

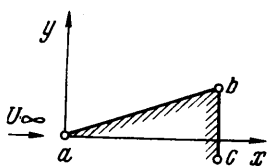
ТОНКИЕ ПЛОСКИЕ ТЕЛА МИНИМАЛЬНОГО ВОЛНОВОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ В НЕРАВНОВЕСНОМ СВЕРХЗВУКОВОМ ПОТОКЕ

А. Н. КРАЙКО, Р. А. ТКАЛЕНКО

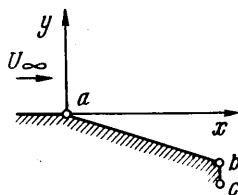
(Москва)

В работе [1] задача оптимального профилирования контуров плоских и осесимметричных тел, обтекаемых сверхзвуковым неравновесным потоком без образования ударной волны (к их числу, в частности, относятся контуры кормовых частей и сопел), сведена к краевой задаче для гиперболической системы уравнений, которая включает уравнения течения и уравнения для множителей Лагранжа¹. Ввиду сложности ее решения в [2] построение контура оптимального сопла проведено на основе одномерного приближения. Хотя такой подход и позволяет установить порядок возможного выигрыша, однако заключения о форме контура, следующие из него, носят в основном качественный характер. Ниже построение плоских тонких тел минимального волнового сопротивления при неравновесном сверхзвуковом течении проведено в линейном приближении, что ведет к более полному представлению о форме оптимальных контуров. Многочисленные примеры применения линейной теории для оптимизации формы тел в сверхзвуковом потоке совершенного газа приведены в [3].

1. Пусть x, y — прямоугольные координаты, отнесенные к некоторому характерному линейному размеру. Начало координат поместим в переднюю точку a рассматриваемого участка плоского контура, а ось x направим по



Фиг. 1



Фиг. 2

скорости равномерного набегающего потока, текущего слева направо. Набегающий поток считается равновесным и сверхзвуковым, так что $M_\infty > 1$, где M_∞ — число Маха, определенное по «замороженной» скорости звука и скорости газа U_∞° , индекс $^\circ$ приписывается размерным величинам, а индекс $^\infty$ — параметрам невозмущенного течения. Число Маха, определенное по U_∞° и равновесной скорости звука, обозначим через $M_{e\infty}$. Прочие нижние индексы будем приписывать значениям параметров в соответствующих точках контура.

Требуется построить контур ac , проходящий через точки a и c и обеспечивающий минимальное волновое сопротивление при заданном набегающем потоке и фиксированной максимально допустимой длине $L^\circ \equiv x_c^\circ$, которую примем за характерный линейный размер (фиг. 1 и 2). Как показано в [4], при наличии ограничения на длину оптимальный контур может содержать участок краевого экстремума — торец bc , где $x \equiv 1$. В отличие от участка ab , торец газом не обтекается, и поэтому давление p^+ во всех его точках одинаково (давление отнесено к $\rho_\infty^\circ U_\infty^{\circ 2}$, где ρ — плотность).

¹ В формулу (4.5) работы [1] вкралась ошибка: перед третьим слагаемым в фигурной скобке следует поставить знак минус.

Для фиксированных параметров набегающего потока величину p^+ будем считать известной и не зависящей от формы контура ac .

Распределение давления p на ab будем находить по линейной теории. При этом на поверхности тела с образующей $y = y(x)$ имеем [5]

$$p(x) = p_\infty + \beta_\infty^{-1} \left[y'(x) + \int_0^x y'(t) \psi'(x-t) dt \right] \equiv \\ \equiv p_\infty + \beta_\infty^{-1} \frac{d}{dx} \int_0^x y'(t) \psi(x-t) dt \quad (\beta_\infty = \sqrt{M_\infty^2 - 1}) \quad (1.1)$$

Здесь штрихом обозначены произвольные по аргументу, от которого зависит данная функция, а $\psi(x)$ — известная функция x . Данная формула справедлива при наличии и при отсутствии на контуре точек излома.

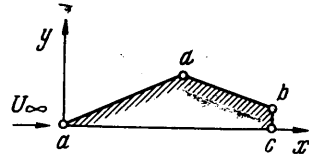
Функция $\psi(x)$ определяется свойствами газа и, в частности, числом неравновесных процессов n . При этом физико-химические константы вместе с L° , p_∞° , ρ_∞° и U_∞° входят в $\psi(x)$ в виде $n(n+1)$ безразмерных комбинаций, причем использование соотношений Онзагера уменьшает их число до $1/2n(n+3)$. В случае плоского профиля или тела вращения, находящихся в безграничном потоке, $\psi(x)$ непрерывна при $0 \leq x \leq 1$, равна единице — при $x = 0$ и нулю — при $x < 0$. Для течения в соплах непрерывность $\psi(x)$ при $0 \leq x \leq 1$ имеет место лишь для $L^\circ/D^\circ < \beta_\infty$, где D° — диаметр или ширина начального сечения сопла, т. е. для коротких сопел, когда характеристика, выходящая из точки a , не приходит на противоположную стенку сопла.

При одном неравновесном процессе функция $\psi(x)$ для верхней стенки плоского контура (или нижней стенки плоского сопла при $L^\circ/D^\circ < \beta_\infty$) имеет вид [8]

$$\psi(x) = F(x) + \frac{L^\circ}{K^\circ} \int_0^x F(\tau) d\tau \quad (1.2)$$

$$F(x) = I_0 [(\omega - 1)X] \exp[-(\omega + 1)X]$$

$$X = \frac{L^\circ}{2K^\circ} x, \quad \omega = \frac{M_{e\infty}^2 - 1}{M_\infty^2 - 1} \geq 1$$



Фиг. 3

Здесь K° — константа с размерностью длины, имеющая смысл длины релаксации, и I_i — модифицированная функция Бесселя первого рода i -го порядка. В том же случае при отсутствии неравновесных процессов, идущих с конечной, отличной от нуля скоростью, $\psi(x) \equiv 1$ при $x \geq 0$.

Введем на ab функцию $z(x)$ в соответствии с уравнением

$$y' - z = 0 \quad (1.3)$$

Тогда условие применимости линейной теории можно записать в виде

$$|z| \leq k < \infty \text{ на } ab \quad (1.4)$$

где k — заданная константа.

Кроме перечисленных, возможны дополнительные ограничения. Например, при некотором $x = x_d < 1$ может задаваться минимально допустимое значение ординаты Y (фиг. 3), т. е.

$$y_d \equiv y(x_d) \geq Y \quad (1.5)$$

Так как волновое сопротивление χ с точностью до несущественной константы β_∞ равно

$$\chi = \int_0^{x_b} \beta_\infty \rho y' dx + \beta_\infty p^+ (y_c - y_b) \quad (1.6)$$

то можно сформулировать следующую вариационную задачу. Среди функций $y(x)$, $z(x)$ и $p(x)$, удовлетворяющих уравнениям (1.1) и (1.3), условию прохождения через точки a и c : $y(0) = 0$ и $y(1) = y_c$ и неравенству (1.4) или неравенствам (1.4) и (1.5), найти функции, доставляющие минимум функционалу (1.6). При этом $0 = x_a \leq x \leq x_b \leq x_c = 1$.

В дальнейшем вместо (1.6) будет использоваться формула

$$\chi = \beta_{\infty} p^+ y_c + \beta_{\infty} (p_{\infty} - p^+) y_b + \int_0^{x_b} y'(x) \frac{d}{dx} \int_0^x y'(t) \psi(x-t) dt dx \quad (1.7)$$

которая получается из (1.6) и (1.1).

2. Для решения вариационной задачи составим функционал

$$\Omega = \chi + \int_0^{x_b} \mu(x) (y' - z) dx$$

где χ дается формулой (1.7), а $\mu(x)$ — неопределенный множитель Лагранжа. При любом допустимом варьировании вариации Ω и χ в силу (1.3) совпадают. Найдем первую вариацию Ω .

При варьировании следует учесть ряд обстоятельств. Прежде всего, контур ab может иметь точки излома и точки разрыва множителя μ , которые обозначим через d, d°, \dots и f, f°, \dots соответственно (в общем случае таких точек может быть несколько). Если какие-либо величины терпят разрыв, то их значениям до (после) точки разрыва будем приписывать индекс минус (плюс). Разность значений (вариацию) параметра $\xi(x)$ для проварьированного и непроварьированного (исходного) контура при фиксированном x обозначим через $\delta\xi$. Приращения координат x и y точек излома для тех же контуров обозначим через Δx и Δy . Учтем, что $\Delta y = \delta y_{\pm} + y_{\pm}' \Delta x$ и что $\Delta x_a = \Delta y_a = \Delta y_c = 0$. Кроме того используется перемена порядка интегрирования, которая, например, в случае отсутствия изломов дает

$$\begin{aligned} & \int_0^{x_b} y'(x) \frac{d}{dx} \int_0^x \delta y'(t) \psi(x-t) dt dx = \\ & = y_b' \delta y_b + \int_0^{x_b} \left[y'(x) \psi'(0) + y''(x) + \int_x^{x_b} y'(t) \psi''(t-x) dt \right] \delta y(x) dx \end{aligned}$$

Проводя выкладки, включающие интегрирование по частям, получим

$$\begin{aligned} \delta\chi \equiv \delta\Omega &= [\beta_{\infty} (p - p^+) y']_b \Delta x_b + [\beta_{\infty} (p - p^+) + y' + \mu]_b \delta y_b + \\ & + \sum_{r=d, d^{\circ}, \dots} [2(y'_- - y'_+) \delta y_- + (y'_- - y'_+)^2 \Delta x_r] + \sum_{r=f, f^{\circ}, \dots} (\mu_- - \mu_+) \delta y_r + \\ & + \left(\int_a^i + \dots + \int_j^b \right) [(W - \mu') \delta y - \mu \delta z] dx \end{aligned} \quad (2.1)$$

Здесь суммирование проводится по всем точкам разрыва; интервал интегрирования разбит на участки непрерывности y' и μ ; i и j — первая и последняя точки разрыва; функция W определена равенством

$$W = -2y''(x) - \int_0^x y'(t) \psi''(x-t) dt + \int_x^{x_b} y'(t) \psi''(t-x) dt$$

Так как рассматриваются только тонкие тела, для которых $|y'| \leq k$, то непроварьированные контуры могут состоять из участков лишь двух типов: $|z| < k$ и

$$y' \equiv z = \pm k \quad (2.2)$$

Пользуясь произволом в выборе μ , обратим в (2.1) в нули коэффициенты перед δy на участках (2.2) и перед δz — на остальных, т. е. положим

$$\mu' = W \quad (\text{при } z = \pm k), \quad \mu = \mu' = 0 \quad (\text{при } |z| < k) \quad (2.3)$$

В качестве условий для интегрирования (2.3) потребуем выполнения

$$\mu_{r-} = 0 \quad (r = l, l^{\circ}, \dots) \quad (2.4)$$

на правом конце каждого участка (2.2), т. е. l, l°, \dots — те из точек f, f°, \dots , которые являются правыми концами этих участков. Если правым концом такого участка будет точка b , то в ней также потребуем выполнения (2.4). Ясно, что описанный выбор $\mu(x)$ можно осуществить для любого контура вне зависимости от того, является он оптимальным или нет.

В соответствии с (2.1), (2.3) и (2.4), получим

$$\begin{aligned} \delta\chi = & -y_b'^2 \Delta x_b + [\beta_{\infty}(p - p^+) + y_b'] \Delta y_b + \\ & + \sum_{r=d, d^{\circ}, \dots} [2(y_{-}' - y_{+}') \delta y_{-} + (y_{-}' - y_{+}')^2 \Delta x]_r + \sum_{r=j, j^{\circ}, \dots} \mu_{r+} \delta y_r + \\ & + \left(\int_i^m + \int_{i^{\circ}}^{m^{\circ}} + \dots \right) W \delta y dx - \left(\int_j^l + \int_{j^{\circ}}^{l^{\circ}} + \dots \right) \mu \delta z dx \quad (2.5) \end{aligned}$$

Здесь $im, i^{\circ}m^{\circ}, \dots$ — отрезки, на которых $|z| < k$, а $jl, j^{\circ}l^{\circ}, \dots$ — отрезки (2.2). Отрезки двух типов могут чередоваться. При этом правые концы отрезков одного типа являются левыми концами отрезков другого типа, а точки a и b — левой и правой точками первого и последнего отрезков. Отрезки одного типа могут соединяться в точках излома.

Если исходный контур был оптимальным, то любое допустимое варьирование такого контура должно вести к росту χ , т. е. при этом $\delta\chi \geq 0$.

3. Рассмотрим сначала задачу без ограничения (1.5). Здесь знаки допустимых вариаций δy на $im, i^{\circ}m^{\circ}, \dots$, Δx_b при $x_b < 1$, Δy_b при $y_b \neq y_c$, δy_{r-} и Δx_r при $r = d, d^{\circ}, \dots$ и δy_r при $r = j, j^{\circ}, \dots$ — произвольны, а Δx_b при $x_b = 1$, Δy_b при $y_b = y_c$ и δz при $y' = \pm k$ удовлетворяют условиям $\Delta x_b \leq 0$, $\Delta y_b \geq 0$ и $\delta z \text{ sign } z \leq 0$.

Отсюда и из (2.5) видим, что контур ac при $y_b' \neq 0$ имеет максимально допустимую длину, т. е. $x_b = 1$, и при отсутствии ограничений на минимально допустимую толщину участок ab будет гладким. При этом условие того, что торец bc — участок краевого экстремума ($-y_b'^2 < 0$), выполняется автоматически. Форма участков двустороннего экстремума, где $|y'| < k$, значение ординаты точки b при $y_b > y_c$ и протяженность участков краевого экстремума (2.2) определяются равенствами

$$W = 0, \quad \beta_{\infty}(p_b - p^+) + y_b' = 0, \quad \mu_{r+} = 0 \quad (r = j, j^{\circ}, \dots) \quad (3.1)$$

где j, j°, \dots — те из точек f, f°, \dots , которые являются левыми концами отрезков (2.2). Условие того, что отрезки (2.2) — участки краевого экстремума, записывается в виде неравенства

$$\mu(x) \text{sign } y' \leq 0 \quad \text{при } y' = \pm k \quad (3.2)$$

Если точки b и c совпадают, то вместо второго условия (3.1) должно выполняться неравенство (условие отсутствия торца)

$$\beta_{\infty}(p_b - p^+) + y_b' \geq 0 \quad (3.3)$$

Неравенство (3.3) должно выполняться и в том случае, если $y_b \neq y_c$, но весь контур состоит из одного участка краевого экстремума $y' = -k$.

Второе равенство (3.1) и неравенство (3.3) представляют линейную запись условий Буземана. Первоначально эти условия были получены при решении в точной постановке вариационных задач равновесной газовой динамики [4, 7, 8]. Позднее [1, 9] было показано, что они справедливы и при неравновесных течениях. Из (3.1) и (3.3) следует, что контур, изображенный на фиг. 1, реализуется при $p^+ > p_b$, а контур, изображенный на фиг. 2, — при $p^+ < p_b$.

Полученные условия вместе с уравнением

$$y(x) = \int_0^x y'(t) dt \quad (3.4)$$

полностью определяют форму оптимального контура ac .

4. Первое уравнение (3.1), дающее форму участков двустороннего экстремума, с учетом выражения для W , подстановки $x_b = 1$ и однократного интегрирования можно переписать в форме

$$2y'(x) + \int_0^x y'(t)\psi'(x-t)dt + \int_x^1 y'(t)\psi'(t-x)dt = C \quad (4.1)$$

Если начальная точка контура не принадлежит участку (2.2), то константа интегрирования C дается равенством

$$C = 2y_a' + \int_0^1 y'(t)\psi'(t)dt \quad (4.2)$$

При отсутствии неравновесных процессов, когда $\psi(x) = 1$, из (4.1) следует известный результат $y'(x) = \text{const}$, т. е. участок двустороннего экстремума есть отрезок прямой.

Сделаем в (4.1) замену переменной

$$\tau = 1 - t \quad (4.3)$$

Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} \int_0^{1-x} y'(t)\psi'(1-x-t)dt &= \int_x^1 y'(1-\tau)\psi'(\tau-x)d\tau \\ \int_{1-x}^1 y'(t)\psi'(t-1+x)dt &= \int_0^x y'(1-\tau)\psi'(x-\tau)d\tau \end{aligned} \quad (4.4)$$

В силу этих равенств для $y'(1-x)$ из (4.1) получим такое же уравнение, как и само уравнение (4.1) для определения $y'(x)$. Следовательно, наклон $y'(x)$ экстремального контура, состоящего из одного участка двустороннего экстремума, симметричен относительно середины интервала ($x = 0.5$); этот вывод справедлив для любой функции $\psi(x)$, т. е. при произвольном числе неравновесных процессов. Интегрирование (2.3) дает

$$\mu(x) + 2y'(x) + \int_0^x y'(t)\psi'(x-t)dt + \int_x^1 y'(t)\psi'(t-x)dt = C \quad (4.5)$$

Используя (4.1), (4.5), (2.5) и последнее условие (3.1), можно показать, что для оптимального контура, не имеющего на ab точек излома, константы C в (4.1) и (4.5) совпадают и, кроме того, одинаковы на всех участках двустороннего и краевого экстремума. Из этих же уравнений и условий с учетом (4.3) и (4.4) можно показать, что при отсутствии изломов, как и для контура, состоящего только из одного участка двустороннего

экстремума, имеет место симметрия относительно $x = 0.5$, причем не только для $y'(x)$, но и для $\mu(x)$, т. е.

$$y'(1-x) = y'(x), \quad \mu(1-x) = \mu(x) \quad (4.6)$$

Наконец, из (4.1) и (4.2) следует, что $y'(x)$ или всюду при $0 \leq x \leq 1$ сохраняет знак, или $y'(x) \equiv 0$ и, как следствие, $p(x) \equiv p_\infty$ и $p^+ = p_\infty$. Только в этом особом случае длина оптимального контура может быть меньше максимально допустимой, и, как и при одномерном рассмотрении [2], имеется бесчисленное количество оптимальных контуров с одинаковым сопротивлением.

При фиксированном набегающем потоке разным значениям p^+ соответствуют различные оптимальные контуры, т. е. разные функции $y(x)$, $y'(x)$ и коэффициенты сопротивления отрезка ab

$$c_x = \beta_\infty \int_0^1 (p - p_\infty) y' dx \quad (4.7)$$

Если вместо p^+ за параметр, характеризующий контур, взять $y_{a'}$, то $y(x)$, $y'(x)$, $c(x)$ и p^+ , при котором данный контур оптимален, будут функциями $y_{a'}$. При этом, если $y_{a'} \neq 0$ и ab состоит только из участка двустороннего экстремума, то, как следует из (1.1), (1.6), (3.1), (3.4), (4.1), (4.2) и (4.7), комбинации

$$\frac{c_x}{y_{a'}^2}, \quad \frac{\beta_\infty(p_\infty - p^+)}{y_{a'}}, \quad \frac{y_b}{y_{a'}}, \quad \frac{y(x)}{y_{a'}}, \quad \frac{y'(x)}{y_{a'}} \quad (4.8)$$

оказываются универсальными, т. е. не зависят от $y_{a'}$, а определяются только видом функции $\psi(x)$ и, следовательно, теми безразмерными константами (связанными со свойствами газа и параметрами невозмущенного течения), которые входят в эту функцию. Следовательно, в этом случае достаточно построить один единственный оптимальный контур. Контур, отвечающие другим значениям p^+ (или $y_{a'}$), получаются из него простым пересчетом.

5. Решение задачи для случая, когда в некоторой внутренней точке $0 < x_d < 1$ задана минимально допустимая толщина Y , несколько отличается от рассмотренного выше. Если ордината y_d , найденная из решения той же задачи, но без ограничения на толщину, оказывается меньше, чем Y , то оптимальный контур в точке $x = x_d$, $y = Y$ имеет излом (фиг. 3). При этом из (2.6) можно показать, что все допустимые перемещения излома (увеличивающие толщину контура) ведут к увеличению χ . На ad и db изломы отсутствуют. Здесь, как и ранее, выполняются соотношения (3.1) — (3.3). В то же время уравнение (4.1) следует заменить на

$$2y'(x) + \int_0^x y'(t)\psi'(x-t)dt + \int_x^1 y'(t)\psi'(t-x)dt = C_- \quad (5.1)$$

для $0 < x < x_d$ и аналогичное уравнение с константой C_+ для $x_d < x < 1$. Константы C_- и C_+ равны

$$C_- = 2y_{a'} + \int_0^1 y'(t)\psi'(t)dt, \quad C_+ = 2y_{b'} + \int_0^1 y'(t)\psi'(1-t)dt \quad (5.2)$$

Любое из равенств (5.2) можно заменить эквивалентным соотношением

$$C_+ = C_- + 2(y_{+}' - y_{-}')_d$$

На два уравнения с константами C_- и C_+ следует заменить и уравнение (4.5).

Если контур ab не содержит участков краевого экстремума (2.2), то для данного набегающего потока и фиксированных x_d и y_b/Y комбинации (4.8) остаются универсальными, как и для гладкого контура.

Пусть $x_d = 0.5$ и $y_b = 0$. Докажем, что при этом $y'(x)$ и $\mu(x)$ для оптимального контура являются нечетными функциями относительно точки $x = 0.5$, т. е.

$$y'(1-x) = -y'(x), \quad \mu(1-x) = -\mu(x) \quad (5.3)$$

что, кстати, при $x_d = 0.5$ дает $y_b = 0$.

Второе равенство (5.2) можно переписать в форме

$$C_+ = 2y_b' + \int_0^1 y'(1-t)\psi'(t) dt \quad (5.4)$$

Допустим, что первое равенство (5.3) действительно имеет место. Тогда из (5.4) и первого уравнения (5.2) следует, что $C_+ = -C_-$. Теперь для доказательства сделанного допущения достаточно убедиться, что подстановка $C_+ = -C_-$ в уравнения для $y'(1-x)$ и $\mu(1-x)$ приводит к (5.3). Последнее легко получается, если произвести в указанных уравнениях замену (4.3), а затем воспользоваться тождествами (4.4). Наконец, образующая профиля $y = y(x)$ оказывается, в силу (5.3) и (3.4), симметричной относительно его середины.

6. Расчеты проводились для течения с одним неравновесным процессом, когда $\psi(x)$ дается формулой (1.2), а $\psi'(x)$ равна

$$\psi'(x) = (\omega - 1)(L^\circ / 2K^\circ) \{I_0[(\omega - 1)X] - I_1[(\omega - 1)X]\} \exp[-(\omega + 1)X]$$

Во всех рассмотренных случаях $\omega = 2$, а отношение L° / K° было взято равным 0.1, 1.0, 10 и 100. Напомним, что $L^\circ / K^\circ = 0$ соответствует замороженному, а $L^\circ / K^\circ = \infty$ — равновесному течению. В обоих предельных случаях оптимальный контур состоит из одного или нескольких прямолинейных отрезков.

Расчеты велись методом итераций на ЭВМ М-20. При вычислении интегралов в интегральных уравнениях отношение $y'(x)/y_a'$ бралось по результатам предыдущего приближения. За нулевое приближение в случае гладкого контура ab принималось $y'(x)/y_a' = 1$. Для контура с изломом нулевым приближением было

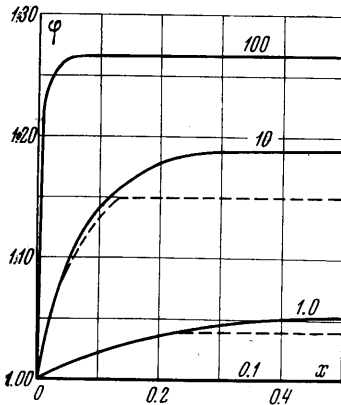
$$y'(x)/y_a' = \begin{cases} 1 & (0 < x < x_d) \\ (Y - y_b)/(x_d - 1)y_a' & (x_d < x < 1) \end{cases}$$

Интервал изменения x от 0 до 1 разбивался на 100 равных частей. Это, как показали расчеты с большим числом точек, обеспечивало правильность всех знаков в результатах, приводимых ниже. Расчет гладкого контура занимал 2–4 мин., а расчет контура с изломом образующей при заданных x_d и y_b/Y требовал 30–60 мин. (увеличение времени счета вызвано необходимостью пристрелки на заданное значение y_b/Y). В случаях, когда справедливы свойства (4.6) или (5.3), время счета можно сократить вдвое. После построения контура считается s_x и проверяются условия оптимальности, сформулированные в виде неравенств, в частности, при наличии участков (2.2) — неравенства (3.2).

Для сравнения рассчитывалось обтекание контуров, образующие которых проходят через те же точки a и b или a , b и d , но состоят из прямолинейных отрезков. Значение s_x отрезка ab таких контуров обозначим через s_{x0} .

Некоторые параметры рассчитанных контуров приведены в таблице. Каждая строка таблицы относится к одному оптимальному контуру.

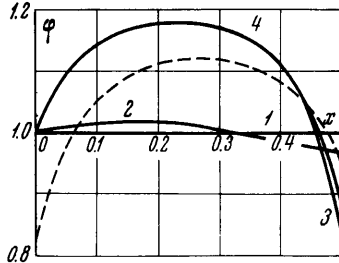
Первые три контура — гладкие и соответствуют разным L° / K° . Распределение наклона $\varphi(x) \equiv y'(x)/y_a'$ для них, а также для гладкого оптимального контура при $L^\circ / K^\circ = 100$ даны на фиг. 4 сплошными линиями, где в соответствии со свойством симметрии показана только половина контура (цифры над кривыми — значения L° / K°). Видны закономерности, по которым оптимальные контуры при $0 < L^\circ / K^\circ < \infty$ вырождаются в предельных случаях в прямолинейные. При уменьшении L° / K° имеем $\varphi(x) \rightarrow 1$, т. е. приближение к прямой происходит за счет все меньшего и меньшего изменения наклона образующей. При



Фиг. 4

росте L° / K° функция $\varphi(x)$ стремится к отличной от единицы константе всюду, кроме малых окрестностей точек a и b , т. е. контур становится все более прямым на большей части отрезка ab с быстрым изменением $\varphi(x)$ на конечную величину вблизи его концов. На той же фигуре штриховыми линиями даны два контура ($L^\circ / K^\circ = 1.0$ и 10) с участками краевого экстремума (2.2). Значения y_a' для них соответственно равны $\pm 0.9615 k$ и $\pm 0.8696 k$. Интересно, что $\varphi(x)$ вне участков краевого экстремума весьма мало отличаются от $\varphi(x)$ контуров, соответствующих тем же L° / K° , но не имеющих участков (2.2). Все рассмотренные примеры при $y_a' > 0$ дают тела типа, изображенного на фиг. 1, а при $y_a' < 0$ — тела типа, изображенного на фиг. 2.

Последние четыре строки таблицы относятся к профилям с изломом при $x_d = 0.5$. Отношения Y / y_a' для них соответственно равны 0.4998, 0.4956, 0.5566 и 0.5572, а y_b / Y для первых трех равно нулю, а для последнего $y_b / Y = 0.0311$. Распределения $\varphi(x)$ для передних частей профилей даны на фиг. 5 сплошными линиями (цифры 1, 2, 3, 4 над ними — номера этих профилей в порядке их следования в таблице). Штриховой линией нанесено $[-y'(x - 0.5) / y_a']$ на хвостовой части последнего профиля (при $y_b / Y = 0$ распределение $\varphi(x)$ на хвостовой части профиля получается из условия нечетности относительно его середины).



Фиг. 5

L° / K°	y_b / y_a'	$\beta_\infty(p_\infty - p^+) / y_a'$	$c_x / y_a'^2$	c_x / c_{x_0}
0.1	1.0007	-1.9541	0.9777	0.99999
1.0	1.0340	-1.7546	0.9072	0.99976
10	1.1626	-1.6811	0.9772	0.99843
0.1	0.0000	1.9980	0.9984	0.99998
1.0	0.0000	1.9037	0.9420	0.99930
10	0.0000	1.6818	0.9336	0.99434
10	0.0311	1.6465	0.8870	0.99726

Как видно из таблицы, построенные оптимальные контуры хотя и дают уменьшение сопротивления по сравнению с контурами из прямолинейных отрезков, однако оно оказывается незначительным. Такой результат справедлив только для тонких профилей, когда имеет смысл линеаризация уравнений кинетики, лежащая в основе теории. При больших отклонениях от равновесия из-за сильной нелинейности правых частей уравнений кинетики такая линеаризация становится несправедливой, и здесь возможен значительный выигрыш [2].

Авторы благодарят Л. Е. Стернина за постоянную поддержку.

Поступило 1 III 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Крайко А. Н. Вариационные задачи газовой динамики неравновесных и равновесных течений. ПММ, 1964, т. 28, вып. 2, стр. 285—295.
2. Галюн Н. С., Крайко А. Н. Об одной вариационной задаче одномерной неравновесной газовой динамики. Изв. АН СССР. МЖГ, 1966, № 2, стр. 27—36.
3. Theory of optimum aerodynamic shapes. Extremal problems in the aerodynamics of supersonic, hypersonic, and free-molecular flows. New York — London, Acad. Press, 1965.
4. Крайко А. Н., Наумова И. Н., Шмыглевский, Ю. Д. К построению тел оптимальной формы в сверхзвуковом потоке. ПММ, 1964, т. 28, вып. 1.
5. Крайко А. Н. Исследование слабо возмущенных сверхзвуковых течений при произвольном числе неравновесных процессов. ПММ, 1966, т. 30, вып. 4, стр. 661—673.
6. Der J. J. Linearized supersonic nonequilibrium flow past arbitrary boundary. NASA, Technical report R-119, 1961.
7. Guderley G., Hantsch E. Beste Formen für achsensymmetrische Überschall-schubdüsen. Z. Flugwiss 1955, В. 3, Н. 9, S. 305—313. (Русск. перев., Сб. перевод и обз. ин. период. лит., Механика, Изд. иностр. лит., 1956, № 4 (38)).
8. Шмыглевский, Ю. Д. Некоторые вариационные задачи газовой динамики. Тр. ВЦ АН СССР, 1963.
9. Крайко А. Н. Вариационные задачи сверхзвуковых течений газа с произвольными термодинамическими свойствами. Тр. ВЦ АН СССР, 1963.