

## НЕКОТОРЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА СТАЦИОНАРНОГО ДВИЖЕНИЯ РАЗРЕЖЕННОГО ГАЗА

В. П. ИВАНОВ, Ю. И. НЕЙМАРК

(Горький)

Вакуумные молекулярные насосы известны уже давно и обладают рядом достоинств [1-3].

Расчету вакуумных молекулярных насосов посвящен ряд работ [7-10]. Развиваемые в этих работах методы основаны либо на формулах диффузии газа в длинных трубах, либо на интегральных уравнениях материального баланса. Однако эти теории не позволяют получить расчетные данные реальных конструкций молекулярных насосов, близкие к экспериментальным, и тем более, не позволяют решить практически важную задачу оптимизации параметров и геометрии молекулярных и турбомолекулярных насосов по производительности и степени сжатия. Расчеты, проводимые в работах [8-10], справедливы только при скоростях движения ротора, много меньших средней скорости движения молекул газа. Работы же второго направления не могут быть доведены до окончательного результата ввиду крайней сложности решения получаемой системы интегральных уравнений.

Ниже описывается расчет вакуумных молекулярных насосов, основанный на методе Монте-Карло<sup>1</sup>.

Этот способ применим не только к системам с глубоким вакуумом, когда соударениями между молекулами можно пренебречь, но и к системам, в которых между соударениями молекул о стенки необходимо учитывать возможность небольшого числа взаимных столкновений.

**§ 1. Исходные соотношения для расчета стационарного движения разреженного газа.** Рассматривается стационарное движение разреженного газа в объеме, ограниченном неподвижными или движущимися стенками (фиг. 1). В стенках могут быть отверстия, соединяющие этот объем с другими объемами. Разобьем поверхность, ограничивающую рассматриваемый объем, на  $N$  элементов:  $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_i, \dots, \Delta S_j, \dots, \Delta S_N$  (это разбиение проводится таким образом, чтобы можно было определить вероятности  $p_{ij}$  перехода молекулы с любого элемента  $\Delta S_i$  на любой другой элемент  $\Delta S_j$ ; согласно описываемому далее способу).

Пусть  $n_j$  — величина газового потока, равная числу молекул в единицу времени, рассеиваемых  $j$ -м элементом;  $q_j$  — величина газоотделения (газопоглощения)  $j$ -го элемента, равная разности между потоками молекул, покидающих  $j$ -й элемент и приходящих на него в единицу времени.

Выделенные элементы могут быть разных типов:

(1) неподвижные или движущиеся стенки с постоянным газовыделением (газопоглощением)

$$q_j = Q_j = \text{const} \quad (1.1)$$

(2) стенки, газопоглощение (газовыделение) которых пропорционально величине потока молекул, приходящих на этот элемент

$$q_j = -\gamma_j(p_{1j}n_1 + \dots + p_{Nj}n_N) \quad (1.2)$$

(3) поверхности дырок, на которых заданы либо газовый поток  $n_j$ , либо  $q_j$  в форме (1.1) или (1.2).

<sup>1</sup> Метод Монте-Карло использовался для расчета проводимости некоторых элементов вакуумных магистралей в свободномолекулярном режиме в работах [4, 5, 6] и для расчета способом последовательных приближений течения разреженного газа при учете соударений между молекулами в работе [11].

Для каждого элемента поверхности  $\Delta S_j$  можно записать уравнение материального баланса в виде

$$n_j = q_j + p_{1j}n_1 + \dots + p_{Nj}n_N \quad (1.3)$$

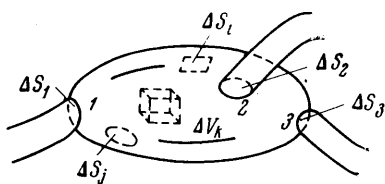
К этим уравнениям можно добавить условие стационарности

$$q_1 + \dots + q_N = 0 \quad (1.4)$$

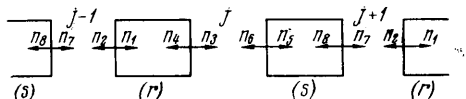
и условие нормировки

$$p_{i1} + \dots + p_{iN} = 1 \quad (1.5)$$

Полученные уравнения связывают величины газовых потоков с газовой выделением системы. Среди  $N + 1$  уравнений (1.3) и (1.4) имеется только  $M$  независимых уравнений с  $2N$  переменными  $n_j$  и  $q_j$ . Вместе с усло-



Фиг. 1



Фиг. 2

виями (1) — (3), задающими  $n_j$  или  $q_j$  или соотношение между ними для каждого элемента, получается система  $2N$  независимых уравнений с  $2N$  неизвестными.

В качестве первого примера рассмотрим стационарный поток газа в объеме с двумя отверстиями и «негазящими» стенками. Выделим только два элемента поверхности этого объема, а именно, сечения входного и выходного отверстий. Пусть «газоотделение» входного отверстия (суммарный молекулярный поток через входное отверстие) равно  $Q$  мол/сек, следовательно, «газоотделение» выходного отверстия равно  $-Q$  мол/сек. Система (1.3) в данном случае содержит одно независимое уравнение

$$n_2 - p_{22}n_2 - p_{12}n_1 = -Q \quad (1.6)$$

При технических расчетах вакуумных систем обычно принимается, что

$$n_1 = \frac{1}{4}v_0 S_1 N_1, \quad n_2 = \frac{1}{4}v_0 S_2 N_2 \quad (1.7)$$

Здесь  $v_0$  — средняя скорость движения молекул газа;  $S_1, S_2$  — площади входного и выходного сечений;  $N_1, N_2$  — концентрация газа на входе и выходе системы. С учетом равенства  $p_{21} + p_{22} = 1$  из уравнения (1.6) можно получить выражение для степени сжатия, которым удобно пользоваться при расчете вакуумных молекулярных насосов

$$K = \frac{N_2}{N_1} = \frac{p_{12}S_1}{p_{21}S_2} - \frac{4Q}{p_{21}S_2 v_0 N_1} = \left[ \frac{p_{21}S_2}{p_{12}S_1} + \frac{4Q}{p_{12}S_1 v_0 N_2} \right]^{-1} \quad (1.8)$$

Рассмотрим еще пример написание уравнений материального баланса для системы последовательно соединенных объемов, представляющих собой одномерную периодическую структуру. Такой системой является, в частности, турбомолекулярный насос, состоящий из большого числа роторных и статорных дисков (схема на фиг. 2). Пусть газоотделением насоса можно пренебречь. Обозначим через  $n_1(j), n_2(j), \dots, n_8(j)$  га-

зовые потоки через входные и выходные сечения роторных ( $r$ ) и статорных ( $s$ ) дисков в прямом и обратном направлениях. Уравнения материального баланса в рассматриваемом случае можно записать в виде

$$\begin{aligned}
 n_1(j-1) &= p_{71}(j-1)n_7(j-1) + [1 - p_{28}(j-1)]n_2(j-1) \\
 n_2(j-1) &= p_{42}(j)n_4(j) + [1 - p_{13}(j-1)]n_1(j-1) \\
 n_3(j) &= p_{13}(j-1)n_1(j-1) + [1 - p_{42}(j)]n_4(j) \\
 n_4(j) &= p_{64}(j)n_6(j) + [1 - p_{35}(j)]n_3(j) \\
 n_5(j) &= p_{35}(j)n_3(j) + [1 - p_{64}(j)]n_6(j) \\
 n_6(j) &= p_{86}(j+1)n_8(j+1) + [1 - p_{57}(j)]n_5(j) \\
 n_7(j+1) &= p_{57}(j)n_5(j) + [1 - p_{86}(j+1)]n_8(j+1) \\
 n_8(j+1) &= p_{28}(j+1)n_2(j+1) + [1 - p_{71}(j+1)]n_7(j+1) \\
 n_1 - n_2 &= n_3 - n_4 = n_5 - n_6 = n_7 - n_8 = Q
 \end{aligned} \tag{1.9}$$

Здесь  $Q$  — натекание в откачиваемом объеме, подсоединенном ко входу в насос;  $j = 0, 1, \dots, N$  — номер промежутка между дисками, причем номера  $j = 0, j = N$  соответствуют началу и концу насоса;  $p_{71}(j), p_{28}(j), \dots$  — вероятности прохода через роторные и статорные диски насоса, а также через промежутки между дисками в прямом и обратном направлениях. Хотя значения соответствующих вероятностей различны для середины и концов насоса, при большой длине насоса этими различиями можно пренебречь. В этом случае из системы уравнений (1.9) можно получить уравнение

$$\begin{aligned}
 n_8(j-1) + An_8(j+1) &= B, \quad A = \frac{p_{28}p_{42}p_{64}p_{86}}{p_{13}p_{35}p_{57}p_{71}} \\
 B &= Q \left( \frac{1 - p_{71}}{p_{71}} + \frac{p_{28}(1 - p_{13})}{p_{71}p_{13}} + \frac{p_{28}p_{42}(1 - p_{35})}{p_{71}p_{13}p_{35}} + \frac{p_{28}p_{42}p_{64}(1 - p_{57})}{p_{71}p_{13}p_{35}p_{57}} \right)
 \end{aligned} \tag{1.10}$$

Пусть в начале и конце насоса стоят статорные диски, задан поток  $n_8(N)$  из форвакуума через выходное сечение насоса и требуется найти поток газа  $n_5(0)$  через входное сечение насоса из откачиваемого объема. Решая уравнение (1.10), найдем

$$n_8(1) = \left[ n_8(N) - \frac{B}{1-A} \right] A^{1/2(N-1)} + \frac{B}{1-A} \tag{1.11}$$

Пользуясь шестым и девятым уравнениями системы (1.9), найдем

$$n_5(0) = \frac{p_{86}}{p_{57}} n_8(1) + \frac{Q}{p_{57}} \tag{1.12}$$

Выразив величины газовых потоков  $n_5(0), n_8(N)$  через концентрацию или давление газа на входе и выходе насоса (равенства типа (1.7)), можно найти величину степени сжатия, создаваемую турбомолекулярным насосом.

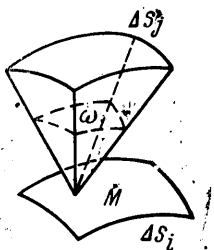
**§ 2. Вычисление элементов матрицы вероятностей переходов.** Значения вероятностей  $p_{ij}$  переходов с  $i$ -го элемента поверхности на  $j$ -й элемент зависят от взаимного расположения элементов, относительной плотности потока молекул, вылетающих с  $i$ -го элемента, и закона распределения их скоростей.

Рассмотрим простейший случай диффузного отражения молекул стенками объема, когда случайные скорости молекулы до и после удара о стенки независимы. При этом могут иметь место следующие случаи.

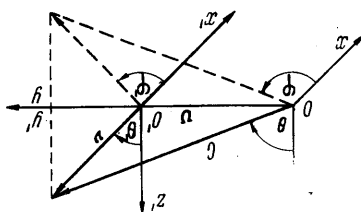
1. неподвижная стенка, для которой имеет место диффузное отражение по закону косинусов.

2. Движущаяся стенка, при соударении с которой молекула приобретает ее упорядоченную скорость в дополнение к своей случайной скорости, распределенной по закону косинусов.

3. Отверстия в стенке с заданным законом распределения скоростей молекул, влетающих в объем через эти отверстия.



Фиг. 3



Фиг. 4

Изложим некоторые способы вычисления вероятностей переходов при сделанных предположениях относительно распределения скоростей молекул в случае прямых пролетов молекул с одного элемента поверхности объема на другой и в случае, когда, кроме прямых пролетов, возможны пролеты с соударениями о молекулы или другие стенки.

а) *Вычисление вероятностей переходов в случае прямых пролетов молекул с элемента на элемент.* Если вся поверхность объема разбита на элементы, и поток газа в объеме молекулярный, т. е. столкновениями молекул между собой можно пренебречь, возможны только прямые пролеты молекул с элемента на элемент. Молекула, вылетающая из произвольной точки  $M(x, y, z)$   $i$ -го элемента, придет на  $j$ -й элемент, если произвольная по величине скорость этой молекулы направлена на  $j$ -й элемент, т. е. направление скорости лежит в пределах телесного угла  $\omega$ , охватывающего  $j$ -й элемент (фиг. 3). Обозначим через  $f(M, C)$  плотность распределения вероятности скорости  $C$  молекулы, вылетающей с  $i$ -го элемента. Для нахождения вероятности перехода  $p_{ij}$  нужно эту функцию проинтегрировать по всему диапазону скоростей в пределах телесного угла  $\omega$  и результат усреднить по поверхности  $i$ -го элемента

$$p_{ij} = \int_{\Delta S_i} \int_{\omega} \int_0^{\infty} f(M, C) dS d\omega dC, \quad C = |C| \quad (2.1)$$

Здесь  $d\omega$  — элемент телесного угла вокруг направления скорости молекулы;  $dS$ ,  $\Delta S_i$  — элемент поверхности и площадь поверхности  $i$ -го элемента.

Пусть поверхность объема разбита на элементы, достаточно малые для того, чтобы считать относительную плотность газового потока постоянной в пределах элемента, и размеры элементов много меньше расстояния между ними. Если при этом  $i$ -й элемент — неподвижная стенка, то из формулы (2.1) с учетом малости величин  $\omega$ ,  $\Delta S_i$  следует

$$p_{ij} = f(M, C) \omega = \pi^{-1} \cos \Theta_i \Delta S_j \cos \Theta_j / r_{ij}^2 \quad (2.2)$$

Здесь  $\Theta_i$ ,  $\Theta_j$  — углы между нормальными к элементам  $\Delta S_i$ ,  $\Delta S_j$  и направлением с  $i$ -го на  $j$ -й элемент;  $r_{ij}$  — расстояние между элементами  $\Delta S_i$ ,  $\Delta S_j$ .

Рассмотрим стенку, движущуюся со скоростью  $v$ . Молекулы, рассеянные движущейся стенкой, имеют максвелловское распределение скоростей  $v$  в системе координат  $x', y', z'$ , связанной с движущейся стенкой (ось  $O'z'$  совпадает с нормалью к поверхности в точке вылета молекулы, фиг. 4)

$$f(M, v) = \cos \Theta' 2\beta^4 \pi^{-4} v^3 \exp - \beta^2 v^2 \quad (2.3)$$

Здесь  $\Theta'$  — полярный угол вектора скорости  $v$ ,  $\beta = 2 / \sqrt{\pi v_0}$ ,  $v_0$  — средняя скорость теплового движения молекул газа. Подставляя в эту функцию распределения выражение  $C = v + v$ , получим функцию  $f(M, C)$  плотности распределения вероятности скоростей  $C$  молекул в неподвижной системе координат  $x, y, z$ . Пусть в системах координат  $x, y, z$  и  $x', y', z'$  совпадают направления соответствующих осей, и скорость стенки направлена по оси  $Oy$ . С учетом равенств  $v \cos \Theta' = C \cos \Theta$  (проекции скорости молекулы на оси  $Oz$  и  $O'z'$  равны) и  $v^2 d\omega' dv = C^2 d\omega dC$  (элементарные объемы в системах  $x, y, z$  и  $x', y', z'$ ) получим

$$\begin{aligned} f(M, C) dC d\omega = \\ = \cos \Theta 2\beta^4 \pi^{-4} C^3 \exp [-\beta^2 (C^2 - 2vC \sin \theta \sin \varphi + v^2)] dC d\omega \end{aligned} \quad (2.4)$$

Здесь  $\Theta, \varphi$  — полярные углы в системе  $x, y, z$ . Подставляя это выражение в формулу (2.1) и выполняя интегрирование по величине  $C$  скорости молекулы, получим

$$p_{ij} = \frac{1}{\Delta S_i \Delta S_j} \int_{\omega} \int_{\omega} J \cos \Theta d\omega dS \quad (2.5)$$

Здесь

$$J = e^{-\beta^2 v^2} \left\{ \frac{e^{\alpha^2}}{2\sqrt{\pi}} [1 + \Phi(\alpha)] (2\alpha^3 + 3\alpha) + \frac{1}{\pi} (7\alpha^2 + 1) \right\} \quad (2.6)$$

$$\Phi(\alpha) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\alpha} e^{-t^2} dt, \quad \alpha = \beta v \sin \Theta \sin \varphi$$

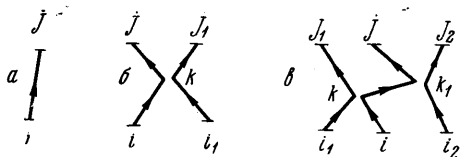
б) *Вычисление вероятностей перехода молекулы с одного элемента поверхности объема на другой с учетом промежуточных соударений молекулы со стенками объема.* Если поток газа в объеме — молекулярный и часть стенок, газоотделением которых можно пренебречь, не входит в выделенные  $N$  элементов, молекула, вылетающая с  $i$ -го элемента, может попасть на  $j$ -й элемент или непосредственно, или в результате произвольного числа  $r$  промежуточных соударений со стенками объема, не попавшими в выделенные  $N$  элементов.

При практических расчетах систем со сложной геометрией «негазых» стенок для вычисления вероятностей перехода удобно пользоваться методом статистических испытаний (метод Монте-Карло), реализуемый на цифровых вычислительных машинах. Метод заключается в математическом моделировании случайных блужданий молекулы, рассеянной  $i$ -м элементом, до попадания ее на  $j$ -й элемент после промежуточных соударений со стенками объема, не вошедшими в элементы. При многократном моделировании отношение числа  $N_{ij}$  траекторий, закончившихся приходом молекулы на  $j$ -й элемент, к общему числу  $N_i$  траекторий стремится к значению искомой вероятности

$$p_{ij} = N_{ij} / N_i \quad (2.7)$$

в) *Вычисление вероятностей перехода с учетом соударений между молекулами.* Разобьем все рабочее пространство и всю поверхность объема на элементы, достаточно малые для того, чтобы считать, что в пределах каждого такого элемента характеристики газового потока неизменны, и любая молекула сталкивается с другими молекулами не более одного раза. Обозначим символами  $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_i, \dots, \Delta S_j, \dots, \Delta S_N$  элементы поверхности;  $\Delta V_1, \dots, \Delta V_k, \dots, \Delta V_K$  — элементы рабочего пространства (фиг. 1).

Рассмотрим переход молекулы с элемента поверхности  $\Delta S_i$  на другой  $j$ -й элемент поверхности. Пусть при этом молекула испытала  $r$  соударений в произвольных элементах  $\Delta V_{k_1}, \Delta V_{k_2}, \dots, \Delta V_{k_r}$  рабочего пространства с произвольными молекулами  $i_1, i_2, \dots, i_r$ <sup>1</sup>. Пусть, в свою очередь, эти молекулы испытали до этого соударения с молекулами



Фиг. 5

$$i_{r+1}, i_{r+2}, \dots, i_{s-1}$$

Вероятность такого перехода с  $\Delta S_i$  на  $\Delta S_j$  обозначим через  $p_{ij}^{rs^2}$ .

Вероятность произвольного перехода с  $\Delta S_i$  на  $\Delta S_j$  равна

$$p_{ij} = \sum_{r,s} p_{ij}^{rs} \quad (2.8)$$

Выделим слагаемые с  $r \leq k_0, s \leq i_0$ , где  $k_0, i_0$  — некоторые числа

$$p_{ij} = \sum_{r=0}^{k_0} \sum_{s=1}^{i_0} p_{ij}^{rs} + \sum_{r=k_0+1}^{\infty} \sum_{s=i_0+1}^{\infty} p_{ij}^{rs} \quad (2.9)$$

При увеличении  $k_0, i_0$  остаточные члены ряда (2.9) становятся сколь угодно малыми, следовательно, при подсчете вероятностей  $p_{ij}$  перехода молекулы с элемента поверхности  $\Delta S_i$  на элемент поверхности  $\Delta S_j$  можно ограничиться учетом конечного числа членов ряда (2.9) при фиксированных значениях  $k_0, i_0$ . Эти значения зависят от требуемой точности вычислений и соотношения между размерами объема и длиной свободного пробега молекул газа в объеме.

Покажем, что вероятности  $p_{ij}^{rs}$  этих переходов выражаются через величины газовых потоков и вероятности парных соударений молекул, вычисляемые при единичных газовых потоках с элементов поверхности, входящих в рассматриваемую цепочку взаимодействий. В эту цепочку взаимодействий входят все молекулы, с которыми сталкивается молекула на своем пути с элемента  $\Delta S_i$  до элемента  $\Delta S_j$ . Относительно этих молекул предполагается, что известно их предшествующее движение, т. е. с какими молекулами и в каких элементах объема они соударялись до соударения с рассматриваемой молекулой, вылетевшей с  $i$ -го элемента.

Рассмотрим переход молекулы с элемента поверхности  $\Delta S_i$  на другой элемент поверхности  $\Delta S_j$ , изображенный схематически на фиг. 5, б, при произвольных  $k, i_1, j_1$ . Вероятность этого события может быть записана в виде

$$p_{ij}^{12} = \sum_{k, i_1} p\{i \rightarrow k\} q\{i \rightarrow k\} p\{k i_1\} p_i\{k \rightarrow j\} q\{k \rightarrow j\} \quad (2.10)$$

<sup>1</sup> Молекулы в объеме будем далее обозначать номером того элемента поверхности, которым они рассеяны.

<sup>2</sup> Переход с  $\Delta S_i$  на  $\Delta S_j$  при  $r=1, s=2$  изображен схематически на фиг. 5 б, переход при  $r=2, s=3$  — на фиг. 5 в.

Здесь  $p\{i \rightarrow k\}$  — вероятность вылета молекулы с элемента поверхности  $\Delta S_i$  по направлению к элементу объема  $\Delta V_k$ ;  $q\{i \rightarrow k\}$  — вероятность отсутствия соударений молекулы  $i$  от  $\Delta S_i$  до  $\Delta V_k$  с другими молекулами;  $p\{iki_1\}$  — вероятность столкновения молекулы  $i$  с молекулой  $i_1$  в пределах элемента  $\Delta V_k$ ;  $p_i\{k \rightarrow j\}$  — вероятность того, что после соударения скорость молекулы  $i$  направлена на элемент  $\Delta S_j$ .

Пусть вычислена вероятность  $\alpha\{iki_1\}$  столкновения молекулы  $i$  с молекулой  $i_1$  в пределах элемента объема  $\Delta V_k$ , если с элемента  $\Delta S_i$  в  $\Delta V_k$  приходит поток молекул, равной единице, а остальные потоки равны нулю. С учетом малости элементов объема справедлива формула

$$p\{iki_1\} = \alpha\{iki_1\}n_{i_1} \quad (2.11)$$

Событием, противоположным прямому пролету молекулы от  $\Delta S_i$  до  $\Delta V_k$ , будет столкновение молекулы с любой молекулой на пути от  $\Delta S_i$  до  $\Delta V_k$ . Поэтому

$$q\{i \rightarrow k\} = 1 - \sum_{i_2=1} \sum_{k' \subset (i,k)} p_{i_2 k'} \alpha\{ik'i_2\}n_{i_2} \quad (2.12)$$

Здесь  $p_{i_2 k'}$  — вероятность прохода молекулы  $i_2$  от  $\Delta S_2$  до элемента объема  $\Delta V_{k'}$ , которая запишется в виде, аналогичном (2.10).

В выражение для  $p_{i_2 k'}$  снова войдут множители типа (2.11), (2.12) и т. д. Уточнение выражения (2.10) для  $p_{ij}^{12}$  проводится до слагаемых порядка  $(an)^{k_0}$ . Подобным же образом можно найти остальные вероятности  $p_{ij}^{rs}$ , входящие в сумму (2.9) при  $r \leq k_0$ ,  $s \leq i_0$ . После подстановки выражения (2.9), полученного для  $p_{ij}$ , в систему уравнений (1.3) получим систему уравнений  $(k_0 + 1)$ -й степени относительно переменных  $n_j$ ,  $q_j$ . Коэффициенты этих уравнений определяются через вероятности парных соударений молекул.

Конкретизируем выражение (2.9) для вероятности  $p_{ij}$  перехода молекулы с произвольного элемента  $\Delta S_i$  поверхности объема на произвольный элемент  $\Delta S_j$ , если в выражении (2.9) можно принять  $k_0 = 1$ ,  $i_0 = 2$ , т. е. молекулы на пути между стенками объема соударяются не более одного раза (возможные цепочки взаимодействия изображены на фиг. 5, а, б), а поэтому

$$p_{ij} = p_{ij}^{01} + p_{ij}^{12} \quad (2.13)$$

$$p_{ij}^{01} = p\{i \rightarrow j\}q\{i \rightarrow j\}, q\{i \rightarrow j\} = 1 - \sum_{i_1} \sum_{k' \subset (i,j)} p\{i_1 \rightarrow k\}\alpha\{ik'i_1\}n_{i_1}$$

$$p_{ij}^{12} = \sum_{i_2, k} p\{i \rightarrow k\}\alpha\{iki_2\}p\{i_2 \rightarrow k\}n_{i_2}p_i\{k \rightarrow j\}$$

Здесь  $p_{ij}^{01}$  — вероятность перехода молекулы с  $\Delta S_i$  на  $\Delta S_j$  без соударений с другими молекулами (фиг. 5, а),  $p_{ij}^{12}$  — вероятность перехода за одно соударение (фиг. 5, б).

Аналогичным образом могут быть конкретизированы выражения вероятностей перехода при больших значениях  $k_0$ ,  $i_0$ , например, при  $k_0 = 2$ ,  $i_0 = 3$ . Возможные цепочки взаимодействия изображены на фиг. 5, а, б, в, молекула на пути между произвольными элементами  $\Delta S_i$ ,  $\Delta S_j$  поверхности объема соударяется с другими молекулами не более двух раз, а поэтому

$$p_{ij} = p_{ij}^{01} + p_{ij}^{12} + p_{ij}^{13} + p_{ij}^{23} \quad (2.14)$$

Здесь  $p_{ij}^{01}$  — вероятность прямого перехода молекулы с  $\Delta S_i$  на  $\Delta S_j$ ;  $p_{ij}^{12}$  — вероятность перехода молекулы с  $\Delta S_i$  на  $\Delta S_j$  в результате столк-

новения с другой молекулой, не испытывавшей еще ни одного соударения с другими молекулами;  $p_{ij}^{13}$  — вероятность перехода в результате соударения с молекулой, уже испытывавшей перед этим одно соударение;  $p_{ij}^{23}$  — вероятность перехода за два соударения с другими молекулами

$$p_{ij}^{01} = p\{i \rightarrow j\} q\{i \rightarrow j\}$$

Событием, противоположным прямому пролету с элемента поверхности  $\Delta S_i$  на элемент поверхности  $\Delta S_j$ , будет столкновение молекулы  $i$  в пределах элемента объема  $\Delta V_{k'}$ , лежащего на пути из  $\Delta S_i$  в  $\Delta S_j$ , с произвольной молекулой  $i_1$ , либо еще не испытывавшей ни одного соударения, либо испытывавшей соударение с любой другой молекулой  $i_2$  в пределах произвольного  $\Delta V_{k_1}$ , а поэтому

$$q\{i \rightarrow j\} = 1 - \sum_{i_1} \sum_{k' \subset (i,j)} p_{i_1 k'}^{01} \alpha\{ik'i_1\} n_{i_1} - \sum_{i_1, i_2, k_1} \sum_{k' \subset (i,j)} p_{i_1 k'}^{12} \alpha\{ik'i_1/i_1 k_1 i_2\} n_{i_1}$$

Здесь  $\alpha\{ik'i_1/i_1 k_1 i_2\}$  — вероятность соударения молекулы  $i$  с  $i_1$  в  $\Delta V_{k'}$ , вычисленная при условии, что из  $\Delta V_{k_1}$  в  $\Delta V_{k'}$  приходит поток молекул  $i_1$ , испытывавших соударение с молекулами  $i_2$  в  $\Delta V_{k_1}$ . Величина этого потока равна единице, других молекул в системе нет.

С учетом того что  $k_0 = 2$ , получим

$$p_{i_1 k'}^{01} = p\{i_1 \rightarrow k'\} \left[ 1 - \sum_{i_2} \sum_{k'' \subset (i_1, k')} p\{i_2 \rightarrow k''\} \alpha\{i_1 k'' i_2\} n_{i_2} \right]$$

$$p_{i_1 k'}^{12} = p\{i_1 \rightarrow k_1\} p\{i_2 \rightarrow k_1\} n_{i_2} \alpha\{i_1 k_1 i_2\} p_{i_1}\{k_1 \rightarrow k'\}$$

Аналогичным образом получим выражения для остальных слагаемых суммы (2.14)

$$p_{ij}^{12} = \sum_{i_1, k} p\{i \rightarrow k\} q\{i \rightarrow k\} \alpha\{iki_1\} p\{i_1 \rightarrow k\} q\{i_1 \rightarrow k\} \times \\ \times n_{i_1} p_i\{k \rightarrow j\} q_i\{k \rightarrow j\}$$

Здесь

$$q\{i \rightarrow k\} = 1 - \sum_{i_2} \sum_{k' \subset (i, k)} p\{i_2 \rightarrow k'\} \alpha\{ik'i_2\} n_{i_2}$$

$$q\{i_1 \rightarrow k\} = 1 - \sum_{i_2} \sum_{k' \subset (i_1, k)} p\{i_2 \rightarrow k'\} \alpha\{i_1 k' i_2\} n_{i_2}$$

$$q_i\{k \rightarrow j\} = 1 - \sum_{i_2} \sum_{k' \subset (k, j)} p\{i_2 \rightarrow k'\} \alpha\{ik'i_2/iki_1\} n_{i_2}$$

$$p_{ij}^{13} = \sum_{i_1, k, i_2, k_1} p\{i_1 \rightarrow k_1\} n_{i_1} \alpha\{i_1 k_1 i_2\} p\{i_2 \rightarrow k_1\} n_{i_2} p_{i_1}\{k_1 \rightarrow k\} \times \\ \times p\{i \rightarrow k\} \alpha\{iki_1/i_1 k_1 i_2\} p_i\{k \rightarrow j\}$$

$$p_{ij}^{23} = \sum_{i_1, k, i_2, k_1} p\{i \rightarrow k\} \alpha\{iki_1\} p\{i_1 \rightarrow k\} n_{i_1} p_i\{k \rightarrow k_1\} \times \\ \times \alpha\{ik_1 i_2/iki_1\} p_i\{k_1 \rightarrow j\} p\{i_2 \rightarrow k_1\} n_{i_2}$$

Рассмотренный способ расчета вероятностей  $p_{ij}$ , вообще говоря, пригоден лишь при диффузном отражении молекул стенками, так как эти



вероятности однозначно определяются лишь тогда, когда случайные скорости молекулы до и после удара о стенку независимы. Однако этот способ расчета можно использовать и при недиффузном отражении, если выбирать элементы поверхности и объема достаточно малыми, чтобы направление скорости молекулы до удара однозначно определялось взаимным расположением элементов. Уравнение материального баланса произвольного элемента  $\Delta S_j$  можно записать в виде

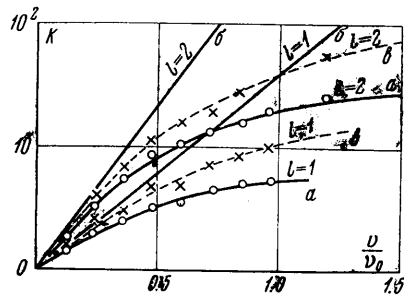
$$n_j = q_j + P_{1j}b_1 + \dots + P_{Nj}b_N \quad (2.15)$$

Здесь  $b_i = Q_i$ , если элемент  $\Delta S_i$  — стенка, и  $b_i = n_i$ , если элемент  $\Delta S_i$  — поверхность дырки;  $P_{ij}$  — вероятность прохода молекулы, выделившейся из стенки или влетевшей в объем через дырку, от элемента  $\Delta S_i$  до элемента  $\Delta S_j$  в результате произвольного числа соударений со стенками объема и другими молекулами. В процессе этого перехода молекула с вероятностью  $\gamma_l$  может быть поглощена стенкой ( $q_l$  для  $\Delta S_l$  записывается в форме (1.2)), а также уйти из объема через дырку.

В случае молекулярного потока, когда соударениями молекул между собой можно пренебречь, эта вероятность равна

$$P_{ij} = p_{ij} + \sum_k p_{ikj} + \sum_{k,l} p_{ilkj} + \dots$$

Здесь  $p_{ilkj}$  — вероятность последовательного перехода с элемента поверхности  $\Delta S_i$  на  $\Delta S_l$ , с  $\Delta S_l$  на  $\Delta S_k$ , с  $\Delta S_k$  на  $\Delta S_j$ . Подобным образом можно рассмотреть и тот случай, когда молекулы соударяются между собой и не диффузно рассеиваются стенками объема.



Фиг. 6

§ 3. Расчет газового потока в трубе с движущейся стенкой. В качестве примера приложения изложенного метода расчета вакуумных систем рассмотрим поток разреженного газа в трубе с движущейся стенкой. Этот вопрос представляет особый интерес в связи с тем, что приближенная теория расчета вакуумных молекулярных насосов, предложенная в работах [8, 9, 10], получила широкое распространение и представляется интересным выяснить границы ее применения.

В приближенной теории, по аналогии с молекулярными потоками в трубах с неподвижными стенками, предполагается, что давление в поперечном сечении канавки постоянно. Суммарный молекулярный поток внутри насоса рассматривается как суперпозиция наведенного ротором потока молекул, пропорционального относительному числу молекул, ударившихся о ротор, и обратного ему диффузионного потока, причем предполагается, что он такой же, как в соответствующей трубе с неподвижными стенками. Из работы [9] с учетом поправки [1] на конечную длину канавки следует, что для длинной одиночной канавки прямоугольного поперечного сечения, верхняя стенка которой движется вдоль канавки со скоростью  $v$ , степень сжатия  $K_0$  в отсутствие натекания равна

$$K_0 = \exp \frac{3vl}{4v_0b} \left( 1 + \frac{8ab}{3(a+b)l} \right) \quad (3.1)$$

где  $l$  — длина,  $b$  — глубина,  $a$  — ширина канавки,  $v_0$  — средняя скорость теплового движения молекул газа.

На фиг. 6 изображена зависимость степени сжатия  $K$  от относительной скорости  $v/v_0$  движения стенки при разных длинах  $l$  канавки ( $l = 1$  см,  $l = 2$  см,  $a = 0.4$  см,  $b = 0.3$  см),  $a$  — рассчитанная изложенным методом на ЦВМ,  $b$  — рассчитанная по формуле (3.1). Из этих графиков видно, что приближенная теория применима только в области малых скоростей. При увеличении скорости движения стенки степень сжатия не увеличивается безгранично, как следует из приближенной теории, а стремится к некоторому пределу, определяемому потоком молекул, проходящих с вероятностью  $p_0$  с выхода на вход канавки без соударения с движущейся стенкой (сюда относятся

и молекулы, проходящие с выхода на вход канавки без соударения с ее стенками). Этот поток в приближенной теории не учитывается, однако не только этим объясняются недостатки этой теории.

Степень сжатия без учета прямого пролета рассчитывается по формуле

$$K_1 = p_{12}(p_{21} - p_0)^{-1}$$

где значение вероятности  $p_0$  можно вычислить методом Монте-Карло (кривые  $b$  на фиг. 6). Теперь  $K_1 \rightarrow \infty$  при  $v \rightarrow \infty$ , однако, как видно из фиг. 6,  $K_1$  возрастает медленнее, чем это следует из приближенной теории.

Итак, в простейшем случае одиночной «прямоугольной» канавки приближенная теория верна лишь при малых скоростях движения стенки (значительные расхождения начинаются уже со значений  $v > 0.5v_0$ ). Применение этого метода для расчета реальных конструкций молекулярных насосов требует принятия еще больших предосторожностей.

Расчеты показали, что вероятность  $p_0$  лишь немного превышает значение вероятности  $p_n$  прямого пролета молекул через канавку без столкновения с ее стенками. Значение же вероятности  $p_n$  легко вычисляется из геометрических соображений. При увеличении скорости ротора значение вероятности  $p_{21}$  стремится к  $p_0 \approx p_n$ , а значение вероятности  $p_{12}$  увеличивается до некоторого предела, определяемого геометрией входной части системы и не превосходящего 1. Поэтому в качестве оценки верхней границы степени сжатия  $K^+$ , которая не может быть превзойдена ни при каком увеличении скорости ротора, можно воспользоваться формулой

$$K^+ = p_n^{-1} \quad (3.2)$$

Здесь для длинной прямоугольной канавки вероятность  $p_n$  прямого пролета приближенно равна

$$p_n = ab(\pi l^2)^{-1} \quad (3.3)$$

Поступило 6 IV 1967

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Дэшман С. Научные основы вакуумной техники. Изд. иностр. лит., 1950.
2. Beams J. W. Bakeable molecular pumps. 7-th Nat. Sympos. Vacuum Technol. Trans. Cleveland, Ohio, 1960. Pergamon Press, 1961, 1—5 (русск. перев. Бимс Дж. Прогреваемые молекулярные насосы. Сб. «Современная вакуумная техника», Изд. иностр. лит., 1963).
3. Bekker W. Eine neue Molekularpumpe. Vakuu-Techn., 1958, vol. 7, No. 7, p. 149.
4. Davis D. N. Monte-Carlo Calculation of Molecular Flow. Rates Through Cylindrical Elbow and Pipes of Other Shapes, J. Appl. Phys., 1960, vol. 31, No. 7, p. 1169.
5. Levenson L. L., Mulleron N., Davis D. N. The Optimization of Molecular Flow Conductance. Trans seventh National Symposium on Vacuum Technology, Trans. Cleveland, Ohio, 1960, N.-Y., London, Pergamon Press, 1961, p. 372 (русск. перев. Левенсон Л., Миллерон Н., Дэвис Д., Выбор оптимальной проводимости вакуумной системы в режиме молекулярного течения. В сб.: Современная вакуумная техника. Изд. иностр. лит., 1963).
6. Levenson L. L., Mulleron N., Davis D. N. Conductance en ecoulement moleculaire, Vide, No. 103, Janvier — Fevrier, 1963, p. 42—54.
7. Mercier C. Theorie des pompes moleculaires aux tres basses pressions. Journal de Physique et le Radium. Phys. Appl., 1956, t. 17, No. 3, p. 1A a IIA, Paris, Mars.
8. Gaede W., Die Molecularluftpumpe, Ann. Physik, 1913, B. 41, S. 337.
9. Jacobs R. B., The Design of Molecular Pumps, J. Appl. Phys. 1951, vol. 22, No. 2, p. 217.
10. Bekker W. Zur Theorie der Turbo-Molecular-Pumpe, Vakuu Techn., 1961, vol. 10, No. 7, p. 199.
11. Haviland J. K., Lavin M., Trilling L., Application of the Monte-Karlo method to rarefied gas flows, Arch. mech. stosowaney, 1962, vol. 14, No. 3—4, p. 538—591.