

ФИЛЬТРАЦИЯ ЖИДКОСТИ ИЛИ ГАЗА ВДОЛЬ ЛЕГКО ПРОНИЦАЕМОГО ПОРИСТОГО СЛОЯ

В. А. БОГДАНОВ

(Москва)

В статье изложены основные результаты исследования фильтрации газа вдоль плоского слоя физически однородного легко проницаемого пористого материала. Составлены уравнения фильтрации и получено точное решение. Справедливость предлагаемого теоретического описания была проверена при помощи экспериментального исследования движения азота в плоском вертикальном слое взвешенных стальных частиц. Выявлена аналогия между фильтрацией вдоль плоского пористого слоя и магнитогидродинамическим движением жидкости между двумя параллельными пластинами.

I. В качестве общего случая рассмотрим движение жидкости или газа в псевдооживленном слое. Примем, что при высокой проницаемости это движение характеризуется следующими особенностями.

а) Пористость ε среды настолько близка к единице, что при составлении уравнений фильтрации ее можно опустить.

б) Характерное расстояние между частицами во много раз больше средней длины свободного пробега молекул газа.

в) Характерное расстояние во много раз меньше расстояния, на котором существенно изменяются характеристики течения.

г) Размер частиц исследуемого пористого материала много меньше характерного расстояния между частицами.

Будем считать также, что фильтрация происходит в изотермических условиях, и сжимаемостью газа можно пренебречь.

Для составления уравнения динамики, следуя [1], выделим в системе «газ — частицы» произвольный конечный объем τ , ограниченный поверхностью σ , связанной с частицами газа. Имея в виду, что в объеме τ внутренние силы уравновешены, можем считать, что изменение количества движения такой системы за время dt и поток количества движения при переносе частиц через поверхность σ со скоростью $(V_d - V)$ вызваны силами, обусловленными внешними причинами, и силой, действующей на границу системы. Полученное уравнение движения системы «газ — частицы» имеет вид

$$\int_{\tau} \rho \left[(\mathbf{V} \cdot \nabla) \left(\mathbf{v} + \frac{\rho_d}{\rho} \mathbf{V}_d \right) + \frac{\partial}{\partial t} \left(\mathbf{v} + \frac{\rho_d}{\rho} \mathbf{V}_d \right) - \frac{\rho_d}{\rho} \mathbf{G}_d - \mathbf{G} \right] d\tau + \int_{\sigma} \{ P \mathbf{n} + \rho_d \mathbf{V}_d [(\mathbf{V}_d - \mathbf{V}) \mathbf{n}] \} d\sigma = 0 \quad (1.1)$$

Здесь

$$\rho = \rho^0 \left(1 - \frac{\rho_d}{\rho_d^0} \right), \quad \rho = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta\tau}, \quad \rho_d = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\Delta m_d}{\Delta\tau} \quad (1.2)$$

где ρ^0 , ρ_d^0 — истинные плотности газа и частиц соответственно; Δm , Δm_d — массы газа и частиц в физически бесконечно малом объеме $\Delta\tau$; \mathbf{V}_d — скорость частиц, заданная в соответствии с особенностью течения (\mathbf{v}) в каждой точке рассматриваемого объема; \mathbf{V} — скорость газа; \mathbf{G}_d , \mathbf{G} — внешние массовые силы, действующие на частицы и газ; \mathbf{n} — орт нормали

к поверхности σ . В тензоре напряжений P учтены не только нормальные напряжения давления на границе σ объема τ , как это сделано при составлении уравнения движения через плотный слой частиц [1], но и касательные напряжения вязкостного трения в газе. В силу особенностей течения (б) и (г) считаем, что связь между скоростями деформации и напряжениями в газе определяется законом Ньютона

$$P = 2\nu\rho^0 S - p\varepsilon \quad (1.3)$$

где S — тензор скоростей деформации, ε — тензорная единица, p — давление, ν — кинематический коэффициент вязкости.

Уравнение движения частиц имеет вид [1]

$$(\mathbf{V}_d \cdot \nabla) \mathbf{V}_d + \frac{\partial \mathbf{V}_d}{\partial t} + \frac{1}{\rho_d^0} \nabla p - \mathbf{f} - \mathbf{G}_d = 0 \quad (1.4)$$

Пренебрежем внешней силой \mathbf{G} и при помощи зависимостей (1.2), (1.4) и закона Ньютона (1.3) проведем необходимые преобразования уравнения (1.1). В результате получим уравнение движения газа

$$(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \frac{1}{\rho^0} \nabla p - \nu \nabla^2 \mathbf{V} + \frac{\rho d}{\rho} \mathbf{f} = 0 \quad (1.5)$$

Уравнение неразрывности имеет вид [1]

$$\partial \rho / \partial t + \nabla(\rho \mathbf{V}) = 0 \quad (1.6)$$

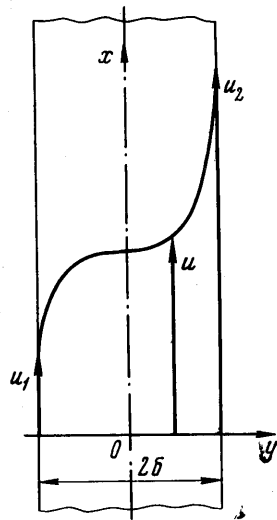
Итак, наличие особенностей течения (б), (в) и (г) позволило представить движение газа и частиц как движение двух взаимопроникающих сплошных сред. Такое представление можно распространить и на фильтрацию в любой физически однородной легко проницаемой пористой среде, при этом отдельные частицы среды можно рассматривать как одиночные, находящиеся неподвижно внутри жидкости, подобно частицам модели пористой среды, рассматриваемой в «тормозной» теории проницаемости [2].

Следуя гипотезе Н. Е. Жуковского [3], считаем силу сопротивления \mathbf{f} пористой среды массовой силой. Сила \mathbf{f} может быть определена из решения задачи об обтекании частиц однородным потоком вязкого газа при учете сил взаимного влияния между частицами (задача представляет самостоятельный интерес и пока еще не решена) или из эксперимента. Эксперименты показывают [4], что при ламинарном режиме движения сопротивление взвешенных частиц однородному потоку газа следует линейному закону. Поэтому считаем, что \mathbf{f} может быть определена при помощи закона Дарси. Получим зависимость

$$\mathbf{f} = \frac{\rho}{\rho d} \frac{\varepsilon \nu}{k} \mathbf{V} \quad (1.7)$$

где k — коэффициент проницаемости при ламинарном режиме фильтрации.

В отличие от уравнения динамики для случая фильтрации через плотную пористую среду [5], в уравнении (1.5) появляется дополнительный член $\nu \nabla^2 \mathbf{V}$, который выражает действие касательных напряжений. Это справедливо, так как при фильтрации через легко проницаемую пористую среду величины действующих на жидкость или газ массовых сил сопротивления, нормальных напряжений давления и касательных вязкостных напряжений близки между собой, тогда как при фильтрации через обычную пористую среду внутренние вязкостные напряжения ничтожно малы по



Фиг. 1

сравнению с напряжениями давления и величиной сопротивления пористой среды. Опуская в соответствии с особенностью течения (а) пористость ε , приходим к уравнению движения газа

$$(\mathbf{V} \cdot \nabla) \mathbf{V} + \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \frac{1}{\rho^0} \nabla p - \nu \nabla^2 \mathbf{V} + \frac{\nu}{k} \mathbf{V} = 0 \quad (1.8)$$

причем в данном случае скорость движения газа в порах, очевидно, равна скорости фильтрации.

Уравнение неразрывности имеет обычный вид

$$\partial \rho^0 / \partial t + \nabla (\rho^0 \mathbf{V})_z = 0 \quad (1.9)$$

и так как принято, что газ несжимаем, то уравнение (1.9) можно преобразовать в уравнение несжимаемости

$$\nabla \mathbf{V} = 0 \quad (1.10)$$

2. Для некоторых частных случаев фильтрации газа или жидкости в легко проникаемом пористом материале может быть получено точное решение уравнений (1.8) и (1.10).

Рассмотрим, например, плоскопараллельное равномерное движение газа вдоль плоского слоя изотропного легко проникаемого пористого материала бесконечной ширины и толщины 2δ , когда параллельно слою движется поток газа (фиг. 1). Поместим начало координат в середине слоя, ось x направим вдоль слоя, ось y — поперек. Так как $\partial V / \partial t = 0$, а проекции v и w осредненной по координатам скорости \mathbf{V} на оси y и z также равны нулю, то из (1.8) и (1.10) получим

$$\nu \frac{d^2 u}{dy^2} = \frac{1}{\rho^0} \frac{dp}{dx} + \frac{\nu}{k} u \quad (2.1)$$

Считаем, что скорость на границах слоя задана

$$u = u_1 \quad \text{при} \quad y = -\delta, \quad u = u_2 \quad \text{при} \quad y = \delta \quad (2.2)$$

Решение уравнения (2.1) при граничных условиях (2.2) имеет вид

$$u = u_* \left(1 - \frac{\text{ch } \kappa \eta}{\text{ch } \kappa} \right) + \frac{u_2 + u_1}{2} \frac{\text{ch } \kappa \eta}{\text{ch } \kappa} + \frac{u_2 - u_1}{2} \frac{\text{sh } \kappa \eta}{\text{sh } \kappa} \quad (2.3)$$

$$u_* = -\frac{k}{\nu \rho^0} \frac{dp}{dx}, \quad \kappa = \frac{\delta}{\sqrt{k}}, \quad \eta = \frac{y}{\delta}$$

Таким образом, профиль скорости в слое пористого материала зависит от величины $\kappa = \delta / \sqrt{k}$. Применяя к (2.1) операцию приведения (\rightarrow — символ операции) [6]

$$\frac{(1/\rho^0) (dp/dx)}{\nu d^2 u / dy^2} \rightarrow \frac{(1/\rho^0) (\Delta p / l)}{\nu u_0 / \delta^2} = \frac{4}{4} \frac{ER}{l} \frac{\delta}{l} \frac{(\nu/k) u}{\nu d^2 u / dy^2} \rightarrow \frac{(\nu/k) u_0}{\nu u_0 / \delta^2} = \kappa^2$$

получим комплексы

$$E = \frac{\Delta p}{\rho^0 u_0^2}, \quad R = \frac{u_0 4\delta}{\nu}, \quad \frac{\delta}{l} \left(u_0 = \frac{1}{2\delta} \int_{-\delta}^{\delta} u dy \right)$$

Здесь u_0 — средняя скорость в слое.

Три комплекса известны. Это число Эйлера E , критерий Рейнольдса R и параметрический критерий δ / l ; четвертый — новый критерий κ представляет собой меру отношения сил сопротивления пористой среды к силам вязкостного трения.

Анализ размерности параметров, входящих в критерий κ , показывает, что этот критерий составляется как отношение двух длин. Первая длина — это гидравлический радиус плоского слоя. Чтобы выяснить, что представляет собой вторая длина, сравним фильтрацию в пористой среде с движением вязкой жидкости через слой одинаковых сферических частиц. Пользуясь [7], получим $k = 0.5\epsilon r_0^2$, где r_0 — средний гидравлический радиус пор. В рассматриваемом случае движения $\epsilon = 1$ и

$$\kappa = \delta / \sqrt{k} = \sqrt{2} \delta / r_0 \quad (2.4)$$

Таким образом, критерий κ пропорционален отношению гидравлического радиуса слоя к условному гидравлическому радиусу пор. Поэтому мерой отношения сил, действующих при движении жидкости в пористой среде, может служить отношение указанных радиусов.

Влияние критерия κ на формирование профиля скорости удобно выявить, анализируя частный случай движения, когда скорости u_1 и u_2 на границах слоя равны нулю. При $u_1 = u_2 = 0$ из (2.3) получим

$$\frac{u}{u_*} = \frac{\text{ch } \kappa - \text{ch } \kappa \eta}{\text{ch } \kappa} \quad (2.5)$$

Так как в этом случае при $y = 0$ скорость достигает максимальной величины u_m , то из (2.5) найдем

$$\frac{u}{u_m} = \frac{\text{ch } \kappa - \text{ch } \kappa \eta}{\text{ch } \kappa - 1} \quad (2.6)$$

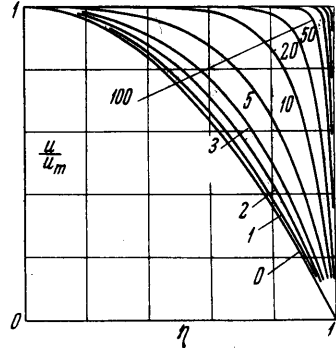
Эта форма записи профилей скорости инвариантна относительно изменения числа E .

Интегрирование формулы (2.5) дает

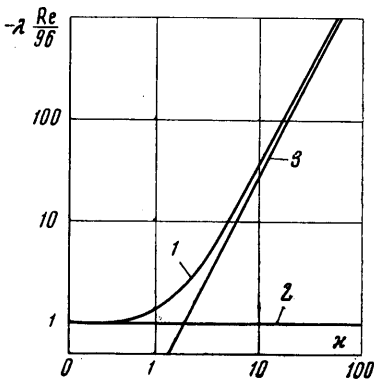
$$\lambda \frac{R}{96} = -\frac{\kappa^2}{3} \frac{\kappa}{\kappa - \text{th } \kappa} \quad \left(\lambda = \frac{2E4\delta}{l} \right) \quad (2.7)$$

λ — коэффициент гидравлического сопротивления.

Из (2.5), (2.6) и (2.7) находим отношение максимальной скорости к средней



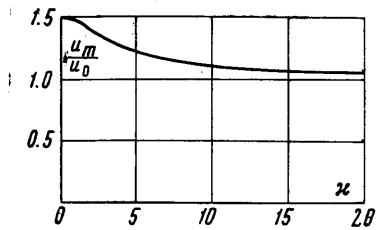
Фиг. 2



Фиг. 3

$$\frac{u_m}{u_0} = \frac{\text{ch } \kappa - 1}{\text{ch } \kappa - \kappa^{-1} \text{sh } \kappa} \quad (2.8)$$

Кривые функций (2.6), (2.7) и (2.8) показаны на фиг. 2, 3, 4.



Фиг. 4

На фиг. 2 приведены теоретические профили скорости в плоском слое, на фиг. 3 — зависимость гидравлического сопротивления пористого слоя $\lambda R / 96$ от критерия κ ; при этом кривая 1 вычислялась по формуле (2.7), кривые 2 и 3 — по формулам (2.10) и (2.9), полученным ниже. На фиг. 4 приведена зависимость отношения максимальной скорости u_m к средней скорости u_0 от критерия κ .

В предельном случае, когда $\kappa \rightarrow \infty$ (с уменьшением проницаемости k и с увеличением толщины 2δ слоя), получаем

$$u / u_m = 1 - \exp[-\kappa(1 - \eta)], \quad \lambda R / 96 = -\kappa^2 / 3, \quad u_m / u_0 = 1 \quad (2.9)$$

т. е. профиль скоростей изображается прямоугольником, а сопротивление определяется законом Дарси (подставив $\lambda = 2E4\delta / l$ и $\kappa = \delta / \sqrt{k}$, получим закон Дарси $u_0 = -(k / \nu \rho^2) (\Delta p / l)$, т. е. при $\kappa \rightarrow \infty$ наблюдается обычная фильтрация).

Нижней границей процесса фильтрации в плотной пористой среде можно приближенно считать значение критерия $\kappa = 10$, что хорошо видно на фиг. 3 и 4. Вспоминая физический смысл критерия κ , можно говорить, что при $\kappa > 10$ сопротивление среды более, чем на два порядка превышает вязкостное трение в газе. Этот результат соответствует положениям обычной теории фильтрации.

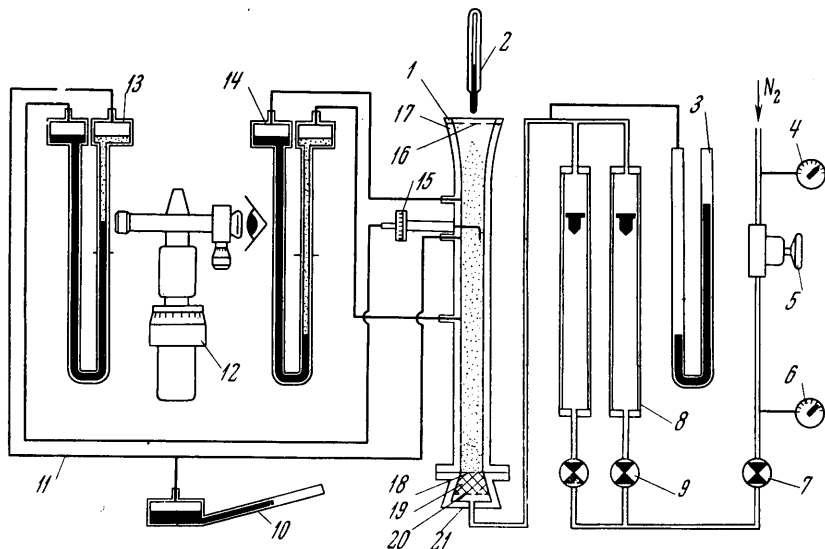
В случае, когда $\kappa = 0$, имеем

$$u/u_m = 1 - \eta^2, \quad \lambda R/96 = -1, \quad u_m/u_0 = 1.5 \quad (2.10)$$

Этот профиль скоростей и закон сопротивления свойственны свободному ламинарному движению жидкости или газа между параллельными пластинами.

При изменении критерия κ от 0 до 10 движение жидкости или газа плавно переходит от свободного к движению в плотном пористом материале.

3. В экспериментах в качестве пористой легко проницаемой среды использовался псевдооживленный слой зернистого материала, взвешенного в восходящем потоке газа. Так как течение в легко проницаемой пористой среде и течение через разреженный слой частиц описываются одними и теми же уравнениями, то оба эти явления при равенстве критериев подобия подобны, и исследование гидродинамических характеристик течения допустимо проводить на любом из них.



Фиг. 5

Схема экспериментальной установки, моделирующей движение газа в плоском слое легко проницаемого пористого материала, показана на фиг. 5, на которой 1 — модель пористого слоя, 2 — термометр, 3 — водяной манометр, 4 — манометр высокого давления, 5 — редуктор, 6 — манометр низкого давления; 7, 9 — краны, 8 — ротаметр, 10 — наклонный микроманометр, 11 — резиновые трубки, 12 — винтовой окулярный микрометр; 13, 14 — двухжидкостные микроманометры, 15 — трубка Пито и микрометрический механизм; 16, 18, 20 — сетки, 17 — конус, 19 — набивка из ваты, 21 — входной конус.

Модель пористого слоя представляла собой плоский вертикальный канал из органического стекла длиной около 900 мм прямоугольного сечения с соотношением сторон 1:10 (4.86 × 49.8 мм), заполненный взвешенной в потоке сухого азота шарообразной стальной дробью с диаметром дробин не более 0.1—0.2 мм. Поле скоростей газа на входе в канал выравнивалось при помощи сетки 18 и ваты 19, заполняющей входной конус 21.

Визуальные наблюдения показали, что в зоне измерения скоростей не было ни существенной неоднородности в расположении частиц, ни выраженного повсеместного переноса частиц вниз по потоку. Преобладало движение частиц поперек слоя. Обратное движение частиц вниз наблюдалось лишь возле узких граней канала, причем плотность расположения частиц непосредственно возле этих граней была выше.

Критерий Рейнольдса, характеризующий движение газа в канале, находился в пределах $Re = u_0 d / \nu = 600 \div 1000$, а критерий Рейнольдса, характеризующий режим обтекания дробин, — в пределах $Re_d = u_0 d / \nu = 6 \div 20$, где d — диаметр дробин. Это свидетельствует о ламинарном режиме движения азота в модели.

Применение в качестве пористой среды псевдооживленного слоя позволило измерять скорость газа непосредственно внутри пористой среды и изменять критерий κ от 0 до 10, регулируя расход газа через слой. Анализ фиг. 2, 3 и 4 показы

вает, что диапазон изменения критерия охватывает практически наиболее важную область изучаемого фильтрационного явления.

Скорость газа измерялась при помощи трубки полного напора (трубки Пито) 15, установленной в осевой плоскости канала вблизи его верхнего края, и трех отверстий статического давления в стенках канала. Применялись две трубки Пито: одна — диаметром 0,805 мм, а другая — диаметром 0,406 мм. Трубка Пито перемещалась внутри канала микрометрическим механизмом. Падение статического давления в слое измерялось через отверстия в стенках канала, расположенные на некотором удалении вверх и вниз по потоку от трубки Пито. Приборами служат двухжидкостные микроманометры 13 и 14 в сочетании с винтовым окулярным микрометром 12. Чувствительность системы измерения скоростного напора была выше $1.5 \cdot 10^{-3}$ мм вод. ст., а чувствительность системы измерения сопротивления была равна $2 \div 3 \cdot 10^{-2}$ мм вод. ст.

Так как измерение скоростного напора производилось при значениях критерия Рейнольдса для трубки Пито $R_r = ur/\nu \approx 9 \div 50$, где r — радиус носика трубки (что указывает на ламинарный режим обтекания трубки Пито), то величина скорости определялась через измеренный скоростной напор с поправкой на влияние вязкостного трения по теоретической формуле [8]

$$\Delta p = p_f - p_s = \frac{\rho^0 u^2}{2} \left(1 + \frac{6}{R_r + 0.455 \sqrt{R_r}} \right) \quad (3.1)$$

где p_f — напор, измеренный через трубку Пито; p_s — статическое давление, измеренное через отверстия в стенке канала. Сравнение результатов вычислений по теоретической формуле (3.1) с результатами испытаний трубок Пито [8] и учет ошибок измерения скоростного напора показывает, что суммарная относительная ошибка, которая могла быть допущена при измерении скорости, не превышает 4% при $R_r = 50$ и 15% при $R_r = 9$.

Экспериментальные профили скорости в модели пористого слоя были построены с использованием формулы (2.6), параметры которой κ и u_m находились методом средних по результатам измерения местной скорости. Результаты измерения профилей скорости для трех экспериментов представлены точками 1, 2, 3 на фиг. 6. Светлые точки соответствуют половине канала, расположенной ближе к отверстию, через которое вводилась трубка Пито; темные точки — половине, расположенной дальше. Сплошные линии — профили скорости, построенные по экспериментальным точкам. Видно, что разброс экспериментальных точек относительно профилей невелик.

Были вычислены также значения критерия κ при помощи формулы (2.7) по результатам измерения сопротивления псевдооживленного слоя, и по найденному значению критерия κ построены профили скорости (фиг. 6, пунктирные линии).

Сравнение приведенных кривых показывает, что профили, построенные по экспериментальным точкам, располагаются ниже, чем профили, найденные по результатам измерения сопротивления слоя. Основной причиной этого расхождения следует считать «фонтанирование» псевдооживленного слоя. Оценим степень влияния этого явления.

В соответствии с результатами наблюдения, будем считать, что движение частиц вниз происходит через небольшую часть поперечного сечения модели, прилегающую к узким граням модели, в остальной части поперечного сечения частицы перемещаются вверх со скоростью u_d . Для принятой схемы движения частиц из уравнений (1.1) и (1.4) получим уравнение движения газа (1.5), а затем уравнение

$$\nu \frac{d^2 u}{dy^2} = \frac{1}{\rho^0} \frac{dp}{dx} + \frac{\nu}{k} (u - u_d) \quad (3.2)$$

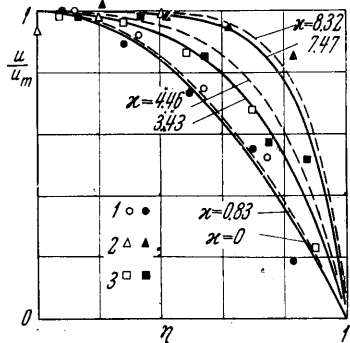
Решение этого уравнения имеет вид

$$\frac{u}{u_{**}} = \frac{\text{ch } \kappa - \text{ch } \kappa \eta}{\text{ch } \kappa} \quad \left(u_{**} = u_* + u_d = -\frac{k}{\nu \rho^0} \frac{dp}{dx} + u_d \right) \quad (3.3)$$

Этому решению можно придать другую форму

$$u - u_d = u_* \left(1 - \frac{\text{ch } \kappa \eta}{\text{ch } \kappa} \right) - u_d \frac{\text{ch } \kappa \eta}{\text{ch } \kappa}$$

которая напоминает форму решения (2.3), если принять $u_1 = u_2 = -u_d$.



Фиг. 6

Так как $u = u_m$ при $y = 0$, то

$$\frac{u}{u_m} = \frac{\operatorname{ch} \kappa - \operatorname{ch} \kappa \eta}{\operatorname{ch} \kappa - 1}$$

что аналогично (2.6). Таким образом, инвариантная относительно изменения числа Эйлера E форма записи профилей скорости сохраняется и при однородном переносе частиц. Интегрируя решение (3.3), получим безразмерную формулу сопротивления плоского фонтанирующего слоя

$$\lambda \frac{R}{96} - \frac{\kappa^2}{3} \frac{u_d}{u_0} = - \frac{\kappa^2}{3} \frac{\kappa}{\kappa - \operatorname{th} \kappa} \left(u_0 = \frac{1}{\delta} \int_0^{\delta} u dy \right) \quad (3.4)$$

Здесь u_0 — средняя скорость. Первое слагаемое в левой части формулы — это сопротивление слоя, определяемое экспериментально; второе слагаемое — «недостаток» в сопротивлении, появляющийся из-за переноса частиц со скоростью u_d . Легко показать, выполнив преобразования, аналогичные преобразованиям формулы (2.9), что этот «недостаток» определяется при помощи закона Дарси, записанного для скорости u_d . Присутствие второго слагаемого в левой части формулы (3.4) объясняет более низкое расположение экспериментальных профилей скорости по сравнению с профилями, найденными по формуле (2.7).

Формула (3.4) показывает, что величина относительной скорости переноса частиц вверх u_d/u_0 может служить для оценки степени влияния фонтанирования на процесс фильтрации в псевдооживленном слое. При помощи формул (3.3) и (3.4) было установлено, что во втором эксперименте отношение u_d/u_0 было равно 0.254, а в третьем эксперименте — 0.774.

4. Наконец, следует указать на интересную аналогию между фильтрацией жидкости или газа в плоском слое легко проницаемого пористого материала и движением электропроводящей жидкости в однородном магнитном поле между двумя параллельными пластинами. Эта аналогия устанавливается сравнением изложенных здесь результатов с результатами исследования, проведенного Гартманом и Лазарусом [10, 11]. Например, профиль скоростей при магнитогидродинамическом движении жидкости изображается формулой

$$\frac{u}{U} = \frac{\operatorname{ch} H - \operatorname{ch} H(y/L)}{\operatorname{ch} H - 1} \quad (4.1)$$

здесь U — характерная скорость, L — характерный размер, H — критерий Гартмана. Ясно, что (2.6) аналогична формуле (4.1), причем критерий κ выполняет в ней роль, совпадающую с ролью критерия Гартмана в формуле (4.1). Смысл критерия H , однако, иной: он представляет собой меру отношения магнитной силы к силе вязкостного трения. Таким образом, фильтрация жидкости в легко проницаемом пористом слое при $u_1 = u_2 = 0$ аналогична магнитогидродинамическому течению в плоском канале.

Автор благодарит Е. М. Минского и А. С. Повицкого за обсуждение работы и ценные критические замечания.

Поступило 20 XI 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Крайко А. Н., Стернин Л. Е. К теории течений двухскоростной сплошной среды с твердыми и жидкими частицами. ПММ, 1965, т. 29, вып. 3.
3. Шейдеггер А. Э. Физика течения жидкостей через пористые среды. Гостехиздат, 1960.
3. Жуковский Н. Е. Теоретическое исследование о движении подпочвенных вод. Собр. соч., т. 3, Гостехиздат, 1949.
4. Минц Д. М. О взвешивании зернистого слоя. Докл. АН СССР, 1952, т. 82, № 1.
5. Чарный И. А. Подземная гидрогазодинамика. Гостехиздат, 1963.
6. Гухман А. А. Введение в теорию подобия. Изд. «Высшая школа», 1963.
7. Лейбензон Л. С. Подземная гидравлика воды, нефти и газа. Собр. тр., т. 2, Изд-во АН СССР, 1953.
8. Номанн F. Der Einfluss grosser Zähigkeit bei der Strömung um den Zylinder und um dei Kugel. Z. angew. Math. und Mech., 1936, B. 16, H. 3.
9. Folsom R. G. Review of the Pitot tube. Trans. ASME, 1956, vol. 78, No. 7.
10. Hartmann J. Hg-Dynamics I, Theory of the laminar flow on an electrically conductive liquid in a homogeneous magnetic field. Kgl. danske vid. selskab Mat.-fys. medd., 1937, vol. 15, No. 6.
11. Hartmann J., Lazarus F. Hg-Dynamics II, Experimental investigation of the flow of Mercury in a homogeneous magnetic field. Kgl. danske vid. selskab Mat.-fys. medd., 1937, vol. 15, No. 7.