

АСПИРАЦИЯ АЭРОЗОЛЯ ЧЕРЕЗ ЩЕЛЬ КОНЕЧНОЙ ШИРИНЫ

И. М. ЮРЬЕВ

(Москва)

Аспирация аэрозолей вычислена Л. М. Левиным для стока, имитирующего достаточно узкую щель или тонкую трубку [1].

В данной работе определяется коэффициент аспирации частиц аэрозоля для плоской насадки конечной ширины. Для сильно инерционных частиц аэрозоля, когда $k \gg k_*$, где k — число Стокса и k_* — его критическое значение, применимы приближенные уравнения, предложенные в работе [2].

При $k \leq k_*$, когда нет инерционного осаждения частиц аэрозоля на стенки насадки, применяется метод малого параметра. Коэффициент аспирации вычислен с точностью до k^2 включительно. Приводятся некоторые числовые данные и сравнение со стоком.

§ 1. Пусть сферические частицы аэрозоля двигаются по закону Стокса и не влияют на движение несущего их воздуха или жидкости. В природе это имеет место, например, в атмосфере, где в одном кубическом метре облака содержится около одного грамма воды. Движение воздуха при заборе аэрозолей в насадку предполагаем идеальным с потенциалом Φ . Если от частиц аэрозоля перейти к континууму, то, согласно А. М. Яглому и А. Робинзону [1], существует потенциал движения аэрозольной «жидкости» Φ . Уравнение движения аэрозолей имеет вид

$$k \, dV/dt + V = W + F \quad (1.1)$$

Здесь V и W — вектора скорости движения аэрозолей и несущей их жидкости, F — сумма сил тяжести и остальных сил, имеющая потенциал $-U$. Уравнение (1.1) имеет первый интеграл

$$\frac{k}{2} \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] + \Phi = \varphi - U \quad (1.2)$$

Пусть $F = 0$, $\partial \Phi / \partial z = 0$, и на бесконечности имеем параллельное оси x невозмущенное течение, причем $V_\infty = W_\infty$. Число Стокса k будет безразмерным параметром

$$k = \frac{\rho_p d^2 w_\infty}{18 \eta l} \quad (1.3)$$

Здесь ρ_p — плотность частицы аэрозоля, d — ее диаметр, η — коэффициент вязкости воздуха или жидкости, несущей частицы аэрозоля. Характерным размером l в данной работе будет полуширина насадки. Все величины уравнений (1.1) и (1.2) приведены к безразмерному виду, и поэтому задача рассматривается при полуширине насадки и величине скорости на бесконечности, равных единицам. К уравнению (1.2) добавим вытекающие из уравнения неразрывности аэрозольной жидкости

$$\operatorname{div} nV = 0 \quad (1.4)$$

для плоского движения уравнения

$$n \partial \Phi / \partial x = \partial \Psi / \partial y, \quad n \partial \Phi / \partial y = -\partial \Psi / \partial x \quad (1.5)$$

где численная концентрация частиц аэрозоля n рассматривается как плотность, а Ψ — функция тока этой «жидкости».

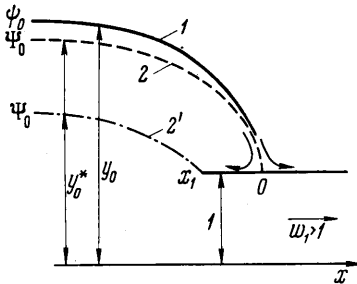
Согласно [2], из уравнений (1.5) следует

$$\ln \frac{n}{n_\infty} = - \int_{-\infty}^x \left[\frac{\Delta \Phi}{\Phi_x} \right]_{\Psi = \text{const}} dx \quad (1.6)$$

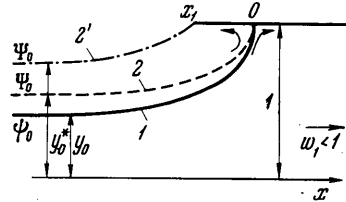
Скорости движения, вообще говоря, малы, и поэтому $\Delta \varphi = 0$. Уравнения (1.2), (1.5) в независимых переменных φ, ψ , где $\psi(x, y)$ гармонически сопряжена $\varphi(x, y)$, имеют вид

$$\frac{k}{2} w^2 \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \psi} \right)^2 \right] + \Phi = \varphi, \quad n \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = \frac{\partial \Psi}{\partial \psi}, \quad n \frac{\partial \Phi}{\partial \psi} = - \frac{\partial \Psi}{\partial \varphi} \quad (1.7)$$

Здесь w — величина скорости движения воздуха. Переменная $\psi = \psi^\circ / \rho$, где ψ° и ρ — функция тока и плотность воздуха.



Фиг. 1



Фиг. 2

§ 2. При симметричном относительно оси x течении коэффициент аспирации A равен

$$A = \frac{y_0^*}{y_0} = \frac{\Psi_0}{n_\infty \psi_0} \quad (\psi_0 = y_0, \quad \Psi_0 = n_\infty y_0^*) \quad (2.1)$$

Здесь ψ_0 и Ψ_0 соответственно значения ψ и Ψ на критических линиях тока воздуха и аэрозольной жидкости, ограничивающих области, из которых воздух и аэрозоли попадают в насадку, и проходящих вдали перед насадкой на расстояниях y_0 и y_0^* от оси симметрии. Насадку схематизируем двумя полубесконечными параллельными прямыми.

На фиг. 1 и 2 изображены критические линии тока воздуха и аэрозольной жидкости соответственно при $w_1 > 1$ и $w_1 < 1$, где w_1 — скорость движения воздуха в насадке. Линии тока $\psi = \psi_0$ представлены кривыми 1. При безотрывном втекании $\psi_0 = y_0 = w_1$. При $w_1 > 1$ критическая точка O движения воздуха лежит на внешней стороне насадки, а при $w_1 < 1$ — на внутренней. Кривые 2 и 2' изображают линии тока Ψ_0 , причем кривые 2' проходят через край насадки под углом к ее стенке и соответствуют случаю $k > k_*$.

При этом часть частиц аэрозоля из области $\Psi > \Psi_0$ при $w_1 > 1$ инерционно осаждаются на внешней стороне насадки. При $w_1 < 1$ часть аэрозолей из области $\Psi < \Psi_0$ осаждаются на ее внутренней стороне. Кривые 2 соответствуют $k \leq k_*$, когда нет инерционного осаждения. В соответствии с [4] и последующими выкладками, в этом случае течение аэрозольной «жидкости» имеет критическую точку, совпадающую с критической точкой движения воздуха.

Если w_1 фиксировано, то при $k \rightarrow \infty$, очевидно, $A \rightarrow w_1^{-1}$, так как сильно инерционные частицы аэрозоля будут двигаться почти параллельно оси x и $y_0^* \approx 1$. При $k \rightarrow 0$, очевидно, $A \rightarrow 1$. Для режимов, близких к этим

предельным режимам, нетрудно получить простые решения. В первом случае, когда $k \gg k_*$, имеем $\partial\Phi'/\partial x$, $\partial\Phi'/\partial y \ll 1$, где $\Phi' = \Phi - x$, и главной частью уравнения (1.2) будет

$$k\partial\Phi'/\partial x + \Phi' - \varphi' = 0 \quad (\varphi' = \varphi - x - 1/2k) \quad (2.2)$$

Согласно [2], приближению (2.2) соответствует $n = n_\infty = \text{const}$, и для Ψ' получим

$$k\partial\Psi'/\partial x + \Psi' - n_\infty\psi' = 0$$

т. е.

$$\Psi' = \frac{n_\infty}{k} \exp\left(-\frac{x}{k}\right) \int_{-\infty}^x \exp\left(\frac{x}{k}\right) \psi'(x, y) dx \quad (\Psi' = \Psi - n_\infty y, \quad \psi' = \psi - y). \quad (2.3)$$

При $k \leq k_*$ используем метод малого параметра. Из первого уравнения (1.7) получим

$$\Phi - \varphi = \sum_{n=1}^{\infty} k^n \alpha_n(\varphi, \psi); \quad \alpha_1 = -\frac{w^2}{2}, \quad \alpha_2 = \frac{w^2}{2} \frac{\partial w^2}{\partial \varphi}, \dots, \\ \alpha_n = -\frac{w^2}{2} s_{n-1}(\varphi, \psi).$$

$$s_{n-1} = 2 \frac{\partial \alpha_{n-1}}{\partial \varphi} + \sum_{i=1}^{i=n-2} \left(\frac{\partial \alpha_i}{\partial \varphi} \frac{\partial \alpha_{n-1-i}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \alpha_i}{\partial \psi} \frac{\partial \alpha_{n-1-i}}{\partial \psi} \right) \quad (2.4)$$

Из последнего уравнения системы (1.7) можно при $n = n_\infty$ определить точно первый коэффициент ряда для $\Psi' = \Psi - n_\infty \psi$

$$\Psi' = k\beta_1(\varphi, \psi) + k^2\beta_2(\varphi, \psi) + \dots, \quad \beta_1 = \frac{n}{2} \int_{-\infty}^{\varphi} \frac{\partial w^2}{\partial \psi} d\varphi \quad (2.5)$$

Из второго уравнения системы (1.7) следует

$$\frac{n}{n_\infty} = 1 + \frac{k}{2} \left(\frac{\partial w^2}{\partial \varphi} + \int_{-\infty}^{\varphi} \frac{\partial^2 w^2}{\partial \psi^2} d\varphi \right) + O(k^2) \quad (2.6)$$

Теперь из третьего уравнения системы (1.7) при помощи (2.4) и (2.6) можно найти после преобразований, используя аналитичность функции $\ln w - i\theta$ от $z = x + iy$ или $f = \varphi + i\psi$, где θ — угол наклона вектора скорости к оси абсцисс, коэффициент β_2

$$n_\infty^{-1} \beta_2 = -w^4 \frac{\partial \ln w}{\partial \psi} + 2 \int_{-\infty}^{\varphi} w^2 \frac{\partial \ln w}{\partial \psi} \left[\int_{-\infty}^{\varphi} w^2 \left(\left(\frac{\partial \ln w}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial \ln w}{\partial \psi} \right)^2 \right) d\varphi \right] d\varphi \quad (2.7)$$

С ростом w_1 приближаемся к узкой щели, схематизируемой стоком с расходом $2w_1$. Для стока коэффициент аспирации уже вычислялся методом малого параметра [1] в независимых переменных x, y . По Л. М. Левину, первые два члена со степенями k и k^2 дают хорошее совпадение при $A > 0.8$ с результатами численного интегрирования системы точных обыкновенных нелинейных уравнений. Ограничимся и здесь для определения A первыми двумя членами ряда (2.5).

§ 3. Решение, полученное из [3], реализующее безотрывное течение в данной насадке, выражается формулой [3]

$$f - w_1 z - (w_1 - 1) \exp \frac{\pi(z - f)}{w_1 - 1} = 0 \quad (f = \varphi + i\psi, z = x + iy) \quad (3.1)$$

или

$$\begin{aligned} \varphi - w_1 x - (w_1 - 1) \exp \left[\frac{\pi(x - \varphi)}{w_1 - 1} \right] \cos \frac{\pi(y - \psi)}{w_1 - 1} &= 0, \\ \psi - w_1 y - (w_1 - 1) \exp \left[\frac{\pi(x - \varphi)}{w_1 - 1} \right] \sin \frac{\pi(y - \psi)}{w_1 - 1} &= 0 \end{aligned} \quad (3.2)$$

Обозначим

$$\xi = \mu + i\nu = \frac{\pi}{w_1 - 1}(f - w_1 z), \quad \mu = \frac{\pi(\varphi - w_1 x)}{w_1 - 1}, \quad \nu = \frac{\pi(\psi - w_1 y)}{w_1 - 1} \quad (3.3)$$

Формулы (3.2) преобразуются к виду

$$\begin{aligned} \varphi &= -\frac{w_1}{\pi} \ln \left(-\frac{\nu}{\pi} \operatorname{csc} \frac{\pi\psi + \nu}{w_1} \right) + \frac{\nu}{\pi} \operatorname{ctg} \frac{\pi\psi + \nu}{w_1} \\ x &= -\frac{1}{\pi} \ln \left(-\frac{\nu}{\pi} \operatorname{csc} \frac{\pi\psi + \nu}{w_1} \right) + \frac{\nu}{\pi} \operatorname{ctg} \frac{\pi\psi + \nu}{w_1} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Дифференцируя (3.1) по z , получим

$$\frac{df}{dz} = w e^{-i\theta} = \frac{w_1 + \xi}{1 + \xi}, \quad w^2 = \frac{(w_1 + \mu)^2 + \nu^2}{(1 + \mu)^2 + \nu^2} \quad (3.5)$$

На стенке насадки $\psi = \psi_0 = w_1$, $y = 1$, т. е. $\nu = 0$. Из (3.5), (3.3), (3.2) следует, что в критической точке x_0 , φ_0 , где $w = 0$, на крае насадки x_1 , φ_1 , где $w = \infty$, и вообще всюду на стенке насадки соответственно имеем

$$\begin{aligned} \varphi_0 - w_1 x_0 &= -\frac{w_1(w_1 - 1)}{\pi}, \quad \varphi_1 - w_1 x_1 = \frac{1 - w_1}{\pi} \\ x - \varphi &= \frac{w_1 - 1}{\pi} \ln \frac{w_1 x - \varphi}{w_1 - 1} \end{aligned}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{1}{\pi} \left(w_1 - \ln \frac{w_1}{\pi} \right), \quad \varphi_0 = \frac{w_1}{\pi} \left(1 - \ln \frac{w_1}{\pi} \right) \\ x_1 &= \frac{1 + \ln \pi}{\pi}, \quad \varphi_1 = \frac{1 + w_1 \ln \pi}{\pi} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Разложение (2.4) в окрестности $x = x_1$, $y = 1$ не годится ввиду $w = \infty$ в этой точке.

Расстояние критической точки от края насадки равно $x_0 - x_1 = \pi^{-1}(w_1 - 1 - \ln w_1)$. Если при помощи формулы (3.1) представить z в окрестности критической точки $z_0 = x_0 + i$ в виде ряда по степеням $\xi - \xi_0$, где $\xi_0 = -w_1$, а затем $\xi - \xi_0$ по степеням $z - z_0 = x' + iy'$, то для φ получим

$$\varphi - \varphi_0 = \frac{\pi w_1}{2(w_1 - 1)^2} (x'^2 - y'^2) - \frac{\pi^2 w_1 (1 + 2w_1)}{6(w_1 - 1)^4} (x'^3 - 3x'y'^2) + \dots \quad (3.7)$$

Предполагая для определения k_* , что z_0 также критическая точка аэрозольной жидкости, из уравнения (1.2) при помощи (3.7) получим

$$\Phi - \Phi_0 = \varepsilon_1 x'^2 + \varepsilon_2 y'^2 + \varepsilon_3 x'^3 + \varepsilon_4 x' y'^2 + \dots \quad (3.8)$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1 - w_1 + \sqrt{(w_1 - 1)^2 + 4\pi w_1 k}}{4(w_1 - 1)k}, \quad \varepsilon_2 = \frac{1 - w_1 + \sqrt{(w_1 - 1)^2 - 4\pi w_1 k}}{4(w_1 - 1)k}$$

$$\varepsilon_3 = -\frac{\pi^2 w_1 (1 + 2w_1)}{3(w_1 - 1)^3 (1 - w_1 + 3\sqrt{(w_1 - 1)^2 + 4\pi w_1 k})}$$

$$\varepsilon_4 = \frac{\pi^2 w_1 (1 + 2w_1)}{(w_1 - 1)^3 (2\sqrt{(w_1 - 1)^2 - 4\pi w_1 k} + \sqrt{(w_1 - 1)^2 + 4\pi w_1 k} + 1 - w_1)}$$

Из радикала для $\varepsilon_2, \varepsilon_4$ заключаем, что при

$$k > k_* = \frac{(w_1 - 1)^2}{4\pi w_1} \quad (3.9)$$

разложение вида (3.8) невозможно. В этом случае надо исходить из схемы инерционного осаждения частиц аэрозоля на стенки насадки. Из уравнения $y'(x) = \Phi_y / \Phi_x$ при помощи (3.8) найдем, что уравнение линии $\Psi = \Psi_0$ при $k \leq k_*$ в окрестности z_0 будет таким:

$$x' = \frac{\varepsilon_4}{2(2\varepsilon_2 - \varepsilon_1)} y'^2 \quad (3.10)$$

Выделяя из уравнения (1.6) при помощи (3.8), (3.10) главную часть в окрестности критической точки, получим

$$\frac{n}{n_\infty} = \left| \frac{\varepsilon_4}{2(2\varepsilon_2 - \varepsilon_1)} \right|^{-1/\kappa(1+\theta)} (y - 1 - (1+\theta) \left(\theta = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \right)) \quad (3.11)$$

Согласно (3.8) имеем $\varepsilon_1 \varepsilon_2^{-1} + 1 > 0$. При $k = k_*$ имеем

$$\frac{\varepsilon_4}{2\varepsilon_2 - \varepsilon_1} = -\frac{\pi(1 + 2w_1)}{(w_1 - 1)^2}, \quad \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} + 1 = 2 - \sqrt{2}$$

При $k \rightarrow 0$ и фиксированном w_1

$$\frac{\varepsilon_4}{2\varepsilon_2 - \varepsilon_1} \rightarrow -\frac{\pi(1 + 2w_1)}{3(w_1 - 1)^2}, \quad \frac{1}{k} \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} + 1 \right) \rightarrow \frac{2\pi w_1}{(w_1 - 1)^2}$$

Очевидно, аналогичным путем можно определить k_* и n в окрестности критической точки для любого тела захвата.

§ 4. Для определения при $k \gg k_*$ коэффициента аспирации надо вычислить по формуле (2.3) значение Ψ' в точке $x = x_1, y = 1$. При $y = 1$, согласно (3.3), (3.4), имеем $x = \pi^{-1}(\nu \operatorname{ctg} \nu + \ln \pi \sin \nu - \ln \nu)$. Интервалу изменения $-\infty < x \leq x_1$ вдоль $y = 1$ соответствует интервал $-\pi \leq \nu \leq 0$. При помощи (2.1) и (2.3) получим

$$A = \frac{1}{w_1} + \frac{w_1 - 1}{\pi^2 w_1 k} \exp \frac{-1}{\pi k} \int_0^{-\pi} \frac{\pi + \nu}{\nu} [(1 - \nu \operatorname{ctg} \nu)^2 + \nu^2] \left(\frac{\sin \nu}{\nu} \right)^{1/\pi k} \exp \frac{\nu \operatorname{ctg} \nu}{\pi k} d\nu \quad (4.1)$$

Формула (4.1) тем точнее, чем меньше $A - w_1^{-1}$ по сравнению с w_1^{-1} .

Переходя к $k < k_*$, убедимся прежде всего, что метод малого параметра реализует движение аэрозольной жидкости с общей с движением воздуха критической

точкой $\xi = \xi_0 = -w_1$. Для этого покажем, что в точке ξ_0 все коэффициенты ряда (2.4) равны нулю. Порядок величин производных от w по φ, ψ в окрестности ξ_0 будет, очевидно, определяться степенью $(w_1 + \xi)$. Согласно (3.5),

$$w^2 = O(|w_1 + \xi|^2). \quad (4.2)$$

При помощи (3.4), (3.5) получим

$$\frac{d}{df}(\ln w - i\theta) = \frac{\partial}{\partial \varphi}(\ln w - i\theta) = -i \frac{\partial}{\partial \psi}(\ln w - i\theta) = \frac{\pi(w_1 - 1)\xi}{(1 + \xi)(w_1 + \xi)^2} \quad (4.3)$$

и, следовательно,

$$\partial \ln w / \partial \varphi \leq O(|w_1 + \xi|^{-2}), \quad \partial \ln w / \partial \psi \leq O(|w_1 + \xi|^{-2}) \quad (4.4)$$

Производная любого порядка от $\ln w$ по φ и ψ , выводится и оценивается из формулы (4.3) дифференцированием ее надлежащее количество раз по f и использованием формул (3.3), (3.5). Таким путем придем к оценке в окрестности ξ_0

$$\frac{d^m}{df^m}(\ln w - i\theta) = O((w_1 + \xi)^{-2m}) \quad (4.5)$$

Следовательно,

$$\partial^m \ln w / \partial \varphi^i \partial \psi^{m-i} \leq O(|w_1 + \xi|^{-2m}), \quad \partial^m w^2 / \partial \varphi^i \partial \psi^{m-i} \leq O(|w_1 + \xi|^{2-2m}).$$

Переходя к формуле (2.4), заметим, что если в окрестности критической точки производные от α_j ($j \leq n-1$) имеют оценку

$$\partial^m \alpha_j / \partial \varphi^i \partial \psi^{m-i} \leq O(|w_1 + \xi|^{2-2m}). \quad (4.7)$$

то $\alpha_n = 0$ при $\xi = \xi_0$, а производные от α_n в окрестности ξ_0 также оцениваются формулой (4.7).

Следовательно, при $\xi = \xi_0 = -w_1$ имеем $\alpha_{n+1} = 0$ и т. д. Поскольку $\alpha_1 = 1/2 w^2$, то теперь очевидно, что все коэффициенты ряда (2.4) равны нулю в точке ξ_0 . Из (2.4) и (1.2) затем следует $\Phi = \varphi = \varphi_0$ и $\Phi_x = \Phi_y = 0$ при $\xi = \xi_0$, т. е. ξ_0 будет критической точкой и для течения аэрозольной «жидкости». На разгонном участке течений от критической точки до края насадки потенциал аэрозольной «жидкости» возрастает меньше, чем потенциал воздуха. Вследствие конечности φ_1, Φ_1 на крае насадки из уравнения (1.2) следует конечность скорости аэрозольной жидкости в этой точке.

Величина $\Psi'(\varphi, \psi) = \Psi - n_\infty \psi$ в точке φ, ψ_0 определяет количество аэрозольной «жидкости», протекающее вследствие инерционности через критическую линию тока воздуха на участке от $\varphi = -\infty$ до данного φ . Очевидно, при $w_1 > 1$ имеем $\Psi' < 0$. Для определения коэффициента аспирации надо вычислить Ψ' в точке ξ_0 . В этой точке $w^2 \partial \ln w / \partial \psi = 0$. Согласно (3.4), интервалу изменения $-\infty < \varphi \leq \varphi_0$ вдоль ψ_0 соответствует интервал $-\pi w_1 \leq \nu \leq 0$. На линии $\psi = \psi_0 = w_1$, согласно (3.3), (3.4), имеем $\mu = -\nu \operatorname{ctg} \nu / w_1$. Определяя из (4.3) производные от $\ln w$ для интегралов (2.5), (2.7) и переходя от φ к ν вдоль $\psi = \psi_0 = w_1$, а затем к ζ по формуле $\nu = \pi w_1 (\zeta - 1)$, опуская промежуточные выкладки, получим

$$A = 1 + kJ_1 + k^2 J_2 \quad (4.8)$$

$$J_1 = \pi w_1 (1 - w_1) \int_0^1 \frac{J_1^*}{J_2^*} d\zeta, \quad J_2 = 2\pi^4 w_1^2 (1 - w_1)^3 \int_0^1 \frac{J_1^*}{J_2^*} \left(\int_0^\zeta \frac{1 - \zeta}{J_2^*} d\zeta \right) d\zeta$$

$$J_1^* = \pi^2 (1 + 2w_1 + 2\pi w_1 (1 - \zeta) \operatorname{ctg} \pi \zeta) (1 - \zeta)^2 - \sin^2 \pi \zeta$$

$$J_2^* = \sin^2 \pi \zeta ((1 + \pi w_1 (1 - \zeta) \operatorname{ctg} \pi \zeta)^2 + \pi^2 w_1^2 (1 - \zeta)^2)$$

Возьмем для сравнения сток мощностью $2w_1$. Имеем

$$f = \varphi + i\psi = z - \frac{w_1}{\pi} \ln z, \quad \varphi = x - \frac{w_1}{\pi} \ln \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \psi = y - \frac{w_1}{\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{y}{x} \quad (4.9)$$

Для формул (2.5), (2.7) элементарно получим

$$w^2 = \frac{(w_1 - \pi x)^2 + \pi^2 y^2}{\pi^2(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial \ln w}{\partial \psi} = -\frac{2\pi^4 w_1 y (w_1 - \pi x)}{((w_1 - \pi x)^2 + \pi^2 y^2)^2} \quad (4.10)$$

$$\left(\frac{\partial \ln w}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial \ln w}{\partial \psi}\right)^2 = \frac{\pi^2 w_1^2}{((w_1 - \pi x)^2 + \pi^2 y^2)^2}$$

Из (4.9) следует также

$$x = y \operatorname{ctg} \frac{\pi}{w_1}(y - \psi), \quad \varphi = y \operatorname{ctg} \frac{\pi}{w_1}(y - \psi) - \frac{w_1}{\pi} \ln \frac{y}{\sin \pi w_1^{-1}(\psi - y)} \quad (4.11)$$

Вдоль критической линии тока $\psi = w_1$ для y имеем $0 \leq y \leq w_1$. После вычисления интегралов (2.5), (2.7) определяем по формуле (2.1) коэффициент аспирации стока

$$A_- = 1 + kJ_{1-} + k^2 J_{2-} \quad (4.12)$$

$$J_{1-} = -\frac{1}{\pi w_1} \int_0^1 \frac{\sin^2 \pi \zeta}{(1 - \zeta)^2} d\zeta = -\frac{1.415}{w_1} \left(\zeta = 1 - \frac{y}{w_1} \right)$$

$$J_{2-} = -\frac{4}{\pi w_1^2} \int_0^1 \frac{\sin^2 \pi \zeta (1 + \pi(1 - \zeta) \operatorname{ctg} \pi \zeta)}{(1 - \zeta)^2} \left(\int_0^\zeta \frac{\sin^2 \pi \xi}{(1 - \xi)^3} d\xi \right) d\zeta = -\frac{1.46}{w_1^2}$$

Отношения соответствующих коэффициентов при k и k^2 в формулах (4.8) и (4.12) при $w_1 \rightarrow \infty$ стремятся к единице. Значения J_1, J_2, J_{1-}, J_{2-} даны в таблице.

w_1	$-J_1$	$-J_{1-}$	$-J_2$	$-J_{2-}$	k_*	w_1	$-J_1$	$-J_{1-}$	$-J_2$	$-J_{2-}$	k_*
1.2	0.73	1.18	9.6	0.01	0.0027	4	0.31	0.35	0.099	0.091	0.179
1.4	0.67	1.01	2.7	0.75	0.0091	4.5	0.28	0.31	0.077	0.072	0.217
1.6	0.62	0.89	1.35	0.57	0.0018	5	0.25	0.28	0.061	0.058	0.255
1.8	0.58	0.79	0.83	0.45	0.028	6	0.22	0.24	0.042	0.041	0.332
2.0	0.54	0.71	0.58	0.37	0.040	7	0.19	0.20	0.030	0.030	0.409
2.2	0.50	0.64	0.43	0.30	0.052	8	0.17	0.18	0.023	0.023	0.488
2.4	0.47	0.59	0.34	0.25	0.066	9	0.15	0.16	0.018	0.018	0.567
2.6	0.44	0.54	0.27	0.22	0.079	10	0.13	0.14	0.015	0.015	0.645
2.8	0.42	0.51	0.23	0.19	0.092	15	0.091	0.094	0.0065	0.0065	1.04
3.0	0.39	0.47	0.19	0.16	0.106	20	0.069	0.071	0.0036	0.0036	1.44
3.5	0.35	0.40	0.13	0.12	0.142						

При $k \leq k_*$ коэффициент A близок к единице. Например, при $w_1 = 2$ имеем $k_* = 0.0398$, $k_* J_1 \approx 0.0215$, $k_*^2 J_2 \approx 0.0009$. Следовательно, при $w_1 = 2$ и $k \leq 0.0398$ имеем $A \geq 0.978$. При $w_1 = 3$ имеем $A \geq 0.957$. Значение $A \approx 0.88$ является минимальным и достигается при $k = k_*$, $w_1 = \infty$. При этом $k^2 J_2 < 0.01$.

Чтобы формула (4.8) была пригодна для всех искомых фракций полидисперсного аэрозоля, скорость забора w_1 должна быть такой, чтобы для самой крупной искомой фракции было $k \leq k_*$. Если это практически окажется не выполнимым, то коэффициент аспирации для фракций, имеющих $k \leq k_*$, вычисляем по формуле (4.9), а для фракций, имеющих $k \gg k_*$, по формуле (4.1). При этом, однако, нет пока надежных формул для $k > k_*$, но близких к k_* . Уменьшением w_1 можно все фракции грубодисперсного аэрозоля поставить в условия $k \gg k_*$, например, $k \geq 6k_*$. Очевидно все выведенные формулы справедливы и для $w_1 < 1$.

Поступило 10 IV 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Левин Л. М. Исследования по физике грубодисперсных аэрозолей. Изд-во АН СССР, 1961.
2. Юрьев И. М. К теории инерционного осаждения частиц из газа или жидкости. Докл. АН СССР, 1966, т. 170, № 5.
3. Ламб Г. Гидродинамика. Гостехиздат, 1947, гл. 4, § 66.