

ВЫБОР ФОРМЫ КРЫЛА ДЛЯ ГИПЕРЗВУКОВЫХ СКОРОСТЕЙ

Г. И. МАЙКАПАР

(Москва)

Выбор формы и размеров крыла рассматривается как задача на экстремум: минимуму сопротивления при заданных подъемной силе, объеме, температуре передней кромки и других связях. Определены характеристические параметры, от которых зависит оптимальный профиль продольного сечения, и в частности те их значения, которые разделяют случаи заданного и не заданного объема.

Показано, что существует относительная толщина крыла, при которой аэродинамическое качество при заданном вредном сопротивлении достигает наибольшей величины. Сферический сегмент не всегда является оптимальной формой передней кромки в окрестности критической точки.

Выбор формы и размеров крыла можно сформулировать как задачу на экстремум для сопротивления, аэродинамического качества, максимальной температуры поверхности или расхода охладителя при заданном объеме, каких-либо из указанных величинах и других связях.

Для того чтобы решить такую экстремальную задачу в достаточно общем виде, не прибегая к систематическим расчетам большого объема, приходится пользоваться простейшими «законами». В качестве таковых в настоящей работе приняты «закон» Ньютона для давления и «средний» коэффициент трения, не зависящий от формы крыла. Естественно, при этом не рассматриваются формы с изломами поверхности и не могут быть достаточно точно учтены эффекты взаимодействия элементов, ударных волн и пограничного слоя, не учитывается также влияние большой, сравнимой с размерами крыла, толщины пограничного слоя. Следует иметь в виду также, что в гипотетических летательных аппаратах трудно отделить крыло от двигателя. Выше-сказанное определяет значение решений экстремальных задач как предельных оценок характеристик и указателей направления, но отнюдь не прямых практических рекомендаций.

Если объем крыла не задан, то можно считать нижнюю сторону его плоской, верхнюю находящейся в «тени» (области отрывного течения), тогда в соответствии с законом Ньютона подъемная сила, сопротивление и аэродинамическое качество

$$Y = 2qS \sin^2 \alpha \cos \alpha, \quad X = 2qS (c_0 + \sin^3 \alpha)$$

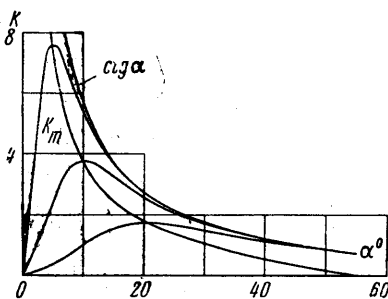
$$K = \sin^2 \alpha \cos \alpha / (c_0 + \sin^3 \alpha)$$

Здесь предполагается, что коэффициент «вредного» сопротивления c_0 включает в себя сопротивление трения и сопротивление передней затупленной кромки крыла, а также верхней его стороны и от угла атаки α не зависит. Максимальное аэродинамическое качество

$$K_m = 1/3 (2 \operatorname{ctg} \alpha_m - \operatorname{tg} \alpha_m)$$

Соответствующий угол атаки определяется из уравнения

$$\sin \alpha_m / (2 \operatorname{ctg}^2 \alpha_m - 1) = c_0$$



Фиг. 1

Кривые качества имеют максимум только если $\alpha_m < 54^\circ 44'$, этому углу соответствует максимально возможное значение коэффициента подъемной силы и бесконечная величина c_0 . Кривые качества для всех c_0 при $\alpha > \alpha_m$ расположены между кривой $\operatorname{ctg} \alpha$ — качеством «идеальной» пластины (фиг. 1) и кривой K_m . Очевидно, что качество большее двух можно получить только при углах атаки $\alpha < 20 \div 25^\circ$, т. е. сравнительно небольших; в настоящей работе рассматривается тонкое крыло при малых углах атаки.

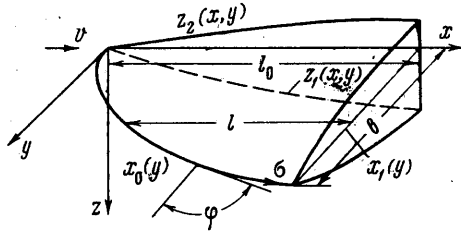
1. Профиль продольного сечения. Сопротивление передней затупленной кромки пока включим во вредное сопротивление, характеризуемое коэффициентом c_0 . Предположим, что на поверхности крыла нет участков конечной площади с нулевым давлением, нижнюю и верхнюю стороны крыла зададим положительными функциями $z_1(x, y)$, $z_2(x, y)$; в силу предположения о тонкости крыла (фиг. 2)

$$\begin{aligned} z_x &= \partial z / \partial x \ll 1 \\ z_y &= \partial z / \partial y \ll 1 \end{aligned}$$

Тогда, пренебрегая малыми порядками выше третьего, для подъемной силы и сопротивления получим

$$Y = 2q \int_0^b \int_{x_0}^{x_1} (z_{1x}^2 - z_{2x}^2) dx dy$$

$$\frac{X}{2q} = c_0 S + \int_0^b \int_{x_0}^{x_1} (z_{1x}^3 + z_{2x}^3) dx dy$$



Фиг. 2

Здесь S — площадь крыла, q — скоростной напор.

Будем искать минимум сопротивления при заданной подъемной силе и объеме V , т. е. минимум функционала ¹

$$\begin{aligned} X - \lambda Y - \frac{2q\mu V}{h} &= 2q \left[c_0 S + \int_0^b \int_{x_0}^{x_1} \left(z_{1x}^3 - \lambda z_{1x}^2 - \frac{\mu z_2}{b} \right) dx dy + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^b \int_{x_0}^{x_1} \left(z_{2x}^3 + \lambda z_{2x}^2 - \frac{\mu z_1}{b} \right) dx dy \right] \end{aligned} \quad (1.2)$$

Равенство нулю первой вариации (1.2) дает

$$\frac{\partial}{\partial x} (3z_{1x}^2 - 2\lambda z_{1x}) + \frac{\mu}{b} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} (3z_{2x}^2 + 2\lambda z_{2x}) + \frac{\mu}{b} = 0 \quad (1.3)$$

Граничные условия на кромках имеем в виде

$$[(3z_{1x}^2 - 2\lambda z_{1x}) \delta z_1]_{x_0}^{x_1} = 0, \quad [(3z_{2x}^2 + 2\lambda z_{2x}) \delta z_2]_{x_0}^{x_1} = 0 \quad (1.4)$$

Считая координаты z_1, z_2 на передней кромке заданными, а граничные условия на задней кромке естественными, для задней кромки получим

$$z_{1x} (3z_{1x} - 2\lambda) = 0, \quad z_{2x} (3z_{2x} + 2\lambda) = 0 \quad (1.5)$$

Интегрируя (1.3) и определяя постоянные, при помощи (1.5), получим

$$\begin{aligned} z_{1x} &= \frac{1}{3}\lambda + \sqrt{\frac{1}{9}\lambda^2 + \frac{1}{3}\mu b^{-1}(x_1 - x)}, \\ z_{2x} &= -\frac{1}{3}\lambda + \sqrt{\frac{1}{9}\lambda^2 + \frac{1}{3}\mu b^{-1}(x_1 - x)} \end{aligned} \quad (1.6)$$

Из четырех корней (1.5) условиям задачи отвечают только два

$$z_{1x} = \frac{2}{3}\lambda, \quad z_{2x} = 0$$

т. е. давление обращается в нуль на задней кромке верхней стороны крыла. При таком выборе корней перед квадратными корнями следует оставить знак плюс.

¹ Задача о крыле минимального сопротивления рассмотрена в [1,2].

Интегрируя (1.6) и считая, что координаты z_{10} , z_{20} на передней кромке заданы, получим

$$\begin{aligned} z_1 - z_{10} &= \frac{1}{3}\lambda(x - x_0) + 2(b/\mu) \{ [1/9\lambda^2 + 1/3\mu b^{-1}(x_1 - x_0)]^{1/2} - \\ &\quad - [1/9\lambda^2 + 1/3\mu b^{-1}(x_1 - x)]^{1/2} \} \\ z_2 - z_{20} &= -\frac{1}{3}\lambda(x - x_0) + 2(b/\mu) \{ [1/9\lambda^2 + 1/3\mu b^{-1}(x_1 - x_0)]^{1/2} - \\ &\quad - [1/9\lambda^2 + 1/3\mu b^{-1}(x_1 - x)]^{1/2} \} \end{aligned} \quad (1.7)$$

Заметим, что множитель $\mu < 0$ условиям задачи не удовлетворяет, так как при этом $z_{2x} < 0$. Экстремальный профиль — симметричный, угол атаки $\alpha = 1/3\lambda$. Вычислим теперь X , Y , V :

$$\frac{Y}{2qb^2} = c_y = \lambda^2 f_2(\omega), \quad \frac{X}{2qb^2} - \frac{c_0 S}{b^2} = \lambda^3 f_3(\omega), \quad \frac{V}{b^3} = v = \lambda f_1(\omega) \quad (1.8)$$

Здесь

$$\begin{aligned} f_1(\omega) &= (2/3)^3 \frac{1}{15\omega^2} (1 + 3/2i^{3/2} - 5/2i^{1/2}), \quad f_2(\omega) = (2/3)^3 \frac{1}{3\omega} (i^{1/2} - 1) \\ f_3(\omega) &= (2/3)^3 \frac{1}{5\omega} (1/6i^{5/2} + 5/6i^{3/2} - 1) \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$i_n(\omega) = \int_0^1 (1 + 3\omega l')^n dy', \quad \omega = \frac{\mu}{\lambda^2}, \quad l' = \frac{l}{b} = \frac{x_1 - x_0}{b}$$

Функционал (1.2) равен

$$X - \lambda Y - \frac{2q\mu V}{b} = 2qb^2 \left[c_0 \frac{S}{b^2} + \frac{(2/3)^3 \lambda^3}{15\omega} (1 - i^{1/2}) \right] \quad (1.10)$$

Ордината профиля продольного сечения крыла

$$z' = \frac{z - z_0}{b} = \frac{2\lambda}{27\omega} \{ (1 + 3\omega l')^{3/2} - [1 + 3\omega l' (1 - \xi)]^{3/2} \}, \quad \xi = \frac{x - x_0}{l} \quad (1.11)$$

Из формул (1.8) очевидно, что при принятых условиях на характеристики крыла влияет только распределение площади крыла по размаху, но не форма в плане. Величина параметра ω , определяющего форму профиля, зависит от параметра

$$\frac{v^2}{c_y} = \frac{f_1^2(\omega)}{f_2(\omega)} \quad (1.12)$$

характеристического для вариационных задач, в которых минимум сопротивления ищется при заданных подъемной силе и объеме¹.

Задача о максимуме аэродинамического качества при заданном объеме, т. е. о минимуме функционала $X/Y - vV/b^3$, сводится к предыдущей, если принять $\lambda = 1/K$, $\mu = vY/2qb^2$, где v — неопределенный множитель.

Формулы (1.8) переходят в

$$\begin{aligned} vK &= f_1(\omega), \quad v = \frac{\omega}{f_2(\omega)}, \quad \frac{\omega}{v} - \frac{K^3 c_0 S}{b^2} = f_3(\omega) \\ \frac{c_0 S}{b^2 v^3} &= \frac{f_2(\omega) - f_3(\omega)}{f_1^3(\omega)}, \quad \omega = v c_y K^2 \end{aligned} \quad (1.13)$$

Таким образом, в данном случае характеристическим параметром, определяющим форму профиля, будет отношение «вредного» сопротивления к

¹ Этот параметр введен в работе [7], любезно присланной автором.

волновому $^1 c_0 S / b^2 v^3$, функционал равен

$$X/Y - \sqrt{V}/b^3 = [1 - \sqrt{f_1(\omega)}]/K \quad (1.14)$$

При $\omega \rightarrow 0$ выражение (1.14) для z' переходит в

$$z' = {}^1/3 \lambda (x - x_0) / b$$

т. е. профиль превращается в клин с верхней стороной по потоку.

Чтобы найти значения характеристических параметров, которым соответствует $\omega = 0$, воспользуемся разложением $(1 + 3\omega l')^n$.

Выполняя интегрирование, получим

$$i_n(\omega) = 1 + n(3\omega) s_1 + {}^1/2 n(n-1)(3\omega)^2 s_2 + {}^1/2 \cdot {}^1/3 n(n-1) \times \\ \times (n-2)(3\omega)^3 s_3 + {}^1/2 \cdot {}^1/3 \cdot {}^1/4 n(n-1)(n-2)(n-3)(3\omega)^4 s_4 + \dots$$

$$s_n = \int_0^1 l'^n dy', \quad y' = \frac{y}{b}$$

Подставляя это выражение в (1.9), имеем

$$f_1(\omega) = {}^1/3 (s_2 + \omega s_3 + \dots), \quad f_2(\omega) = {}^1/3 (4/3 s_1 + \omega s_2 + \dots)$$

$$f_3(\omega) = {}^1/3 (8/9 s_1 + \omega s_2 + \dots)$$

и из (1.12) получим

$$\frac{v^2}{c_y} = \left(\frac{s_2^2}{4s_1} \right) \left[1 + \omega \left(\frac{2s_3}{s_2} - \frac{3s_2}{4} \right) + \dots \right] \quad (1.15)$$

Следовательно, $\omega = 0$ при $v^2 / c_y = s_2^2 / 4s_1$. Аналогично из (1.13) имеем

$$b^2 v^3 / c_0 S = (s_2^3 / 4s_1) (1 + 3s_3 \omega / s_2 + \dots)$$

и ω обращается в нуль при

$$b^2 v^3 / c_0 S = s_2^3 / 4s_1 \quad (1.16)$$

Профиль продольного сечения крыла симметричный и выпуклый (оптимальное распределение объема — по обе стороны от вектора скорости) при

$$4s_1 v^2 / s_2^2 c_y > 1, \quad 4v^3 / c_0 s_2^3 > 1$$

Для того чтобы довести вычисление до конца, необходимо задать зависимость $l'(y')$; зададим ее в виде $l' = l_0' (1 - y')^r$; интегралы i_n можно вычислить в конечном виде при $r = \dots, {}^1/2, 2/3, 1, 2$, вычислим их для $r = 1$ и $r = {}^1/2$.

В случае $r = 1$

$$\omega' = \omega l'$$

$$f_1'(\omega') = \frac{f_1(\omega')}{l_0'^2} = \frac{(2/3)^3}{15\omega'^2} \left[1 + \frac{(1 + 3\omega')^{1/2} - 1}{7\omega'} - \frac{(1 + 3\omega')^{1/2} - 1}{3\omega'} \right]$$

$$f_2'(\omega') = \frac{f_2(\omega')}{l_0'} = \frac{(2/3)^3}{3\omega'} \left\{ \frac{2}{15\omega'} [(1 + 3\omega')^{1/2} - 1] - 1 \right\}$$

$$f_3'(\omega') = \frac{f_3(\omega')}{l_0'} = \frac{(2/3)^3}{5\omega'} \left[\frac{(1 + 3\omega')^{1/2} - 1}{9\omega'} + \frac{(1 + 3\omega')^{1/2} - 1}{63\omega'} - 1 \right]$$

В случае $r = {}^1/2$

$$f_1'(\omega') = \frac{(2/3)^3}{15\omega'^2} \left\{ 1 + \frac{4}{9\omega'^2} \left[\frac{(1 + 3\omega')^{1/2} - 1}{6} + \frac{(1 + 3\omega')^{1/2} - 1}{2} - \frac{(1 + 3\omega')^{1/2} - 1}{7/4} \right] \right\}$$

$$f_2'(\omega') = \frac{(2/3)^3}{3\omega'} \left\{ \frac{4}{9\omega'^2} \left[\frac{(1 + 3\omega')^{1/2} - 1}{7} - \frac{(1 + 3\omega')^{1/2} - 1}{5} \right] - 1 \right\}$$

$$f_3'(\omega') = \frac{(2/3)^3}{5\omega'} \left\{ \frac{4}{27\omega'^2} \left[\frac{(1 + 3\omega')^{1/2} - 1}{7/2} - \frac{(1 + 3\omega')^{1/2} - 1}{2} + \frac{(1 + 3\omega')^{1/2} - 1}{18} \right] - 1 \right\}$$

¹ Этот параметр является характеристическим для всех вариационных задач, в которых задан объем и «вредное» сопротивление [l^{-4}].

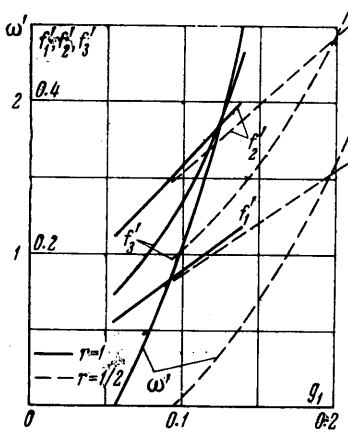
Предельные значения характеристических параметров равны

$$g_1 = \frac{v^2}{c_y l_0^3} = \begin{cases} 1/18 & (r = 1), \\ 3/32 & (r = 1/2), \end{cases} \quad g_2 = \frac{c_0 S l_0^{1/5}}{b^2 v^3} = \begin{cases} 54 & (r = 1) \\ 64/3 & (r = 1/2) \end{cases} \quad (1.17)$$

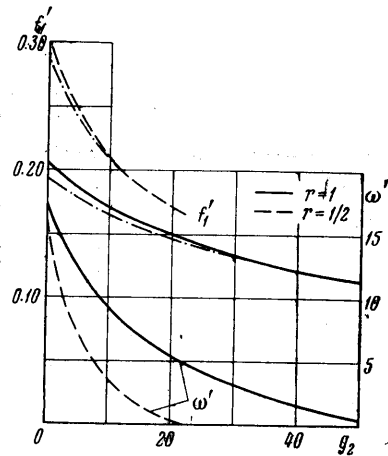
На фиг. 3 показана зависимость ω' , f_1' , f_2' , f_3' от характеристического параметра g_1 ; с увеличением этого параметра величина ω' неограниченно растет как квадрат этого параметра и при больших его значениях профиль крыла минимального сопротивления с заданным объемом [1, 2]

$$z' \sim 1 - (1 - \xi)^{3/2}$$

В случае крыла с большей площадью в плане ($r = 1/2$) при том же характеристическом параметре профиль менее выпуклый и превращается в клин при большем значении характеристического параметра. На фиг. 4 показана зависимость ω' , f_1' от



Фиг. 3



Фиг. 4

характеристического параметра g_2 ; интересно то отличие от предыдущего случая, что параметр ω' меняется в ограниченных пределах.

Таким образом, оптимальный профиль продольного сечения крыла при изменении характеристических параметров v^2/c_y от ∞ до $s_2^2/4s_1$ и $c_0 S/b^2 v^3$ от 0 до $4s_1/s_2^3$ остается выпуклым, при значениях характеристических параметров $s_2^2/4s_1$ и $4s_1/s_2^3$ оптимальный профиль обращается в клин с верхней стороной, направленной по потоку, и при дальнейшем изменении характеристических параметров оптимальной остается прямолинейная нижняя образующая, а верхняя, находящаяся в «тени», произвольна. Необходимо отметить, что в пределах допущений, принятых для тонкого крыла, смещение продольных сечений в плоскости yz без изменения их наклона на характеристики крыла не влияет, следовательно, форму поперечных сечений можно выбрать так, чтобы удовлетворить каким-либо другим требованиям, например, относительно распределения теплового потока по поперечному сечению.

2. Площадь, ширина, размах крыла. Рассмотрим некоторые общие зависимости характеристик крыла от угла атаки. В случае произвольного профиля продольного сечения

$$Y = 2q[i_{12} - i_{22} + 2\alpha(i_{11} + i_{21})]$$

$$X = 2q[c_0 S + i_{13} + i_{23} + 3\alpha(i_{12} - i_{22}) + 3\alpha^2(i_{11} + i_{21})]$$

$$(i_{nv} = \int_0^b \int_{x_0}^{x_1} \alpha_{nx}^v dx dy)$$

Если профиль симметричный, то

$$Y = 8qi_{11}\alpha, \quad X = 2q[c_0 S + 2(i_{13} + 3\alpha^2 i_{11})]$$

Зависимость качества от угла атаки можно представить в виде (фиг. 5, кривая 1)

$$k = \frac{K}{K_m} = \frac{2\alpha_0}{1 + \alpha_0^2}, \quad \alpha_0 = \frac{\alpha}{\alpha_m}$$

Здесь $K_m = 1/3\alpha_m$ — максимум качества, α_m — соответствующий угол атаки. В случае клиновидного профиля с относительной толщиной $2c$ имеем $i_{11} = cS$, $i_{13} = c^3S$, значит

$$Y = 8qSc\alpha, \quad X = 2qS[c_0 + 2c(c^2 + 3\alpha^2)], \quad \alpha_m = c\sqrt[4]{3(1 + c_0/2c^3)} \quad (2.1)$$

При $c_0/c^3 < 4$ оптимальное распределение объема — по обе стороны от вектора скорости, при $c_0/c^3 = 4$ верхняя сторона крыла направлена по потоку, т. е. весь объем расположен ниже вектора скорости¹. Если коэффициент вредного сопротивления задан, то оптимальная относительная толщина и соответствующее качество равны $c_m = (c_0/4)^{1/3}$, $K_{mm} = 2^{2/3}/3c_0^{1/3}$, при этом образующие верхней стороны направлены по потоку. Влияние относительной толщины на максимальное качество равно (фиг. 5, кривая 2)

$$k_m = \frac{K_m}{K_{mm}} = \left(\frac{3c^0}{2 + c^0} \right)^{1/2}, \quad c^0 = \frac{c}{c_m}$$

Если относительная толщина равна оптимальной, то сопротивление трения составляет $1/3$ суммарного [1, 4]. Зависимость максимального качества от характеристического параметра для клиновидного профиля следующая:

$$\frac{K_m v}{l_0'^2} = \begin{cases} (27 + g_2)^{-1/2} & (r = 1) \\ (12 + 9/8g_2)^{-1/2} & (r = 1/2) \end{cases} \quad (2.2)$$

Соответствующие кривые показаны пунктир-точкой на фиг. 4. Различия в качестве крыла с оптимальным и клиновидным профилем невелико². Таким образом, качество крыла с цилиндрическими поверхностями весьма близко к качеству крыла с оптимальным профилем продольного сечения. В работе [4] показано, что в случае пологого «гомтетического» тела оптимальной является коническая поверхность.

Если объем крыла не задан, то оптимальной поверхностью нижней стороны крыла является цилиндрическая с постоянным углом наклона образующей α , следовательно,

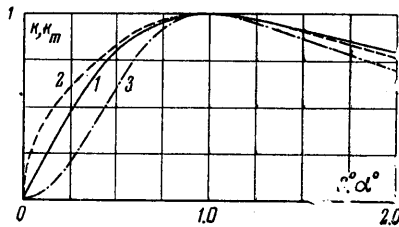
$$Y = 2qS\alpha^2, \quad X = 2qS(c_0 + \alpha^3), \quad K = \alpha^2/(c_0 + \alpha^3) \\ K_m = 2/3\alpha_m = \frac{2^{2/3}}{3c^{1/3}}, \quad \alpha_m = (2c_0)^{1/3}, \quad k = \frac{K}{K_m} = \frac{3\alpha^2}{1 + 2\alpha^3}$$

Зависимость $k = k(\alpha^0)$ показана на фиг. 5 (кривая 3).

Когда объем не задан, то распределение площади крыла по размаху на аэродинамическое качество не влияет, в случае же заданного объема ($c_0/c^3 < 4$) распределение площади сказывается через относительную толщину $c = v/s_2$, причем достаточно сильно не только при заданном l_0' , но также и при заданной площади крыла. Так, например, при значении параметра $g_2 = 0$ аэродинамическое качество кры-

¹ В [7] заранее принято, что верхняя сторона плоская и направлена по потоку.

² Из формул (2.2) очевидно, что параметр $V^{2/3}/S_p$, S_p — площадь омываемой поверхности, в общем случае не может быть характеристическим параметром, так как в него не входит c_0 , и степень, в которую входит относительная толщина, различна для тел различной формы.

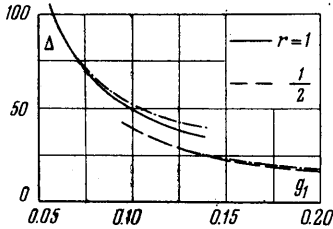


Фиг. 5

ла с формой в плане, характеризуемой показателем $r = 1/2$ на 17% ниже, чем качество треугольного крыла ($r = 1$).

Так как и в случае оптимального профиля продольного сечения в варьируемые функционалы (1.10; 1.14) входит только величина хорды крыла $l(y)$, то вариационная задача относительно $l(y)$ не имеет вообще решения или же имеет тривиальное решение $l(y) = l_0$; таким образом для определения ее нужны дополнительные соображения, которые будут приведены в следующих разделах.

Из изложенного очевидно, что для выбора оптимальных размеров крыла вполне допустимо рассматривать крыло, образованное цилиндрическими поверхностями, т. е. пользоваться формулами (2.1). Если заданы подъемная сила и объем крыла, то его сопротивление



Фиг. 6

$$\frac{X}{2qb^2} = \left[c_0 + 2 \left(\frac{v}{s_2} \right)^3 \right] s_1 + \frac{3}{8} \frac{c_y^2}{v} \frac{s_2}{s_1} \quad (2.3)$$

Зависимость величины, пропорциональной волновому сопротивлению,

$$\Delta = (X/2qb^2 - c_0 S/b^2) l_0'^5 v^{-3}$$

от параметра g_1 показана на фиг. 6 пунктирной вместе с соответствующими кривыми для крыла с оптимальным профилем, отличие здесь несколько больше, чем на фиг. 5 для качества. Из формулы (2.3) следует, что при заданных Y , V могут существовать оптимальные полуразмах b , распределение площади по размаху.

Если имеет смысл задача об оптимальной длине крыла, то для решения ее необходимо учитывать зависимость коэффициента трения от длины.

3. Форма передней кромки крыла. При малых углах атаки крыла тепловой поток достигает максимальной величины на передней кромке, следовательно, форма ее должна быть выбрана так, чтобы температура не превышала допустимой, либо, если это невозможно, заданная температура должна быть обеспечена системой охлаждения. В первом случае возможности материала будут полностью использованы для снижения волнового сопротивления кромки в том случае, когда температура по всей длине кромки будет максимально допустимой из условий прочности. Ограничимся рассмотрением этого случая, причем будем рассматривать сопротивление кромки независимо от остальной части крыла, что допустимо в случае, когда объем не задан, или же заданный объем может быть обеспечен за счет донной области. Предположим, что в сечении, нормальном к дуге $\sigma(\varphi)$ (фиг. 2), образующем переднюю кромку, кромка имеет форму полуокружности, тогда поверхность ее можно задать в параметрическом виде

$$x = x_0(\varphi) - r(\varphi) \cos \theta \cos \varphi, \quad y = y_0(\varphi) + r(\varphi) \cos \theta \sin \varphi, \quad z = r(\varphi) \sin \theta \quad (3.1)$$

Косинус угла между вектором скорости и нормалью к поверхности

$$\cos(n, V) = \frac{[r' \sin \varphi + \cos \theta \cos \varphi (\sigma' + r \cos \theta)] \cos \alpha - \sin \theta (\sigma' + r \cos \theta) \sin \alpha}{\sqrt{r'^2 + (\sigma' + r \cos \theta)^2}}$$

В случае угла атаки $\alpha = 0$ сопротивление кромки равно

$$X_0 = 2q \int_0^{\varphi_1} \int_{-1/2\pi}^{1/2\pi} \frac{r[r' \sin \varphi + \cos \theta \cos \varphi (\sigma' + r \cos \theta)]^3}{r'^2 + (\sigma' + r \cos \theta)^2} d\varphi d\theta \quad (3.2)$$

Условие постоянства максимальной температуры на кромке приближенно можно записать в виде

$$\cos \varphi \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{\sigma'} \right) \right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{R}}, \quad r = \frac{R\sigma' \cos^2 \varphi}{2\sigma' - R \cos^2 \varphi} \quad (3.3)$$

Здесь R — допустимый из условия прочности материала радиус средней кривизны поверхности. Очевидно, что решение вариационной задачи на основе формулы (3.2) затрудняется сложностью интегрирования по θ в общем случае.

Сделаем предположение, что $r' \ll \sigma'$ и этой величиной можно пренебречь, тогда

$$X_0 = \frac{8qR}{3} \int_0^{\varphi_1} \frac{\sigma'^2 \cos^5 \varphi}{2\sigma' - R \cos^2 \varphi} \left(1 + \frac{9\pi}{32} \frac{R \cos^2 \varphi}{2\sigma' - R \cos^2 \varphi} \right) d\varphi$$

Можно показать, что вторая производная от подынтегрального выражения по σ' будет больше нуля, следовательно, условие Лежандра выполняется.

Экстремаль может включать в себя участок прямой L , если при этом точка φ_1 не является угловой, то полное сопротивление кромки будет

$$X_0 = \frac{8qR}{3} \left\{ \int_0^{\varphi_1} \frac{\sigma'^2 \cos^5 \varphi}{2\sigma' - R \cos^2 \varphi} \left(1 + \frac{9\pi}{32} \frac{R \cos^2 \varphi}{2\sigma' - R \cos^2 \varphi} \right) d\varphi + \frac{L \cos^5 \varphi_1}{2} \right\} \quad (3.4)$$

Ширина и длина крыла

$$b = \int_0^{\varphi_1} \sigma' \cos \varphi d\varphi + L \cos \varphi_1, \quad l_0 = \int_0^{\varphi_1} \sigma' \sin \varphi d\varphi + L \sin \varphi_1$$

Возможна постановка различных изопериметрических вариационных задач, уравнения Эйлера этих задач различаются свободным членом $P(\varphi, \varphi_1)$

$$\frac{\sigma'(\sigma' - R \cos^2 \varphi)}{(2\sigma' - R \cos^2 \varphi)^2} - \frac{9\pi}{32} \frac{R^2 \sigma' \cos^4 \varphi}{(2\sigma' - R \cos^2 \varphi)^3} - P = 0 \quad (3.5)$$

Если связей нет и граничное условие в точке φ_1 естественное, то уравнение Эйлера имеет решение

$$\sigma' = \sqrt[3]{4R \cos^2 \varphi (1 + \sqrt[3]{9 + 4\pi})} = 1.46 R \cos^2 \varphi$$

В общем случае уравнение (3.5) кубическое и решение его зависит от знака дискриминанта

$$D = -\frac{27R^6 \cos^{12} \varphi}{16(1 - 4P)^3} \left[\left(\frac{9\pi}{32} \right)^2 (1 - 4P) - \left(\frac{1}{3} + \frac{3\pi}{16} \right)^3 \right]$$

если $D < 0$, то имеется один вещественный корень

$$\sigma' = \frac{R \cos^2 \varphi}{2} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{9/4\pi}{1 - 4P} \right)^{1/3} \left[\left(1 + \left(1 - \frac{(\pi + 16/9)^3}{12\pi^2(1 - 4P)} \right)^{1/2} \right)^{1/3} + \left(1 - \left(1 - \frac{(\pi + 16/9)^3}{12\pi^2(1 - 4P)} \right)^{1/2} \right)^{1/3} \right] \right\}$$

если же $D > 0$, то все три корня вещественны

$$\sigma' = \frac{R \cos^2 \varphi}{2} \left(1 + \left(\frac{4/3 + 3/4\pi}{1 - 4P} \right)^{1/2} \cos \varphi \right), \quad \cos 3\varphi = \frac{9\pi \sqrt{1 - 4P}}{4(4/3 + 3/4\pi)^{3/2}}$$

С учетом условия непрерывности кривизны в точке φ_1 для функции P имеем: экстремаль не содержит прямолинейного участка, задана ширина и длина крыла (λ, μ — неопределенные множители)

$$P = -2(\lambda \cos \varphi + \mu \sin \varphi) / \cos^5 \varphi$$

экстремаль содержит прямолинейный участок; заданы либо длина, либо ширина, тогда соответственно

$$P = \frac{\cos^4 \varphi_1}{4 \cos^4 \varphi}, \quad P = \frac{\sin \varphi \cos^5 \varphi_1}{4 \sin \varphi_1 \cos^5 \varphi}$$

Анализ полученных решений показывает, что в общем случае результаты противоречат принятому предположению $r' \ll \sigma'$, за исключением окрестности критической точки, и можно сделать только заключение, что в критической точке оптимальный радиус кривизны $\sigma'_0 \approx (1 \div 2.5) R$ и, далее он убывает и только вблизи точки φ_1 , если экстремаль переходит в прямую, возрастает до бесконечности. Ширина криволинейного участка кромки получается порядка R . Для решения вопроса об оптимальной передней кромке приходится прибегнуть к методам прямого варьирования.

Рассмотрим в качестве примера схематизированную переднюю кромку, состоящую из тора с радиусом R_0 и $r_0 = RR_0 / (2R_0 - R)$ и прямолинейного участка с радиусом $r_1 = 1/2 R \cos^2 \varphi_1$. Ширина, длина и площадь крыла равны

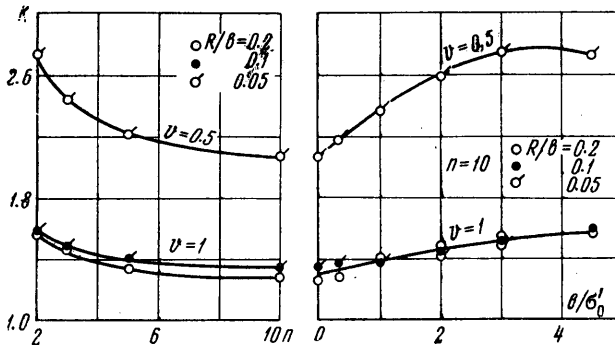
$$b_0 = R_0 \sin \varphi_1 + L \cos \varphi_1, \quad l_0 = R_0(1 - \cos \varphi_1) + L \sin \varphi_1 \\ S = 1/2 R_0^2 (\varphi_1 - \sin \varphi_1 \cos \varphi_1) + L(R_0 \sin \varphi_1 + 1/2 L \cos \varphi_1) \sin \varphi_1$$

Для сопротивления кромки получим

$$X_0 = \frac{8qR}{3} \left[\frac{R_0^2}{2R_0 - R} \left(1 + \left(\frac{9\pi}{32} - 1 \right) \frac{R}{2R_0 - R} \right) \left(\sin \varphi_1 - \frac{\sin^3 \varphi_1}{3} \right) + \frac{L \cos^5 \varphi_1}{2} \right]$$

Если заданы площадь и длина крыла, то

$$R_0 = \frac{l_0}{2} \left\{ \frac{\operatorname{tg}^{1/2} \varphi_1}{\operatorname{tg}^{1/2} \varphi_1 - 1/2 \varphi_1} - \left(\left(\frac{\operatorname{tg}^{1/2} \varphi_1}{\operatorname{tg}^{1/2} \varphi_1 - 1/2 \varphi_1} \right)^2 + \frac{2 \operatorname{ctg} \varphi_1 - 4S/l_0^2}{\operatorname{tg}^{1/2} \varphi_1 - 1/2 \varphi_1} \right)^{1/2} \right\}$$



Фиг. 7

если же заданы площадь и ширина крыла, то

$$\frac{R_0}{b} = \left(\frac{\operatorname{tg} \varphi_1 - 2S/b^2}{\operatorname{tg} \varphi_1 - \varphi_1} \right)^{1/2}$$

При ширине $b/R \approx 1.2$ оптимальной является прямолинейная кромка ($\varphi_1 = 0$), но при больших b/R минимум сопротивления достигается при $\varphi_1 \approx 80^\circ$, $R_0/R \approx 1$. Величина $R_0/R \approx 1$ является оптимальной также и при заданной площади и ширине или длине крыла, оптимальный угол φ_1 в этом случае

меняется. Оптимальная величина R_0/R растет с ростом заданных b и $2S/l^2$.

Если передняя кромка тонкая и можно считать не только $r' \ll \sigma'$, но также и $r \ll \sigma'$, то для сопротивления ее при угле атаки α имеем [5]

$$X_0 = 2qR \int_0^{\varphi_1} \left[2/3 (1 - \cos^2 \alpha \sin^2 \varphi)^{3/2} + \cos \alpha \cos \varphi (1 - \cos^2 \alpha \sin^2 \varphi) - \right. \\ \left. - 1/3 \cos^3 \alpha \cos^3 \varphi \right] \frac{\sigma'^2 \cos^2 \varphi d\varphi}{2\sigma' - R \cos^2 \varphi} \quad (3.6)$$

Из (3.4) и (3.6) очевидно, что экстремальная задача на минимум температуры (величины $1/R$) при заданном сопротивлении эквивалентна задаче на минимум сопротивления при заданной температуре.

4. Форма крыла заданного объема. Очевидно, что в том случае, когда объем крыла задан и для обеспечения его нельзя использовать донную область (задняя кромка прямая) для определения формы крыла следует искать минимум суммарного сопротивления передней кромки и остальной части крыла. Задачу эту приходится решать методом прямого варьирования. Пусть нижняя и верхняя поверхности крыла — цилиндрические с углами наклона образующих к вектору скорости α и β , соответственно; обозначая $\xi = 1/2(\alpha + \beta)$, $\eta = 1/2(\alpha - \beta)$ и считая кромку тонкой, для полного

сопротивления, подъемной силы и объема крыла, имеем следующие формулы:

$$c_x = \frac{X}{2qb^2} = [2\xi(\xi^2 + 3\eta^2) + c_F] s_1 + \frac{4J_1 R}{3b} \quad (4.1)$$

$$c_y = \frac{Y}{2qb^2} = 4\xi\eta s_1, \quad v = \frac{V}{b^3} = \frac{2l_0' J_2 R}{b} + \xi s_2 \quad (4.2)$$

$$J_1 = \int_0^1 \frac{r}{R} \cos^2 \varphi dy', \quad J_2 = \int_0^1 \frac{r}{R} l' dy'$$

Максимальное аэродинамическое качество $K_m = 1/3 \eta_m$ будет при угле атаки

$$\eta_m = \left(\frac{\xi^2}{3} + \frac{c_F}{6\xi} + \frac{2J_1 R}{9\xi s_1 b} \right)^{1/2} \quad (4.3)$$

Объем следует считать заданным, если

$$v \geq s_2 \left(\frac{1}{4} c_F + \frac{J_1 R}{3s_1 b} \right)^{1/3} + \frac{2l_0' J_2 R}{b} \quad (4.4)$$

Рассмотрим два семейства крыльев, форма в плане которых задана:

$$(1) \quad x_0 = l_0' y'^n, \quad s_1 = \frac{nl_0'}{n+1}, \quad s_2 = \frac{2n^2 l_0'^2}{(n+1)(2n+1)}, \quad n \geq 2$$

радиус кривизны контура в критической точке

$$\sigma_0' = b/2l_0' \quad \text{при } n=2, \quad \sigma_0' = \infty \quad \text{при } n>2$$

$$(2) \quad x_0 = l_0' y'^n + \frac{b(y'^2 - y'^n)}{2\sigma_0'/b}, \quad s_1 = \left[\frac{n}{n+1} - \frac{n-2}{6\sigma_0' l_0' (n+1)/b} \right] l_0'$$

$$s_2 = \left[\frac{2n^2}{(n+1)(2n+1)} - \frac{2n(n^2-4)}{3(2n+1)(n+1)(n+3)} \frac{b}{l_0' \sigma_0'} + \frac{2(n-2)^2 b^2}{5(2n+1)(n+3)(2\sigma_0' l_0')^2} \right] l_0'^2$$

В обоих случаях считаем заданной ширину крыла и его площадь. Результаты расчетов для $s_1 = 1.5$, $c_F = 0.001$ приведены на фиг. 7; при заданных условиях уменьшение l_0' как за счет увеличения n в случае (1), так и за счет увеличения σ_0' в случае (2) приводит к уменьшению аэродинамического качества. При больших относительных объемах v уменьшение допустимой температуры кромки (увеличение R) не приводит к большому снижению аэродинамического качества.

Оценка максимально возможных величин аэродинамического качества с помощью закона Ньютона, полученная в настоящей работе, весьма близка к полученной для заостренных тел, построенных при помощи поверхностей тока плоских течений [6]. Это дает возможность проверки расчетов по закону Ньютона тем более, что оптимальные формы близки к пирамидальным.

Поступило 24 X 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Аэродинамические характеристики неосесимметричных тел при сверхзвуковых скоростях. Труды ЦАГИ, № 841.
2. Miele A. Theory of optimum aerodynamic shapes. Acad. Press, N. Y., 1965.
3. Майкапар Г. И. Крыло с максимальным аэродинамическим качеством при гиперзвуковых скоростях. ПММ, 1966, т. 30, вып. 1.
4. Miele A. Lift to drag ratios of slender bodies at hypersonic speeds. J. astron. sci., 1966, vol. 13, № 1.
5. Келдыш В. В. Сопротивление стреловидной затупленной кромки крыла при гиперзвуковых скоростях. Изв. АН СССР, Механика и машиностроение, 1964, № 5.
6. Küchemann D. Hypersonic aircraft and their aerodynamic problems. Progress in aerod. sci., Oxf., Pergamon Press, 1965, vol. 6.
7. Miele A., Hull D. G. Three-dimensional lifting wings of minimum drag in hypersonic flow. Aero-Astronautics Report N 26, 1966, Rice University.