

## ЛАМИНАРНЫЙ ПОГРАНИЧНЫЙ СЛОЙ ВБЛИЗИ УГЛОВОЙ ТОЧКИ ТЕЛА

Н. С. МАТВЕЕВА, В. Я. НЕЙЛАНД

(Москва)

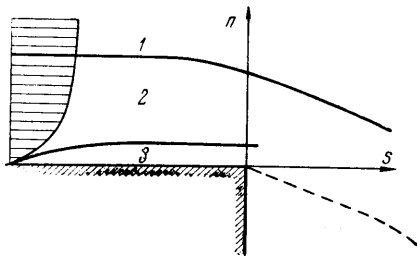
Разработан метод расчета характеристик ламинарного пограничного слоя вблизи угловой точки контура тела, в окрестности которой внешний сверхзвуковой поток проходит через течение разрежения. В работе используются асимптотические решения уравнений Навье — Стокса в области с большими продольными градиентами функций течения при больших значениях числа Рейнольдса, общий вид которых исследовался в работе [1].

Получено распределение давления, тепловых потоков и трения вдоль поверхности тела. Для малых перепадов давления вблизи угловой точки решение соответствующих уравнений для малых возмущений получено в аналитическом виде.

Обычный метод исследования течений вязкого газа вблизи поверхностей тел при больших значениях числа Рейнольдса — это использование теории пограничного слоя Прандтля. Вдали от тела асимптотическое решение уравнений Навье — Стокса в первом приближении сводится к решению уравнений Эйлера, а около поверхности тела — уравнений пограничного слоя Прандтля. Характерной особенностью области пограничного слоя является малость изменения функций течения в продольном направлении по сравнению с их изменением в поперечном направлении. Однако в ряде случаев это условие нарушается.

Появляется необходимость построения дополнительных асимптотических разложений для области, в которой продольные и поперечные изменения функций течения — величины одного порядка. Общий способ построения асимптотических решений для таких течений с использованием известного метода внешних и внутренних разложений дан в работе [1].

Ниже рассматривается течение в ламинарном пограничном слое при обтекании сверхзвуковым потоком вязкого газа окрестности угловой точки тела. За угловой точкой поток отрывается от поверхности тела и обтекает застойную зону, давление в которой отличается на заданную величину от давления в невозмущенном потоке перед точкой отрыва. По дозвуковой части пограничного слоя возмущение давления (разрежение) распространяется вверх по потоку на расстояние, которое по порядку величины равно нескольким толщинам пограничного слоя.



В возмущенной области пограничного слоя продольные и поперечные возмущения давления и скорости становятся величинами одного порядка. В работе построены дополнительные асимптотические разложения в первом приближении и проведен расчет распределения давления, напряжения трения и тепловых потоков вдоль поверхности тела.

1. Схема рассмотренного течения показана на фигуре. Вдали от поверхности тела набегающий равномерный сверхзвуковой поток с давлением  $p_{10}$ . Вблизи поверхности тела расположен ламинарный

пограничный слой. Длина тела от передней кромки до угловой точки равна  $l$ . Тогда толщина пограничного слоя, приходящего в область угловой точки, по порядку величины равна  $\epsilon l$ , где  $\epsilon = R^{-1/2}$ ,  $R = \rho_{10} u_{10} l / \mu_{10}$  ( $\rho_{10}$ ,  $u_{10}$ ,  $\mu_{10}$  — соответственно плотность, скорость и динамический коэффициент вязкости в невозмущенном невязком потоке на внешней границе пограничного слоя). Следуя общему методу, развитому в работе [1], рассмотрим окрестность угловой точки с характерной длиной  $\epsilon l$ . На этой

длине давление меняется на основной порядок по величине. Поэтому в области 2 с толщиной  $\varepsilon l$ , приблизительно равной толщине приходящего пограничного слоя, следует ввести следующие безразмерные переменные:

$$S = s|\varepsilon l, \quad N = n|\varepsilon l$$

Асимптотические разложения для функций течений имеют вид

$$\begin{aligned} \rho(s, n, \varepsilon) &= \rho_{10}\bar{\rho}_2(S, N) + \dots, & p(s, n, \varepsilon) &= \rho_{10}u_{10}^2\bar{p}_2(S, N) + \dots \\ u(s, n, \varepsilon) &= u_{10}\bar{u}_2(S, N) + \dots, & v(s, n, \varepsilon) &= u_{10}\bar{v}_2(S, N) + \dots \end{aligned} \quad (1.1)$$

где  $\rho, p, u, v$  — соответственно плотность, давление, продольная и поперечная компоненты скорости. Если подставить (1.1) в уравнения Навье — Стокса, то для первых членов разложения получаются обычные уравнения Эйлера. При использовании условий сращивания решений в областях 1 и 2 получается связь между величиной давления или скорости и наклоном вектора скорости в области 2 при  $N \rightarrow \infty$ . Эта связь имеет, очевидно, форму обычных соотношений для волны разрежения, возникающей при повороте набегающего внешнего сверхзвукового потока в области 1. При  $N = 0$  должно выполняться условие  $\bar{v}_2(S, 0) = 0$ . Для выполнения условия прилипания  $\bar{u}_2(S, 0, \varepsilon) = 0$  необходимо рассмотреть вблизи поверхности дополнительную область 3, в которой конвективные и главные вязкие члены уравнений Навье — Стокса имеют одинаковый порядок по величине. Из этого условия вытекает, что толщина области 3 по порядку величины должна быть равна  $\varepsilon^{3/2}l$ .

Поэтому в области 3 необходимо ввести следующие безразмерные координаты:

$$S = s|\varepsilon l, \quad Y = n|\varepsilon^{3/2}l$$

Соответствующие асимптотические разложения имеют вид

$$\begin{aligned} u(s, n, \varepsilon) &= u_{10}\bar{u}_3(S, Y) + \dots, & v(s, n, \varepsilon) &= u_{10}\varepsilon^{1/2}\bar{v}_3(S, Y) + \dots \\ p(s, n, \varepsilon) &= \rho_{10}u_{10}^2\bar{p}_3(S, Y) + \dots, & \rho(s, n, \varepsilon) &= \rho_{10}\bar{\rho}_3(S, Y) + \dots \end{aligned} \quad (1.2)$$

Внешние краевые условия для области 3 получаются из условий сращивания разложений, проведенных в областях 2 и 3

$$\bar{u}_3(S, Y) \rightarrow \bar{u}_2(S, 0), \quad \bar{H}_3(S, Y) \rightarrow \bar{H}_2(S, 0), \quad Y \rightarrow \infty \quad (1.3)$$

Величина  $\bar{H}_2(S, 0)$  равна значению энтальпии газа на стенке в набегающем пограничном слое. Поскольку в области с размером  $S = O(1)$  изменением температуры стенки пренебрегается, то в области 3 имеем  $\bar{H}_3(S, Y) = \bar{H}_2(S, 0)$  при  $Y = 0$ . Другие краевые условия на стенке:  $\bar{u}_3(S, 0) = \bar{v}_3(S, 0) = 0$ .

Если подставить асимптотические разложения (1.2) в уравнения Навье — Стокса, то для отыскиваемых первых членов получаются обычные уравнения пограничного слоя Прандтля. Пограничный слой в области 3 начинает развиваться в потоке 2 из области  $S \rightarrow -\infty$ , где  $\bar{u}_2(-\infty, 0) = 0$ . Метод решения такой задачи для уравнений пограничного слоя развит в работе [2].

2. Решение уравнений для области 2 проведено методом интегральных соотношений [3] при использовании одной полосы. Интегральные уравнения могут быть записаны в форме

$$\frac{d\delta}{dS} = \text{tg } \mu_1, \quad \frac{d}{dS} \left[ \int_0^\delta \rho u dN \right] = 0, \quad \frac{d}{dS} \left[ \int_0^\delta \rho u v dN \right] = p_2 - p_1 \quad (2.1)$$

Здесь  $\mu_1$  — угол наклона внешней границы области 2 к оси  $S$ ; при этом как и в дальнейшем черточки над безразмерными переменными, а также индексы 2, указывающие номер области, опущены. Индексами 1 и 2 отмечены значения переменных при  $N = \delta$  и  $N = 0$ . Все размеры  $S$ ,  $N$ ,  $\delta$  отнесены к толщине приходящего пограничного слоя при  $S \rightarrow -\infty$ . Поэтому  $\delta(-\infty) = 1$ . Для подынтегрального выражения принимается линейная аппроксимация и вводятся, следуя работе [4], величины  $t = \rho u$ ,  $g = \rho u^2 + p$ . После несложных преобразований систему уравнений (2.1) можно представить в форме

$$\begin{aligned} \frac{dt_2}{dS} &= - \frac{d\rho_1 u_1}{dM_1} \frac{dM_1}{dS} - \frac{\operatorname{tg} \mu_1 (t_2 + \rho_1 u_1)}{\delta}, & \mu_1 &= \nu_{10} - \nu_1 \\ \frac{d\rho_1 u_1 v_1}{dM_1} \frac{dM_1}{dS} &= 2(p_2 - p_1) - \rho_1 v_1^2, & \frac{dg_2}{dS} &= u_2 \frac{dt_2}{dS} \\ \nu_1 &= \left( \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \right)^{1/2} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left[ \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} (M_1^2 - 1) \right]^{1/2} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} (M_1^2 - 1)^{1/2} \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь  $M$  — число Маха.

Таким образом, для определения переменных  $t_2$ ,  $g_2$ ,  $M_1$  и  $\delta$  имеются четыре обыкновенных дифференциальных уравнения. Начальные условия для системы уравнений имеют вид

$$t_2 = 0, \quad g_2 = p_{10}, \quad M_1 = M_{10}, \quad \delta = 1 \quad \text{при } S \rightarrow -\infty \quad (2.3)$$

Краевая задача (2.2), (2.3) решалась численно на ЭВМ. Интегрирование проводилось до  $M_2 = 1$ . В этой точке находится особенность, имеющая очевидный физический смысл. Вдали от угловой точки ускорение внешних струек тока, на которых  $M > 1$ , сопровождается их расширением. В то же время число  $M$  для струек тока, лежащих вблизи поверхности тела, вначале меньше 1. При ускорении газа в них струйки тока сжимаются. Но когда число Маха у стенки достигает  $M_2 = 1$ , дальнейшее расширение потока становится невозможным. Это значит, что при достаточно большом сверхкритическом перепаде давления в угловой точке число Маха  $M_2 = 1$ , а дальнейшее ускорение газа вдоль струйки тока, прилегающей к стенке, происходит в центрированной волне разрежения. В соответствии с этим, градиент  $dM_2/dS$  в угловой точке при  $M_2 = 1$  становится равным бесконечности. Величина числа Маха при переходе через угловую точку скачком достигает значения, соответствующего давлению в застойной зоне. Отсюда следует, что при всех сверхкритических перепадах давления течение до угловой точки не зависит от величины давления в застойной зоне. Если перепад давления докритический, то положение угловой точки  $S = 0$  определяется заданной величиной  $p_2$  и числа Маха  $M_2$ , соответствующих давлению в застойной зоне.

Приводим некоторые результаты вычислений распределения скорости и давления для ряда значений координаты  $S$  при  $M_{10}$ , равном 3, и температурном факторе  $H_2/H_{10}$ , равном 0.5.

|             |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |      |
|-------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| $S$         | 0    | 0.5  | 1.0  | 1.5  | 2.0  | 2.5  | 3.0  | 3.5  | 4.0  | 4.5  | 5.0  |
| $10 u_{31}$ | 3.00 | 1.75 | 1.40 | 1.21 | 1.05 | 0.94 | 0.84 | 0.77 | 0.72 | 0.67 | 0.62 |
| $10 p_{31}$ | 0.53 | 0.69 | 0.73 | 0.74 | 0.75 | 0.76 | 0.77 | 0.77 | 0.77 | 0.78 | 0.78 |

3. Уравнения Эйлера для области 2 запишем в следующей форме:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial \psi} &= \frac{1}{\rho u}, & \frac{\partial N}{\partial S} &= \frac{v}{u}, & \frac{\partial p}{\partial \psi} &= - \frac{\partial v}{\partial S}, & \frac{p}{\rho^\gamma} &= \frac{p_0}{\rho_0^\gamma(\psi)} \\ \frac{u^2 + v^2}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} &= \frac{u_0^2(\psi)}{2} + \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_0}{\rho_0(\psi)} \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь  $\psi$  — безразмерная функция тока, причем на внешней границе  $\psi = \psi_1$ . Пусть перепад давлений мал. Введем параметр малости

$$\Delta = (p_{10} - p_{13})/p_{10} \quad (3.2)$$

Ниже показано, что найденные решения соответствуют асимптотике для решения при произвольном перепаде давлений вдали от угловой точки.

Используя уравнение неразрывности и уравнение Бернулли для струйки тока, легко показать, что при изменении давления на величину  $O(\Delta)$  координата внешней границы изменяется на величину  $\delta N = O(\Delta^{1/2})$ . Величина скорости в струйках тока внешней части слоя, где  $\psi = O(1)$ , изменяется на величину  $O(\Delta)$ , в то время как вблизи поверхности тела при  $\psi = O(\Delta)$  изменение скорости и сама скорость есть величина  $O(\Delta^{1/2})$ .

Эту оценку можно получить из уравнения Бернулли, если учесть, что при  $\psi = O(\Delta)$  величина  $u_0(\psi) = O(\Delta^{1/2})$ .

На внешней границе  $\psi = \psi_1$  краевое условие для уравнений (3.1) имеет вид

$$(p_1 - p_{10})(dv_1/dp_1)_0 = -v_1/u_1$$

Отсюда следует, что  $v = O(\Delta)$ . В силу второго из уравнений (3.1) имеем  $\partial N / \partial S = O(\Delta)$ . Следовательно, изменение  $\delta N = O(\Delta^{1/2})$  могло образоваться только в области, имеющей продольный размер  $S = O(\Delta^{-1/2})$ .

Приведенные оценки показывают, что для изучения асимптотического поведения решения при  $S \rightarrow -\infty$  необходимо рассмотреть область с продольной координатой  $X = S\Delta^{1/2}$ . Кроме того, из-за разного порядка величин приращения скорости в слоях, имеющих  $\psi = O(1)$  и  $\psi = O(\Delta)$ , эти слои придется рассматривать отдельно. В каждом из них строится свое асимптотическое разложение, а недостающие краевые условия получаются из асимптотического сращения решений.

Во внешней области на основании приведенных выше оценок необходимо ввести следующие координаты:

$$X = S\Delta^{1/2}, \psi \tag{3.3}$$

асимптотические разложения для функции следующие:

$$\begin{aligned} p(S, \psi, \Delta) &= p^{(0)} + \Delta p^{(1)}(X, \psi) + \dots \\ \rho(S, \psi, \Delta) &= \rho^{(0)}(\psi) + \Delta \rho^{(1)}(X, \psi) + \dots \\ u(S, \psi, \Delta) &= u^{(0)}(\psi) + \Delta u^{(1)}(X, \psi) + \dots \\ v(S, \psi, \Delta) &= \Delta v^{(1)}(X, \psi) + \dots \end{aligned} \tag{3.4}$$

$$N(S, \psi, \Delta) = N^{(0)}(\psi) + \Delta^{1/2} N^{(1)}(X, \psi) + \Delta N^{(2)}(X, \psi) + \dots$$

В этом разделе индексом сверху отмечается номер приближения. При подстановке (3.4) в (3.1) получается следующая система

$$\begin{aligned} \frac{\partial N^{(0)}}{\partial \psi} &= \frac{1}{\rho^{(0)}u^{(0)}}, \quad \frac{\partial N^{(1)}}{\partial \psi} = 0, \quad p^{(1)} = \frac{\gamma \rho^{(1)} p^{(0)}}{\rho^{(0)}}, \quad \frac{\partial N^{(2)}}{\partial X} = 0, \quad \frac{\partial p^{(1)}}{\partial \psi} = 0 \\ \frac{\partial N^{(1)}}{\partial X} &= \frac{v^{(1)}}{u^{(0)}}, \quad \rho^{(0)}u^{(0)} \frac{\partial N^{(2)}}{\partial \psi} = -\left(\frac{\rho^{(1)}}{\rho^{(0)}} + \frac{u^{(1)}}{u^{(0)}}\right), \quad p^{(1)} = -\rho^{(0)}u^{(0)}u^{(1)} \end{aligned} \tag{3.5}$$

Внешнее краевое условие (3.2) дает

$$p_1^{(1)}(dv_1/dp_1)_0 = -v^{(1)}/u^{(0)}(\psi) \tag{3.6}$$

Вблизи поверхности тела в области  $\psi = O(\Delta)$ , как следует из приведенных выше оценок, необходимо ввести следующие координаты и асимптотические разложения функций:

$$X, \Psi = \psi/\Delta, \quad N(S, \psi, \Delta) = \Delta^{1/2} y^{(1)}(X, \Psi) + \Delta y^{(2)}(X, \Psi) + \dots \tag{3.7}$$

$$u(S, \psi, \Delta) = \Delta^{1/2} U^{(1)}(X, \Psi) + \dots, \quad v(S, \psi, \Delta) = \Delta^{3/2} V^{(1)}(X, \Psi) + \dots \tag{3.8}$$

Подстановка разложений (3.8) в (3.1) дает следующие уравнения:

$$\partial y^{(1)}/\partial \Psi = 1/\rho_2^{(0)}U^{(1)}, \quad \partial y^{(1)}/\partial X = V^{(1)}/U^{(1)}, \quad \partial p^{(1)}/\partial \Psi = 0 \quad (3.9)$$

Профиль скорости в набегающем пограничном слое, т. е. при  $X \rightarrow -\infty$ , вблизи поверхности тела можно представить в виде

$$u^{(0)}(n) = u^{(0)}n + \dots, \quad n = (2\psi/\rho_2^{(0)}u^{(0)})^{1/2} \quad (3.10)$$

$$u^{(0)}(\Psi) = (2u^{(0)1}/\rho_2^{(0)})^{1/2} \Delta^{1/2} \Psi^{1/2} \quad (3.11)$$

Здесь  $u^{(0)1}$  — безразмерный градиент скорости у стенки при  $S \rightarrow -\infty$ . Используя (3.11), разложение для  $u(S, \Psi, \Delta)$  и уравнение Бернулли, можно получить

$$U^{(1)}(X, \Psi) = [2u^{(0)1}\Psi/\rho_2^{(0)} - 2p^{(1)}(X)/\rho_2^{(0)}]^{1/2} \quad (3.12)$$

Используя первое из уравнений (3.9), (3.12) и условие  $y^{(1)}(X, 0) = 0$ , можно найти решение

$$y^{(1)}(X, \Psi) = \left[ \frac{2\Psi}{\rho_2^{(0)}u^{(0)1}} - \frac{2p^{(1)}(X)}{\rho_2^{(0)}u^{(0)12}} \right]^{1/2} - \left[ -\frac{2p^{(1)}(X)}{\rho_2^{(0)}u^{(0)12}} \right]^{1/2} \quad (3.13)$$

Дальнейшие результаты получаются путем сращения разложений

$$V^{(1)}(X, \Psi) = \frac{dp^{(1)}}{dX} \left[ \left( 1 - \frac{u^{(0)1}\Psi}{p^{(1)}} \right)^{1/2} - 1 \right] \frac{1}{\rho_2^{(0)}u^{(0)1}} \quad (3.14)$$

$$N^{(1)} = -[-2p^{(1)}(X)/\rho_2^{(0)}u^{(0)12}]^{1/2}$$

Из четвертого уравнения (3.5) и второго уравнения (3.14) получим

$$U^{(1)} = \frac{u^{(0)}(\Psi)}{u^{(0)1}[-2p^{(1)}(X)/\rho_2^{(0)}]^{1/2}} \frac{dp^{(1)}}{dX} \quad (3.15)$$

Формула (3.15) при подстановке в (3.6) дает обыкновенное дифференциальное уравнение для определения функции  $p^{(1)}(X)$

$$p^{(1)}(X) \left( \frac{dv_1}{dp_1} \right)_0 = - \frac{1}{[-2p^{(1)}(X)/\rho_2^{(0)}u^{(0)12}]^{1/2}} \frac{dp^{(1)}}{dX} \quad (3.16)$$

Уравнение (3.16) легко интегрируется в квадратурах. Как указывалось выше, при малых докритических перепадах давлений для получения окончательного результата необходимо задать давление в угловой точке, т. е. при  $S = 0$ . Не нарушая общности, можно считать  $p^{(1)}(0) = -p_{10}$ .

Распределение давлений получается в форме

$$p^{(1)}(X) = -p_{10} \left\{ 1 + \left( \frac{dv_1}{dp_1} \right)_0 \left[ \frac{\rho_2^{(0)}u^{(0)12}}{2\gamma M_{10}^2} \right]^{1/2} X \right\}^{-2} \quad (3.17)$$

Заметим, что рассмотрена область  $S = 0(\Delta^{-1/2})$ , в которой в первом приближении мал поперечный перепад давления. Можно показать, что при  $S = O(1)$  перепад давления появляется в первом приближении. Подобную задачу рассмотрел Лайтхилл [5] для случая падения скачка уплотнения на пограничный слой. Однако в такой области, оказывается, в первом приближении исчезает изменение давления и числа Маха вдоль поверхности тела.

Для оценки точности использованного в предыдущем разделе однополосного метода А. А. Дородницына полезно найти решение уравнений (2.2) при малом перепаде давлений и сравнить с решением (3.17), которое по-

лучено непосредственно из уравнений Эйлера. Введем в уравнения (2.2) следующие переменные и асимптотические представления:

$$\begin{aligned} X &= S \Delta^{1/2}, & M_1(S, \Delta) &= M_{10} + \Delta M_1^{(1)}(X) + \dots, \\ & & M_2(S, \Delta) &= \Delta^{1/2} M_2^{(1)}(X) + \dots \\ p_1(S, \Delta) &= p_{10} + \Delta p^{(1)}(X) + \dots, & p_2(S, \Delta) &= p_{10} + \Delta p_2^{(1)}(X) + \dots \end{aligned} \quad (3.18)$$

Решение получается в виде

$$p^{(1)}(X) = -p_{10} \left\{ 1 - \left[ \frac{(M_{10}^2 - 1) h_2}{2\gamma M_{10}^2 h_{10}} \right]^{1/2} \frac{X}{\delta_0} \right\}^{-2} \quad (3.19)$$

Если в (3.17) учесть

$$u^{(0)} \approx \delta_0^{-1}, \quad \rho_2^{(0)} = h_{10}/h_2, \quad (dv_1/dp_1)_0 = -(M_{10}^2 - 1)^{1/2} \quad (3.20)$$

то решение (3.17) можно представить в форме

$$p^{(1)}(X) = -p_{10} \left\{ 1 - \left[ \frac{(M_{10}^2 - 1) h_{10}}{2\gamma M_{10}^2 h_2} \right]^{1/2} \frac{X}{\delta_0} \right\}^{-2} \quad (3.21)$$

Таким образом, решения, полученные из уравнений Эйлера и при помощи однополосного метода интегральных соотношений, совпадают при  $h_{10}/h_2=1$ . Расхождение решений, полученных для случая малых перепадов давлений, объясняется тем, что в интегральном методе принятая интерполяция подынтегральных выражений приводит к тому, что на изменение наклона внешней границы примерно одинаковое влияние оказывает распределение плотности во всем слое 2. В действительности, как нетрудно видеть из приведенных выше решений уравнений Эйлера, при малых перепадах давлений уменьшение толщины всего слоя вызывается за счет уменьшения толщины струек тока, прилегающих к поверхности тела. При больших перепадах давлений этот источник погрешности однополосного метода интегральных соотношений должен уменьшаться.

Полученные асимптотические решения необходимы для нахождения решения уравнений, описывающих течение в области 3 при  $S \rightarrow -\infty$ . Когда  $|S| \gg 1$ , то (3.19) и (3.21) не зависят от  $\Delta$  и описывают асимптотический вид решений при произвольном заданном перепаде давлений вдали от угловой точки. Разные решения отличаются началом отсчета  $S$ .

4. В области 3 необходимо, как показано выше, решить уравнения пограничного слоя на бесконечном теле в потоке невязкого газа, ускоряющегося в области, бесконечно удаленной вверх по течению. Распределение скорости на внешней границе пограничного слоя найдено в предыдущих разделах работы. Следуя работе [2], вводим координаты

$$\xi = C \int_{-\infty}^S (\rho\mu)_{32} u_{31}^2 dS, \quad \eta = u_{31} \int_0^Y \rho_3 dY \quad (4.1)$$

Константу  $C$  определим так, чтобы при  $S \rightarrow -\infty$  величина производной  $du_{31}/d\xi \rightarrow 1$ . Для этого необходимо использовать (3.19) или (3.21)

$$\xi = \frac{(M_{10}^2 - 1)^{1/2}}{2p_{10}\delta_0} \int_{-\infty}^S p_3 u_{31}^2 dS$$

В этих переменных уравнения пограничного слоя принимают вид

$$\begin{aligned} (Nf'')' + \beta(\xi) (R_3 - f^2) &= \alpha(\xi) (f'f' - f'f'') \\ (Ng'/\sigma)' + \alpha_1^2(\xi) [N(1 - \sigma^{-1}) (f'^2)'] &= \alpha(\xi) (f'g - fg') \end{aligned} \quad (4.2)$$

Краевые условия

$$f(0) = f'(0) = 0, \quad f'(\infty) = g(\infty) = g(0) = 1,$$

$$u_{31} f'(\xi, \eta) = u_3, \quad \alpha(\xi) = u_{31} \quad (4.3)$$

$$N = \frac{\rho\mu}{(\rho\mu)_{32}}, \quad g = \frac{H_3}{H_{31}}, \quad \alpha_1(\xi) = \frac{u_{31}^2}{2H_{31}}, \quad \beta(\xi) = \frac{du_{31}}{d\xi}$$

Область  $S \rightarrow -\infty$  отображается в окрестность точки  $\xi = 0$ . В этой области  $N \approx R_3 \approx 1$ ,  $\alpha_1 \approx \alpha \approx 0$ ,  $\beta \rightarrow 1$ . Система (4.2) принимает вид

$$f''' + 1 - f^2 = 0, \quad g = 1 \quad (4.4)$$

Уравнение (4.4) допускает решение в квадратурах. Обычно это решение считают соответствующим течению несжимаемой жидкости в сужающемся канале [6]. Интегрирование системы (4.2) при граничных условиях (4.3) проведено при помощи полустандартной программы, созданной на основе метода [7] Селиверстовым для ЭВМ М-20.

Приводим распределение трения и тепловых потоков по координате  $S$  при значении числа Прандтля  $\sigma$ , равном 0.71.

| $S$                   | 0 | 0.5  | 1.0  | 1.5  | 2.0  | 2.5  | 3.0  | 3.5  | 4.0  | 4.5  | 5.0  |
|-----------------------|---|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| $f_{32}''$            | — | 1.97 | 1.70 | 1.59 | 1.53 | 1.48 | 1.45 | 1.42 | 1.40 | 1.38 | 2.37 |
| $-g_{22}' \cdot 10^2$ | — | 0.88 | 0.50 | 0.35 | 0.26 | 0.20 | 0.17 | 0.14 | 0.12 | 0.10 | 0.08 |

При значении  $\sigma$ , равном 1.5, результаты расчетов даны в зависимости от значений переменной интегрирования  $\xi$

| $\xi$                | 0    | 0.02 | 0.04 | 0.06 | 0.08 | 0.09 | 0.10 | 0.11 | 0.12 | 0.13 | 0.14 |
|----------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| $f_{32}''$           | 1.15 | 1.21 | 1.29 | 1.38 | 1.49 | 1.56 | 1.66 | 1.78 | 1.94 | 2.18 | 1.66 |
| $g_{32}' \cdot 10^3$ | 0    | 0.10 | 0.60 | 1.70 | 3.80 | 5.60 | 7.80 | 11.0 | 16.3 | 25.0 | 44.6 |

Приведем формулы, связывающие коэффициент сопротивления трения  $C_f$  и число  $S_{32}$  с безразмерными параметрами вязкого подслоя:

$$C_f = 2R^{-1/4} u_{31}^2 \rho_{32} f_2'', \quad S_{32} = R^{-1/4} u_{31} \rho_{32} g_2' H_2 / H_{11} \sigma_2$$

Видно, что  $C_f$  и  $S_{32}$  в рассматриваемой области  $S = O(1)$  — величины порядка  $R^{-1/4}$ , а не  $R^{-1/2}$ , как в остальной области. Найденные главные члены для  $C_f$  и  $S_{32}$  при  $S \rightarrow -\infty$  обращаются в нуль, так как  $u_{31}(-\infty) = 0$ . В основной части области  $C_f > 0$ , а  $S_{32}$  имеет знак величины  $\sigma - 1$ . При значении числа Прандтля  $\sigma$ , равном единице, главный член разложения для  $S_{32}$  обращается в нуль. Дело в том, что его появление обусловлено ускорением в области перед угловой точкой струек тока набегающего пограничного слоя. Это приводит, во-первых, к увеличению диссипации энергии вблизи стенки, а во-вторых, — к уменьшению в некоторой области статической энтальпии до значений, меньших энтальпии газа на стенке. При  $\sigma > 1$  большее значение имеет диссипация, и тепловой поток возрастает; при  $\sigma = 1$ ; эффекты диссипации и теплопроводности уравниваются. Если же  $\sigma < 1$ , то главную роль играет теплопроводность, что приводит к появлению отрицательных тепловых потоков.

Поступило 17 III 1967

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Нейланд В. Я., Сычев В. В. Асимптотические решения уравнений Навье-Стокса в областях с большими локальными возмущениями. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 4.
2. Нейланд В. Я. О решении уравнений ламинарного пограничного слоя при произвольных начальных условиях. ПММ, 1966, т. 30 вып. 4.
3. Доронницын А. А. Об одном методе численного решения некоторых нелинейных задач аэродинамики. Тр. III Всесоюз. матем. съезда, 1956, т. III, Изд-во АН СССР, 1958, стр. 447—453.
4. Лунькин Ю. П., Попов Ф. Д., Тимофеева Т. Я., Липницкий Ю. П. Проход особых точек при численном решении задач о сверхзвуковом обтекании тел. Тр. Ленингр. политехн. ин-та, Машиностроение, 1956, № 248.
5. Lighthill M. J. Reflection at a laminar boundary layer of a weak steady disturbance to a supersonic stream, neglecting viscosity and heat conduction. Quart. J. Mech. and Appl. Math., 1950, vol. 3, p. 3.
6. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. Изд. иностр. лит., 1956.
7. Петухов И. В. Численный расчет двумерных течений в пограничном слое. Сб. «Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений и квадратурные формулы», Изд-во «Наука», 1964.