НЕУСТАНОВИВШИЕСЯ ВОЛНЫ В ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ КОНЕЧНОЙ ГЛУБИНЫ

Л. В. ЧЕРКЕСОВ

(Минск)

Исследуется плоская и пространственная задачи о неустановившихся волнах, возникающих на поверхности вязкой жидкости постоянной конечной глубины под действием импульса скоростей, заданного на дне бассейна.

Задача рассматривается как простейшая схема исследования с учетом влияния вязкости распространения волн типа цунами, возникающих от подводного толчка.

Аналогичные задачи о распространении волн, возникающих от начальных поверхностных возмущений, рассматриваются в работах [1–9].

§ 1. Пусть вязкая несжимаемая жидкость, занимающая часть пространства $-\infty < x < \infty$, $-\infty < y < \infty$, $-H < z < 0$, ограниченная сверху свободной поверхностью, а снизу — горизонтальным дном, находится в начальный момент времени $t = 0$ в покое, а ее свободная поверхность горизонтальна. Исследуем развитие волн, возникающих под действием малых возмущений дна бассейна, происходящих с вертикальной скоростью

$$w_1 = f(x, y)\varphi(t) \quad (t \geqslant 0, \quad \varphi(0) = 0) \tag{1.1}$$

Предполагая движения медленными, касательные напряжения на свободной поверхности отсутствующими, а нормальные напряжения постоянными, получаем систему уравнений гидродинамики в виде

$$\begin{aligned} u_t &= -\psi_x + \nu\Delta u, \quad & v_t &= -\psi_y + \nu\Delta v \\ w_t &= -\psi_z + \nu\Delta w, \quad & u_x + v_y + w_z &= 0 \end{aligned} \tag{1.2}$$

с начальными условиями

$$u = v = w = 0, \quad \zeta = 0 \quad \text{при } t = 0$$

и граничными условиями

$$\zeta_t = w, \quad g\zeta = \psi - 2\nu w_z, \quad u_z + w_x = 0$$
$$v_z + w_y = 0 \quad \text{при } z = 0; \quad u = v = 0$$
$$w = w_1, \quad \text{при } z = -H \quad (\rho\psi = p + \rho g z)$$

Применяя для решения системы (1.2) преобразование Фурье по x и y и преобразование Лапласа по t, удовлетворяя граничным и начальным условиям, получим такое выражение вида волн на свободной поверхности:

$$\zeta = \frac{a}{2\pi\sigma} \int\limits_{-\infty}^{\infty}\!\!\int f(m, n)\varkappa(r, t) \exp[i(mx + ny)]\, dm\, dn \tag{1.3}$$

$$\varkappa(r, t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{s-i\infty}^{s+i\infty} \varphi(\alpha) \frac{\Delta_1(\alpha, r, \varepsilon)}{\Delta(\alpha, r, \varepsilon)} e^{\alpha t}\, d\alpha, \qquad \varphi(\alpha) = \alpha \int\limits_0^{\infty} \varphi(t) e^{-\alpha t}\, dt \tag{1.4}$$

$$f(m,n)=\frac{1}{2\pi}\int\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\exp[-i(mx+ny)]\,dx\,dy$$

$$\Delta_1 = r\alpha\beta\left[(\alpha+2\varepsilon^2r^2)\frac{\operatorname{cth}\beta_1H}{\operatorname{sh}rH}-4\varepsilon r\beta\frac{\operatorname{cth}\beta_1H}{\operatorname{sh}\beta_1H}+2\varepsilon^2r^2\frac{\operatorname{th}rH}{\operatorname{sh}\beta_1H}\right]$$

$$\Delta = r\alpha^2\beta(\alpha^2\operatorname{cth}rH+r)\operatorname{cth}\beta_1H-\varepsilon r^2\alpha^2(\alpha^2+r\operatorname{cth}rH)+$$

$$+4\varepsilon^2\alpha^2r^3\beta\left(\alpha\operatorname{cth}\beta_1H\operatorname{cth}rH-\frac{\alpha}{\operatorname{sh}\beta_1H\operatorname{sh}rH}\right)-8\varepsilon^3\alpha^3r^4+$$

$$+8\varepsilon^4r^5\alpha^2\beta\left(\operatorname{cth}\beta_1H\operatorname{cth}rH-\frac{1}{\operatorname{sh}rH\operatorname{sh}\beta_1H}\right)-8\varepsilon^5\alpha^2r^6$$

$$\varepsilon=\sqrt{\nu\sigma^3g^{-2}},\qquad \beta=\sqrt{\alpha+\varepsilon^2r^2},\qquad \beta_1=\beta\varepsilon^{-1},\qquad r=\sqrt{m^2+n^2}$$

Здесь x, y, t — безразмерные величины, равные $x\sigma^2g^{-1}$, $y\sigma^2g^{-1}$, σt; $\sigma = 1$ *сек*$^{-1}$ — величина, введенная для перехода к безразмерным величинам и равной единице, так как в рассматриваемой задаче нет характерной частоты. Интеграл (1.4) будет сходящимся, так как подынтегральная функция стремится к нулю при $|\alpha|\to\infty$, по крайней мере, как α^{-1}, кроме того, $\varkappa(r, t)\to 0$ при $r\to\infty$, поэтому интеграл (1.3) также сходится для произвольной функции $f(x, y)$, представимой интегралом Фурье.

Выражение (1.3) представляет собою точное решение рассматриваемой задачи, справедливое при произвольном значении парметра ε. Проведем дальнейший анализ данного выражения для малых значений этого параметра. Рассмотрим Δ_1/Δ в интеграле (1.4) как функцию от ε и разлагая ее в ряд Тейлора, ограничиваясь при этом первыми тремя членами и записывая остаточный член ряда в форме Лагранжа, получим

$$\zeta=\zeta_0+\varepsilon\zeta_1+\varepsilon^2\zeta_2+\varepsilon^3\zeta_3 \tag{1.5}$$

$$\zeta_k=\frac{a}{2\pi\sigma}\int\int_{-\infty}^{\infty} f(m,n)\varkappa_k(r,t)\exp[i(mx+ny)]\,dm\,dn \tag{1.6}$$

$$\varkappa_0=\frac{1}{2\pi i}\frac{1}{\operatorname{ch}rH}\int_{s-i\infty}^{s+i\infty}\varphi(\alpha)\frac{1}{\alpha^2+q^2}e^{\alpha t}\,d\alpha$$

$$\varkappa_1=\frac{1}{2\pi i}\frac{r\operatorname{th}rH}{\operatorname{ch}rH}\int_{s-i\infty}^{s+i\infty}\varphi(\alpha)\frac{\alpha^2+r\operatorname{cth}rH}{\sqrt{\alpha}(\alpha^2+q^2)^2}e^{\alpha t}\,d\alpha$$

$$\varkappa_2=\varkappa_{21}+\varkappa_{22},\quad \varkappa_{21}=\frac{1}{2\pi i}\frac{4r^2}{\operatorname{ch}rH}\int_{s-i\infty}^{s+i\infty}\varphi(\alpha)\frac{\alpha}{(\alpha^2+q^2)^2}e^{\alpha t}\,d\alpha$$

$$\varkappa_{22}=\frac{1}{2\pi i}\frac{r^2(\operatorname{th}rH)^2}{\operatorname{ch}rH}\int_{s-i\infty}^{s+i\infty}\varphi(\alpha)\frac{(\alpha^2+r\operatorname{cth}rH)^2}{\alpha(\alpha^2+q^2)^3}e^{\alpha t}\,d\alpha$$

$$\varkappa_3=\frac{1}{12\pi i}\int_{s-i\infty}^{s+i\infty}\varphi(\alpha)\Delta_3(\theta\varepsilon)e^{\alpha t}\,d\alpha$$

$$\Delta_3=[-\Delta'''\Delta_1\Delta+\Delta''(2\Delta_1'\Delta+6\Delta_1\Delta')+\Delta'(-5\Delta\Delta_1''+6\Delta'\Delta_1')]\,\Delta^{-3}-$$

$$-6\Delta_1(\Delta')^3\Delta^{-4}+\Delta_1'''\Delta^{-1}\quad(q^2=r\operatorname{th}rH)$$

Здесь штрих означает дифференциальные по ε. Анализ выражения ζ_3 показывает, что $\zeta_3(\theta\varepsilon)$ ограничена и при $\varepsilon \to 0$ имеет конечный предел для конечных t. Поэтому с ошибкой порядка ε^3 при $\varepsilon \to 0$ формулу (1.5) можем записать так:

$$\zeta = \zeta_0 + \varepsilon\zeta_1 + \varepsilon^2\zeta_2 \tag{1.7}$$

Так как дальнейшее вычисление интегралов $\varkappa_k$ возможно лишь для конкретной функции $\varphi(\alpha)$, то проведем их вычисление для функции $\varphi(t)$ вида

$$\varphi(t) = \delta(t - t_0) \qquad (t_0 > 0) \tag{1.8}$$

Здесь $\delta(t)$ — дельта-функция Дирака; при этом функция $f(x, y)$, входящая в (1.1), будет представлять в дальнейшем смещение дна, происшедшее под действием импульса скоростей. Учитывая, что

$$\varphi(\alpha) = \alpha e^{-\alpha t_0}$$

и вычисляя интегралы $\varkappa_k$, находим:

для $0 \leqslant t < t_0$

$$\varkappa_0 = \varkappa_1 = \varkappa_2 = 0 \tag{1.9}$$

для $t > t_0$

$$\varkappa_0 = (\operatorname{ch} rH)^{-1}\cos qt, \qquad q = \sqrt{r \operatorname{th} rH}$$

$$\varkappa_1 = \frac{r \operatorname{th} rH}{\operatorname{ch} rH}\left\{\left[\frac{1}{4\sqrt{2}} q^{-5/2}(\cos qt + \sin qt) + \frac{1}{2\sqrt{2}} tq^{-3/2}(\cos qt - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \sin qt)\right]\Delta_4 + \frac{1}{\sqrt{2}} q^{-1/2}(\cos qt + \sin qt) + K\right\} \tag{1.10}$$

$$\varkappa_2 = [(r \operatorname{th} rH)^2 \varphi_2 + 4r^2\varphi_1](\operatorname{ch} rH)^{-1}, \qquad \varphi_1 = {}^1/_2\, t \sin qt$$

$$\varphi_2 = -{}^1/_8\, q^{-4}\Delta_4[t(8q^2 + 3\Delta_4)\cos qt + t^2 q\Delta_4 \sin qt]$$

$$K = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sqrt{\alpha}(\alpha^2 + r \operatorname{cth} rH)}{(\alpha^2 + r \operatorname{th} rH)^2} e^{-\alpha t}\, d\alpha, \qquad \Delta_4 = r(\operatorname{cth} rH - \operatorname{th} rH)$$

Здесь для простоты опущен индекс 1 при t, при этом $t_1 = t - t$.

Итак, выражение (1.7), где ζ_k определяются формулами (1.6), а $\varkappa_k$ — (1.9), (1.10), представляет собою вид свободной поверхности с ошибкой порядка ε^3 для произвольной функции $f(x, y)$ и функции $\varphi(t)$ вида (1.8).

§ 2. Для функции $f(x, y)$, не зависящей от y, т. е. в случае плоской задачи, вид свободной поверхности будет определяться формулой (1.7), где

$$\zeta_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(r)\varkappa_k(r, t) e^{irx}\, dr, \quad f(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-irx}\, dx \tag{2.1}$$

Здесь $\varkappa_k$ даются формулами (1.9) и (1.10). Функция $f(r)$ не имеет особенностей и при $|r| \to \infty$ функция $f(r) \to 0$ не медленнее, чем r^{-1}. Ограничимся в дальнейшем для простоты исследования рассмотрением функций $f(x)$, симметричных относительно $x = 0$ и таких, для которых $f(r)$ будет неосциллирующей функцией.

Заметим, что, как это следует из (1.9), $\zeta = 0$ для $0 \leqslant t < t_0$. Для удобства дальнейшего исследования вида свободной поверхности при $t > t_0$ запишем, исходя из формул (1.1), (1.10), (2.1), выражение ζ так:

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{2}\pi}\operatorname{Re}(\eta_1+\eta_2)+\eta_3, \qquad \eta_{1,2} = \int_0^\infty f(r)\,(\psi_1 \mp i\psi_2)\exp[ixM_{1,2}(r)]\,dr$$

$$\eta_3 = \varepsilon_1\frac{\sqrt{2}}{\pi^{3/2}}\int_0^\infty f(r)\,\frac{r\operatorname{th} r}{\operatorname{ch} r}\left[\int_0^\infty \frac{\sqrt{\alpha}(\alpha^2+r\operatorname{cth} r)}{(\alpha^2+r\operatorname{th} r)^2}\,e^{-\alpha t}\,d\alpha\right]\cos rx\,dr \tag{2.2}$$

$$\psi_1 = \frac{1}{\operatorname{ch} r}\left\{1+\varepsilon_1 r q^{-5/2}\left[\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}tq\right)\Delta_4+q^2\right]\frac{\operatorname{th} r}{\sqrt{2}} - \right.$$
$$\left. - {}^1/_8\varepsilon_1^2 t q^{-4}(8q^2+3\Delta_4)\Delta_4(r\operatorname{th} r)^2 + 2\varepsilon_1^2 r^2 t\right\}$$

$$\psi_2 = \frac{1}{\operatorname{ch} r}\left\{\varepsilon_1 r q^{-5/2}\left[\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}tq\right)\Delta_4+q^2\right]\frac{\operatorname{th} r}{\sqrt{2}} - \frac{1}{8}\varepsilon_1^2 t^2 q^{-3} r^2(\Delta_4\operatorname{th} r)^2\right\}$$

$$M_{1,2} = r\pm\mu q, \qquad \mu = tx^{-1}, \qquad q = \sqrt{r\operatorname{th} r},$$
$$\varepsilon_1 = \nu^{1/2}H^{-3/4}g^{-1/4}, \qquad \Delta_4 = r(\operatorname{cth} r - \operatorname{th} r)$$

Здесь x и t — безразмерные, равные соответственно xH^{-1}, $(t-t_0)\sqrt{gH^{-1}}$.

Проведем дальнейший анализ выражения (2.2) для больших значений x. Прежде всего легко показать, что η_3 для больших x — величина порядка x^{-3}. Исследование $\eta_{1,2}$ для больших x проведем методом стационарных фаз, для чего проанализируем положительные корни уравнений

$$M_{1,2} = 1\pm\mu\varphi(r) = 0 \qquad (\varphi(r) = {}^1/_2(r\operatorname{th} r)^{-1/2}[\operatorname{th} r + r(\operatorname{ch} r)^{-2}]) \tag{2.3}$$

Здесь $\varphi(r)$ представляет собою монотонно убывающую с ростом r функцию, причем $\varphi(0) = 1$, $\varphi(+\infty) = 0$. Отсюда видно, что уравнение $M_1' = 0$ не имеет положительных корней при любых значениях μ; а уравнение M_2' также не имеет положительных корней при $\mu < 1$, а при $\mu > 1$ имеет только один положительный корень $r = r_1$ уравнения

$$\xi(r_1) = \mu^{-1} \tag{2.4}$$

Этот корень возрастает вместе с ростом μ. На основе проведенного анализа имеем:

$$\xi = 0 \quad t < t_0 \tag{2.5}$$

$$\varphi = O(x^{-1}) \quad (x > c(t-t_0) \quad t > t_0) \tag{2.6}$$

$$\zeta = \frac{1}{\sqrt{x}}f(r)[\psi_1(r)\cos\beta - \psi_2(r)\sin\beta]\frac{1}{\sqrt{\mu\varkappa(r)}}, \qquad x < c(t-t_0) \tag{2.7}$$

$$\varkappa(r) = -\varphi'(r) = {}^1/_4(r\operatorname{th} r)^{-3/2}\{4(r\operatorname{th} r)^2(\operatorname{ch} r)^{-2} + [\operatorname{th} r - r(\operatorname{ch} r)^{-2}]^2\}$$
$$\beta = rx - t\sqrt{r\operatorname{th} r} + {}^1/_4\pi$$

В последнем выражении для простоты у r опущен индекс 1.

Заметим, что из уравнения (2.4) выразить аналитически r_1 как функцию от x и t можно только в двух случаях: $r_1 \ll 1$ и $r_1 \gg 1$; при этом для r_1 получаем соответственно выражения

$$r_1 = \sqrt{2(t-x)t^{-1}}, \qquad r_1 = t^2x^{-2} \tag{2.8}$$

Хотя в общем случае аналитически выразить r_1 как функцию от x и t не представляется возможным (можно лишь численно найти с требуемой степенью точности значение r_1, соответствующее заданным x и t), тем не менее, довольно простым путем можно построить совершенно ясную (количественную) картину изменения возвышения свободной поверхности с течением времени в произвольной фиксированной точке x, даже без вычисления корней r_k уравнения (2.4). Учитывая, что каждому значению r_k соответствует только одно значение t_k, вычисляемое по формуле

$$t_k = x[\varphi(r_k)]^{-1} \tag{2.9}$$

и что значения t_k растут вместе с ростом r_k, найдем, подставляя в формулу (2.7) произвольное значение $r_k > 0$ и соответствующее ему значение t_k, выражение ζ в момент времени t_k. Выбирая r_k с достаточно мелким шагом, получим совершенно ясную картину поведения волны в выбранной точке.

Совершенно аналогично можно построить картину волны в фиксированный момент времени t, задавая r_k с достаточно мелким шагом и вычисляя значения x_k по формуле $x_k = t\varphi(r_k)$, а $\zeta(x_k)$ — по формуле (2.7).

Заметим, что для функции $f(x)$ вида $f(x) = d\exp(-kx^2H^{-2})$ функция $f(r)$, входящая в (2.8), имеет вид

$$f(r) = d\frac{1}{2\sqrt{2k}}\exp\left(-\frac{1}{4k}r^2\right) \tag{2.10}$$

для $f(x)$ вида $f(x) = \delta(x)$ имеем

$$f(r) = QH^{-1} \tag{2.11}$$

Здесь Q — объем жидкости, вытесненной импульсом скоростей.

§ 3. В предыдущем параграфе рассмотрена плоская задача, в этом параграфе рассмотрим пространственную задачу для функции $f(x, y)$, симметричной относительно начала координат, т. е. $f(x, y) = f(R)$, $R = \sqrt{x^2 + y^2}$. В этом случае вид свободной поверхности дается формулой (1.7), где $\varkappa_k$ определяются формулами (1.9) — (1.10),

$$\zeta_k = \int_0^\infty r f(r) J_0(rR)\varkappa_k(r, t)\,dr, \quad f(r) = \int_0^\infty R f(R) J_0(rR)\,dR \tag{3.1}$$

Воспользовавшись известной из теории функций Бесселя формулой

$$|J_0(x) - \sqrt{2/\pi x}\cos(x - {}^1/_4\pi)| < A/x\sqrt{x}$$

справедливой для всех положительных x, где A — некоторое число, получим для больших значений R

$$\zeta_k = \left(\frac{2}{\pi R}\right)^{1/2}\int_0^\infty \sqrt{r} f(r)\varkappa_k(r, t)\cos\left(rR - \frac{\pi}{4}\right)dr + O(R^{-3/2}) \tag{3.2}$$

Проводя исследование интегралов (3.2) для больших R методом стационарных фаз совершенно аналогично исследованию интегралов (2.1), находим такие формулы для вида свободной поверхности:

при $R > 0$, $t < t_0$

$$\zeta = 0 \tag{3.3}$$

при $R > ct_1$, $t_1 > 0$

$$\zeta = O(R^{-3/2}) \tag{3.4}$$

при $R < ct_1$, $t_1 > 0$

$$\zeta = \frac{1}{R}f(r)[\psi_1(r)\cos\gamma - \psi_2(r)\sin\gamma]\left(\frac{r}{\mu\varkappa(r)}\right)^{1/2}, \quad \gamma = rR - t\sqrt{r\,\mathrm{th}\,r} \tag{3.5}$$

Все остальные обозначения те же, что и в (2.7), индекс единица у r опущен, r_1 — корень уравнения (2.4). Все замечания относительно построения картины волны в фиксированной точке свободной поверхности с течением времени, а также в фиксированный момент времени в различных точках свободной поверхности, сделанные в § 2, полностью переносятся и на рассматриваемый пространственный случай.

Для функции $f(R)$ вида

$$f(R) = d\exp(-kR^2H^{-2}) \tag{3.6}$$

функция $f(r)$, входящая в (3.5), имеет вид $f(r) = {}^1/_2 dk^{-1}\exp(-{}^1/_4 k^{-1}r^2)$, а для функции $f(x, y)$ вида

$$f(x, y) = \delta(x)\delta(y) \tag{3.7}$$

имеем $f(r) = QH^{-2}$, где Q, как и раньше,— объем вытесненной жидкости.

Из полученных формул (2.6), (2.7) и (3.4), (3.5) видно, что передний фронт основной волны как в плоском, так и в пространственном случаях перемещается со скоростью c, при этом амплитуда основной волны убывает с ростом R — расстояния от эпицентра начального возмущения как $R^{-1/2}$ — в плоском случае и как R^{-1} — в пространственном. Волны, амплитуда которых убывает с ростом R как R^{-1} — в плоском и как $R^{-3/2}$ — в пространственном случаях, приходят в любую точку свободной поверхности раньше основной волны и поэтому выполняют роль ее предшественников.

По формулам (2.7) и (3.5) для функций $f(x)$ и $f(R)$ соответственно вида (2.10) и (3.6) были проведены численные расчеты для определения влияния вязкости на амплитуду волны в некоторой фиксированной точке свободной поверхности. Расчеты проводились методом, указанным в конце второго параграфа для значений

$$R = 3\cdot10^5\ м, \quad H = 1\cdot10^3\ м, \quad d = 1\ м, \quad k = {}^1/_4$$

и трех различных значений коэффициента вязкости $\nu_1 = 2\cdot10^{-2}$ *см²/сек* (ламинарное трение), $\nu_2 = 1$ *см²/сек* и $\nu_3 = 10^3$ *см²/сек* — минимальное и максимальное значения коэффициента вязкости турбулентного трения.

Значения Δ_k

		Δ_1, %	Δ_2, %	Δ_3, %	t, сек.
	0.5773	$7.44\ 10^{-3}$	$5.52\ 10^{-2}$	1.75	3060.15
η_0	−0.1215	$2.7\ \ 10^{-2}$	$2.08\ 10^{-1}$	6.41	3236.34
	0.1692	$2.32\ 10^{-2}$	$1.74\ 10^{-1}$	5.47	3328.37
	0.1333	$3.78\ 10^{-3}$	$2.82\ 10^{-2}$	$8.95\ 10^{-1}$	3060.15
ζ_0	−0.0209	$2.94\ 10^{-2}$	$2.21\ 10^{-1}$	6.95	3205.72
	0.0174	$2.76\ 10^{-2}$	$2.06\ 10^{-1}$	6.48	3303.57

В приведенной таблице даны первые три экстремальных значения возвышения свободной поверхности в идеальной жидкости (η_0 — плоский случай, ζ_0 — пространственный) и соответствующие им моменты времени t, Δ_k показывают, на сколько процентов уменьшилось за счет вязкости при $\nu = \nu_k$ экстремальное значение амплитуды.

Поступило 27 XII 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Кочин Н. Е. К теории волн Коши-Пуассона. Собр. соч., т. 2, Изд-во АН СССР, 1949, стр. 86—104.
2. Сретенский Л. Н. Об одной гидродинамической задаче, связанной с проблемой цунами. Тр. Морск. гидрофиз. ин-та АН УССР, 1963, т. 27.
3. Войт С. С. Распространение неустановившихся длинных волн во вращающемся бассейне переменной глубины Тр. Морск. гидроф. ин-та АН УССР, 1963, т. 27.
4. Сретенский Л. Н. О волнах на поверхности вязкой жидкости. ч. 1. Тр. ЦАГИ, 1941, № 541.
5. Никитин А. К., Подрезов С. А. К пространственной задаче о волнах на поверхности вязкой жидкости бесконечной глубины. ПММ, 1964, т. 28, вып. 3.
6. Черкесов Л. В. Пространственная задача Коши — Пуассона для волн в вязкой жидкости. ПММ, 1965, т. 29, в. 6.
7. Моисеев Н. Н., Румянцев В. В. Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. Изд-во «Наука», 1965.
8. Шмидт А. Г. Колебания вязкой жидкости конечной глубины, вызванные начальным смещением ее свободной поверхности. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1965, т. 5, № 2.
9. Черкесов Л. В. О влиянии вязкости на распространение волны типа цунами. Изв. АН СССР. Физика атм. и океана, 1966, т. 2, № 12.