некоторой степени устранить, если одну из эквипотенциалей, получаемых из решения, принять за левую границу потока.

Производим конформное отображение области комплексного потенциала  $\omega$  (фиг. 1, б) и области  $dz/d\omega$  инверсии годографа скорости  $w$  (фиг. 1, в, г) на верхнюю полушарность вспомогательного комплексного переменного  $\zeta$  (фиг. 1, д); по формуле Кристоффеля — Шварца, найдем

$$\omega = -(2Q/\pi) \ln(\sqrt{\zeta} + \sqrt{\zeta - 1}) - kh_0 + iQ \tag{1}$$

$$\frac{dz}{d\omega} = \frac{2}{k\pi} \left[ \ln \frac{\sqrt{\zeta - \alpha} - \sqrt{\zeta - 1}}{\sqrt{\alpha - 1}} + \frac{\beta - \alpha}{\alpha - 1} \left( \frac{\zeta - 1}{\zeta - \alpha} \right)^{1/2} \right] - \frac{i}{k} \tag{2}$$



Фиг. 1

Здесь  $k$  — коэффициент фильтрации пласта,  $h_0$  — уровень воды в галерее,  $Q$  — расход потока, подлежащий определению,  $\alpha$  и  $\beta$  — параметры конформного отображения (фиг. 1).

Полагая в (1)  $\zeta = \alpha$ ,  $\omega = -kH_0 + iQ$  ( $H_0$  — неизвестное значение ординаты свободной поверхности в точке  $D$ ), получим соотношение

$$H_0 = h_0 + (2Q/k\pi) \ln(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\alpha-1}) \quad (3)$$

Дифференцируя далее (1) по  $\zeta$  и перемножая получаемое выражение с равенством (2), имеем

$$\frac{dz}{d\zeta} = -\frac{2Q}{k\pi^2} \left[ \ln \frac{\sqrt{\zeta-\alpha} + \sqrt{\zeta-1}}{\sqrt{\alpha-1}} \frac{1}{\sqrt{\zeta}(\zeta-1)} + \frac{\beta-\alpha}{\alpha-1} \frac{1}{\sqrt{\zeta}(\zeta-\alpha)} \right] + i \frac{Q}{k\pi} \frac{1}{\sqrt{\zeta}(\zeta-1)} \quad (4)$$

В результате интегрирования выражения (4) от  $\alpha$  до  $\zeta$  получим, с учетом (3), уравнение свободной поверхности  $A_1D$  в комплексной форме

$$z = -\frac{2Q}{k\pi^2} \left[ \int_{\alpha}^{\zeta} \ln \frac{\sqrt{\zeta-\alpha} + \sqrt{\zeta-1}}{\sqrt{\alpha-1}} \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta}(\zeta-1)} + M \ln \frac{\sqrt{\zeta} + \sqrt{\zeta-\alpha}}{\sqrt{\alpha}} \right] + i \left[ \frac{2Q}{k\pi} \ln(\sqrt{\zeta} + \sqrt{\zeta-1}) + h_0 \right], \quad M = 2 \frac{\beta-\alpha}{\alpha-1} \quad (5)$$

Допустим, что на некотором расстоянии  $L$  от галереи найдена путем замера ордината  $H$  свободной поверхности. Если обозначить через  $\gamma$  соответствующее значение параметра  $\zeta$  (фиг. 1,  $a$ ,  $\partial$ ) и положить в равенстве (5)  $\zeta = \gamma$ ,  $z = -L + iH$ , то получим соотношения в безразмерных величинах

$$L^{\circ} = \frac{Q^{\circ}}{\pi} \left[ \int_{\alpha}^{\gamma} \ln \frac{\sqrt{\zeta-\alpha} + \sqrt{\zeta-1}}{\sqrt{\alpha-1}} \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta}(\zeta-1)} + M \ln \frac{\sqrt{\gamma} + \sqrt{\gamma-\alpha}}{\sqrt{\alpha}} \right] \quad (6)$$

$$\gamma = \text{ch}^2 \frac{1-h_0^{\circ}}{Q^{\circ}} \quad \left( Q^{\circ} = \frac{2Q}{k\pi H}, L^{\circ} = \frac{L}{H}, h_0^{\circ} = \frac{h_0}{H} \right) \quad (7)$$

Условимся линейные характеристики в дальнейшем относить к  $H$ , снабжая их индексом  $^{\circ}$  сверху.

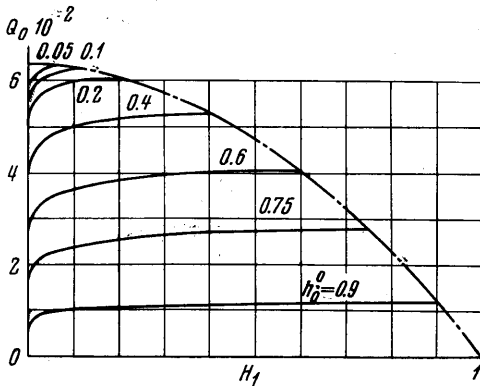
На основе полученных формул составлена программа расчетов на ЭВМ М-20. В качестве исходных данных берутся следующие параметры: уровень  $h_0$  в галерее, длина  $H_1$  ее водоприемной части и ордината  $H$  свободной поверхности на расстоянии  $L$ , играющая роль масштабной единицы линейных величин. Программа предусматривает вычисление координат ряда точек свободной поверхности, в частности, ординаты  $H_0$  точки  $D$  выхода поверхности на непроницаемый экран, а также величины безразмерного дебита галереи  $Q^{\circ}$ .

Основным в программе вычислений будет выражение (6), используемое как уравнение для определения параметра  $\alpha$ . Правую часть равенства (6) действительно можно рассматривать как функцию  $\alpha$ , если выразить через  $\alpha$  величины  $Q^{\circ}$  и  $M$ , а следовательно, посредством соотношения (7), — и параметр  $\gamma$ . Два уравнения относительно  $Q^{\circ}$  и  $M$  получим из выражения (4), записанного последовательно для участков  $BC$  и  $CD$  и проинтегрированного затем в соответствующих пределах

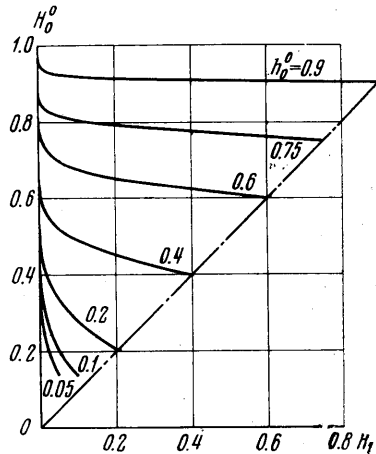
$$h_0^{\circ} - H_1^{\circ} = \frac{Q^{\circ}}{\pi} \left[ M \arccos \frac{1}{\sqrt{\alpha}} - \int_1^{\alpha} \arcsin \left( \frac{\alpha-\zeta}{\alpha-1} \right)^{1/2} \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta}(\zeta-1)} \right] \quad (8)$$

$$H_1^{\circ} = \frac{Q^{\circ}}{\pi} \left[ M \arcsin \frac{1}{\sqrt{\alpha}} + \int_0^1 \ln \frac{\sqrt{\alpha-\zeta} + \sqrt{1-\zeta}}{\sqrt{\alpha-1}} \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta}(\zeta-1)} \right] \quad (9)$$

Определив из этой системы величины  $Q^\circ$  и  $M$  как функции параметра  $\alpha$ , нетрудно установить затем непосредственно, что  $dQ^\circ/d\alpha > 0$ . Но возрастание дебита галереи при фиксированных значениях параметров  $h_0$ ,  $H_1$  и  $H$  может происходить только за счет уменьшения  $L$ ,



Фиг. 2



Фиг. 3

т. е. увеличения градиентов напора. Заключение о монотонном убывании  $L$  с ростом  $\alpha$  подтверждается и расчетами.

С учетом этой зависимости методом половинного деления [2] в интервале, границы которого устанавливаются в каждом конкретном случае, вычисляется значение  $\alpha$ , удовлетворяющее соотношению (6). Для него, равно как и для всех промежуточных значений параметра  $\alpha$ , в процессе вычисления  $L^\circ$  определяются, в частности, соответствующие значения  $Q^\circ$ , а также координаты ряда точек свободной поверхности потока. Таким образом, попутно с решением основной задачи получаем картину потока для некоторых других значений  $L^\circ$ .

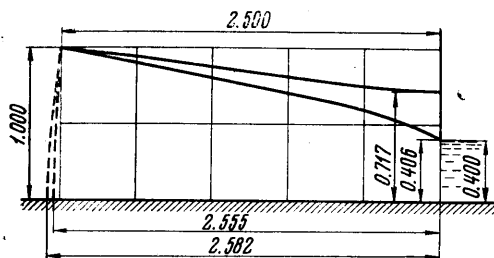
Наибольший интерес представляют зависимости величин  $Q$  и  $H_0$  от параметров  $h_0$  и  $H_1$ ; последний характеризует степень заглубления экрана. Эти зависимости представлены графически на фиг. 2 и 3 для  $L^\circ = 5$ . Каждая кривая соответствует некоторой величине уровня  $h_0$  в галерее; при этом параметр  $H_1^\circ$  изменяется в интервале  $(0, h_0^\circ)$ . Как видно из графиков, заглубление экрана (уменьшение  $H_1^\circ$ ) сопровождается убыванием дебита галереи и подъемом свободной поверхности, что, в частности, выражается в увеличении  $H_0^\circ$ ; оба эти обстоятельства характеризуют усиление подпора. При  $H_1^\circ = 0$ , т. е. при полном закрытии галереи,  $Q^\circ = 0$ , однако убывание дебита с заглублением экрана происходит медленно, и теоретические значения его остаются ощутимыми даже при малых значениях  $H_1^\circ$ . Так, например, для случая  $h_0^\circ = 0.9$  убывание  $H_1^\circ$  от 0.9 до  $10^{-4}$  вызывает лишь двукратное уменьшение величины  $Q^\circ$ : от 0.0121 до 0.0060. При меньших же значениях  $h_0^\circ$  расширяется диапазон изменения величины  $Q^\circ$ , поскольку верхней границей ее значений будет  $Q_0^\circ$  — безразмерный дебит галереи при отсутствии перемычки, определяемый согласно формуле Дюпюи

$$Q_0^\circ = \frac{1 - (h_0^\circ)^2}{\pi L} \tag{10}$$

Зависимость (11) представлена штрих-пунктирной линией на фиг. 2; при этом вдоль оси абсцисс должна откладываться величина  $h_0^\circ$ . При  $H_1^\circ$ , близких к  $h_0^\circ$ , выполняются приближенные равенства  $Q^\circ \approx Q_0^\circ$ ,  $H_0^\circ \approx h_0^\circ$ . Только для малых значений  $h_0^\circ$  они уступают место неравенствам  $Q^\circ < Q_0^\circ$  и  $H_0^\circ > h_0^\circ$  даже при  $H_1^\circ = h_0^\circ$ .

Гораздо ярче проявляется зависимость дебита от уровня в галерее. Например, при  $H_1^\circ = 0.1$  уменьшение  $h_0^\circ$  от 0.9 до 0.1 влечет возрастание  $Q_0^\circ$  от 0.0100 до 0.0626, т. е. более чем в шесть раз.

В опубликованной недавно статье П. Н. Костюковича [3] автор, ссылаясь на эксперименты, отождествляет безнапорную фильтрацию с напорной в пласте, мощность которого равна длине затопленной части фильтра, и получает, в частности, параболическую зависимость дебита галереи в безнапорном потоке от понижения на галерее, аналогичную известной зависимости А. Н. Мятлева [4] для скважины. Согласно этой зависимости, величина дебита, будучи максимальной при понижении, равном половине статического уровня, убывает до нуля при дальнейшем росте понижения. В статье [3] было указано на ошибочность этих представлений: возрастание



Фиг. 4

перегиба. В случае же  $H_1^\circ = 0.4$ , когда подпор, создаваемый задвижкой, весьма мал, свободная поверхность по форме близка к параболе, хотя в непосредственной близости от галереи она, как и при  $H_1^\circ = 0.01$ , имеет точку перегиба и выходит на экран под прямым углом. В связи с этим отметим вновь статью [3], в которой утверждается, что свободная поверхность имеет прямолинейную форму и не является линией тока.

Представляет интерес определение положения точки  $A$ , в которой эквипотенциаль, начинающаяся из точки  $F$ , выходит на подошву пласта (фиг. 1). Запишем выражение (1) для участка  $A_1B$  ( $-\infty < \xi < 0$ )

$$\omega = -(2Q/\pi) \ln(\sqrt{1-\xi} + \sqrt{-\xi+1}) - kh_0$$

Полагая здесь  $\xi = -\delta$ ,  $\omega = kH$ , найдем значение  $\xi$ , соответствующее точке  $A$

$$\xi_A = -\delta = \text{sh}^2 \frac{\pi k(H-h_0)}{2Q}$$

Если преобразовать теперь уравнение (5) для участка  $A_1B$  и затем проинтегрировать его по  $\xi$  от  $-\delta$  до 0, то получим следующее выражение для искомого расстояния  $L_1$  точки  $A$  от галереи в безразмерных величинах

$$L_1^\circ = \frac{Q^\circ}{\pi} \left[ \int_0^\delta \ln \frac{\sqrt{\alpha+a} + \sqrt{1+u}}{\sqrt{\alpha-1} \sqrt{u(1+u)}} du + M \ln \frac{\sqrt{\delta} + \sqrt{\delta+a}}{\sqrt{\alpha}} \right]$$

( $u = -\xi$ )

По этой формуле для каждого из рассчитываемых вариантов определялась величина  $L_1^\circ$ . Сравнение ее с соответствующей величиной  $L^\circ$  показывает, что при некотором удалении от галерей отклонение эквипотенциалей от вертикальных прямых становится незначительным. Так, в случаях, изображенных на фиг. 4, когда  $L^\circ = 2.5$ , для  $H_1^\circ = 0.4$  и  $H_1^\circ = 0.01$  значения  $L_1^\circ$  соответственно равны 2.582 и 2.555. На фиг. 4 эквипотенциали  $h = H$  схематично обозначены пунктирными линиями. Для других вариантов, по которым построены графики на фиг. 2 и 3,  $L^\circ = 5$ , и при этом разность  $L_1^\circ - L^\circ$  заключается в пределах от 0.01 до 0.04. Учитывая это обстоятельство и возвращаясь к сказанному в начале статьи, заметим, что, ограничивая область потока слева одной из таких эквипотенциалей, мы получим задачу, близкую к задаче для случая перемычки с вертикальными откосами [4].

Поступило 10 I 1967

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Пряжинская В. Г. Движение грунтовых вод в прямоугольной перемычке с непроницаемой вертикальной стенкой. Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1964, № 2.
2. Демидович Б. П., Марон И. Л. Основы вычислительной математики. Физматгиз, 1963.
3. Костюкович П. Н. О движении грунтовых вод к дренам. Докл. АН БССР, 1966, т. 10, № 8.
4. Мятнев А. Н. Задача о колодцах в горизонте грунтовых вод. Изв. АН СССР, ОТН, 1948, № 3.
5. Полубарина-Кочина П. Я. О дебите скважины в безнапорном движении со слабопроницаемым водоупором. Изв. АН СССР. ОТН, Механика и машиностроение, 1960, № 3.
6. Рыбакова С. Т. К задаче о дебите скважины в безнапорном движении со слабопроницаемым водоупором. ПМТФ, 1962, № 3.
7. Меламед В. Г. К расчету дебита скважины в безнапорном движении со слабопроницаемым водоупором. Изв. АН СССР. ОТН, Механика и машиностроение, 1963, № 5.