

МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКОЕ ТЕЧЕНИЕ В ОКРЕСТНОСТИ КРИТИЧЕСКОЙ ТОЧКИ В ЧИСТО АЗИМУТАЛЬНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Б. И. РЕЗНИКОВ, Ю. Н. СМЫСЛОВ

(Ленинград)

Исследуется осесимметричное магнитогидродинамическое течение в окрестности критической точки в присутствии чисто азимутального неоднородного магнитного поля $B\{0, B_\theta, 0\}$. Эта проблема относится к классу задач магнитной гидродинамики, решения которых известны под названием решений «типа слоя» [1]. Этот класс включает также, в частности, классические точные решения уравнений Навье-Стокса.

В работах [2-3] рассматривались приближенные решения аналогичных магнитогидродинамических задач для предельных случаев, больших и малых значений диффузионного числа $\varepsilon = \nu/\eta$. При этом оказывается возможным разбить течение на так называемые вязкий и токовый слои, для каждого из которых приближенные уравнения, более простые, чем исходные, решаются численно или в квадратурах. Вследствие указанного приема удается избежать основной математической трудности, заключающейся в том, что искомое решение краевой задачи должно выбираться из семейства двухпараметрических решений. Приближенный метод позволяет разбить задачу на две стадии (соответствующие двум пограничным слоям), на каждой из которых определяется по одному неизвестному параметру (вместо одновременного их определения при непосредственном интегрировании исходных уравнений).

Недостаток приближенных методов [2-3] заключается в неприменимости их в наиболее интересном случае, когда толщины токового и вязкого слоев сравнимы по величине, т. е. когда кинематическая и магнитная вязкости (ν и η) — величины одного порядка. Следует обратить также внимание на малую точность методов в рамках рассматриваемых приближений при сравнительно большом объеме необходимых расчетов, что, в свою очередь, препятствует получению более точных решений.

В настоящей работе проводилось численное интегрирование уравнений, описывающих магнитогидродинамическое течение в области критической точки, в широком диапазоне чисел S и ε (число Альфвена и диффузионное число) без предположения об их малости с предварительным определением неизвестных в нуле производных искомых функций при помощи метода асимптотического интегрирования.

Обнаружено существование критического значения числа Альфвена, при котором торможение жидкости магнитным полем (при первой рассматриваемой конфигурации магнитного поля) у стенки столь интенсивно, что трение всюду на поверхности твердого тела обращается в нуль. Установлено также, что при дальнейшем увеличении числа S вблизи стенки появляется область обратных течений, отделенная от остального потока плоскостью, на которой z -компонента скорости равна нулю.

Уравнения магнитной гидродинамики, записанные в проекциях на оси цилиндрической системы координат r, θ, z , для осесимметричного течения проводящей жидкости в чисто азимутальном магнитном поле имеют вид

$$v_r \frac{\partial B_\theta}{\partial r} + v_z \frac{\partial B_\theta}{\partial z} = \frac{B_\theta v_r}{r} + \eta \left(\frac{\partial^2 B_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial B_\theta}{\partial r} + \frac{B_\theta}{r^2} + \frac{\partial^2 B_\theta}{\partial z^2} \right) \quad (1)$$

$$v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} - \frac{v_r}{r^2} \right) - \frac{1}{4\pi\mu\rho} \left(B_\theta \frac{\partial B_\theta}{\partial r} + \frac{B_\theta^2}{r} \right) \quad \left(\eta = \frac{1}{4\pi\mu\sigma} \right) \quad (2)$$

$$v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) - \frac{B_\theta}{4\pi\mu\rho} \frac{\partial B_\theta}{\partial z} \quad (3)$$

Здесь v_r , v_θ и v_z — проекции скорости, ν — коэффициент кинематической вязкости, η — коэффициент магнитной вязкости (коэффициент диффузии магнитного поля).

Уравнения (1) — (3) написаны в предположении существования осевой симметрии $v_\theta = 0$, $\partial/\partial\theta = 0$. В этом случае, с учетом $B_r = B_z = 0$, проекции уравнения магнитной диффузии на оси r и z и проекция уравнения движения на ось θ обращаются в тождества. Будем искать функцию тока ψ , ненулевую составляющую магнитной индукции B_θ и общее магнитное давление Π в виде [2]

$$\begin{aligned} \psi &= U r^2 \sqrt{K/U} f(\zeta), & B_\theta &= B^0 h r(\zeta) & (\zeta &= 2\sqrt{U/K} z) \\ \Pi &= p + B_\theta^2/8\pi\mu = p_0 - 1/2 \rho U^2 r^2 p_1(\zeta) - 2\rho U K p_2(\zeta) \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь ζ — новая независимая переменная, а U , B^0 , K и p_0 — размерные константы. В этом случае для $f(\zeta)$ и $h(\zeta)$ из уравнений (1) — (3) получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\nu}{K} f''' + 2ff'' - f'^2 + 1 &= S(h^2 - \gamma^2), & \frac{\eta}{K} h'' + 2fh' &= 0' \\ \left(S = \frac{B^0{}^2}{4\pi\mu\rho U^2} \right) \end{aligned} \quad (5)$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} f(0) = f'(0) = 0, & f'(\zeta) \rightarrow 1 \text{ при } \zeta \rightarrow \infty \\ h(0) = \tau, & h(\zeta) \rightarrow \gamma \text{ при } \zeta \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь S — число Альфвена, τ и γ — постоянные. Условия (6) получены из соответствующих условий для составляющих скорости и магнитной индукции, физический смысл которых подробно обсуждался в работах [2, 3].

Если известно решение системы (5), то функции давления p_1 и p_2 определяются выражениями

$$p_1 = 1 + S\gamma^2, \quad p_2' = \left(\frac{\nu}{K} f' + f^2 \right)' \quad (7)$$

Краевая задача (5), (6) может быть сведена к задаче Коши, если определить значения производных функций f'' и h' при $\zeta = 0$. После этого при необходимости распределение функций f , h и p во всей области течения легко получить известными численными методами.

Идея метода асимптотического интегрирования, при помощи которого в настоящей работе определялись значения безразмерного трения $f''(0)$ и производной магнитной индукции $h'(0)$, впервые была сформулирована Мексиним [6, 7]. Однако в цитируемых работах метод применялся к некоторым частным задачам пограничного слоя в несжимаемой жидкости и был недостаточно разработан в смысле техники его применения. Впоследствии в работе [8] было дано обобщение метода Мексина на случай произвольных уравнений типа пограничного слоя и граничных условий, а также был указан алгоритм n -го приближения метода.

Суть метода заключается в следующем. Рассмотрим краевую задачу

$$\frac{d^2 q_i}{d\zeta^2} + \delta_i f(\zeta) \frac{dq_i}{d\zeta} = P_i(q_i) \quad (i=1,2), \quad q_i(0) = q_{i0}, \quad q_i(\infty) = q_{i\infty} \quad (8)$$

Будем предполагать, что функция $f(\zeta)$ положительна и неограниченно возрастает при $\zeta \rightarrow \infty$. Функция P_i , стоящая в правой части уравнения (8), не зависит от $dq_i/d\zeta$ и $P_i \sim o(\exp(-\zeta^2))$ при $\zeta \rightarrow \infty$.

Интегрируя уравнение (8) как линейное неоднородное уравнение относительно $dq_i / d\zeta$, получим

$$q_i - q_{i0} = \left(\frac{dq_i}{d\zeta} \right)_0 \int_0^{\zeta} e^{-\delta_i F} \Phi_i d\zeta$$

$$F = \int_0^{\zeta} f d\zeta, \quad \Phi_i = 1 + \left(\frac{dq_i}{d\zeta} \right)_0^{-1} \int_0^{\zeta} e^{\delta_i F} P_i d\zeta \quad (9)$$

Удовлетворяя второму краевому условию, имеем для определения $(dq_i / d\zeta)_0$ следующее уравнение:

$$\left(\frac{dq_i}{d\zeta} \right)_0 = \frac{q_{i\infty} - q_{i0}}{\omega_i(\infty)}, \quad \omega_i(\infty) = \int_0^{\infty} e^{-\delta_i F} \Phi_i d\zeta \quad (10)$$

Отметим, что краевая задача (8) будет представлять собой символическую запись системы (5) и, так как при интегрировании уравнений (5) значение произвольной постоянной K полагается равным v , имеем

$$q_1 = df / d\zeta, \quad \delta_1 = 2, \quad P_1 = S(h^2 - \gamma^2) + f'^2 - 1, \quad q_{10} = 0, \quad q_{1\infty} = 1,$$

$$q_2 = h, \quad \delta_2 = 2\varepsilon, \quad P_2 = 0, \quad q_{20} = \tau, \quad q_{2\infty} = \gamma \quad (11)$$

Отсюда следует, что уравнения для отыскания значений $f''(0)$ и $h'(0)$ имеют вид

$$f''(0) = \omega_1^{-1}(\infty), \quad h'(0) = (\gamma - \tau) \omega_2^{-1}(\infty) \quad (12)$$

Таким образом, задача определения величины безразмерного трения и производной магнитной индукции в нуле свелась к вычислению интеграла типа Лапласа $\omega_i(\infty)$. Учитывая, что в окрестности точки $\zeta = 0$ подынтегральная функция имеет максимум, равный единице, а при $\zeta \rightarrow \infty$ быстро убывает, стремясь к нулю, вычисление интегралов $\omega_i(\infty)$ выполняется методом перевала [9]. При этом для $\omega_i(\infty)$ получаем

$$\omega_i(\infty) = \frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} d_n \Gamma(1/3(n+1)) (a_0 \delta_i)^{-1/3(n+1)}, \quad a_0 = \frac{f''(0)}{6} \quad (13)$$

где $\Gamma(1/3(n+1))$ — гамма-функция, а коэффициенты разложения d_n определяются по формуле

$$d_n = \frac{1}{2\pi i} \oint \Phi_i(F^0)^{-1/3(n+1)} d\zeta = \frac{1}{n!} \lim_{\zeta \rightarrow 0} \frac{d^n}{d\zeta^n} (\Phi_i \zeta^{n+1} (F^0)^{-1/3(n+1)}) \quad (14)$$

$$F^0 = \zeta^3 \sum_{n=0}^{\infty} \bar{a}_n \zeta^n, \quad \bar{a}_n = \frac{f_{\zeta}^{(n+2)}(0)}{(n+3)! a_0} \quad (15)$$

Выражение, стоящее в правой части формулы (14), может быть вычислено в общем виде, при этом для определения коэффициентов d_n имеем

$$d_n = \sum_{k=0}^n r_k A_{n-k}^{-1/3(n+1)} (a_k), \quad r_k = \sum_{p=0}^k l_p \Phi_{k-p}$$

$$\Phi_k = \frac{\Phi_{\zeta}^{(k)}(0)}{k!}, \quad l_p = \frac{[\delta_i f(0)]^p}{p!} \quad (16)$$

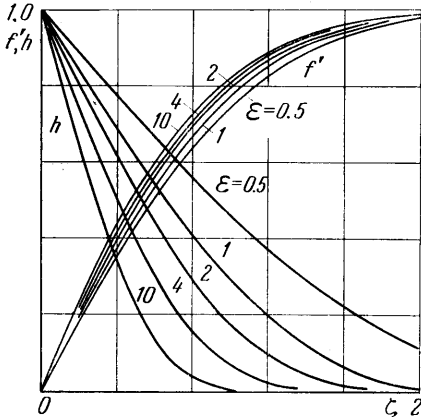
Функции $A_m^{(r)}$ (a_1, a_2, \dots, a_m) находятся из следующих рекуррентных соотношений:

$$A_0^{(r)} = 1, \quad A_1^{(r)} = ra_1, \quad A_m^{(r)} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m [k(r+1) - m] a_k A_{m-k}^{(r)} \quad (17)$$

Формулы (14)–(17) устанавливают общую связь между величиной d_n и коэффициентами $a_n[f''(0), h'(0)]$ и $\Phi_\varepsilon^{(n)}[f''(0), h'(0)]$, зависящими от вида исходных уравнений и граничных условий. Применение соотношений (16), (17) для расчета d_n позволяет обойтись без явного представления d_n через $f''(0)$ и $h'(0)$ (что с технической стороны весьма затруднительно уже для $n > 4$) и использовать метод асимптотического интегрирования в n -м приближении. Впервые такой подход был применен в работе [8].

Разрешая систему связанных алгебраических уравнений (12), находим искомые параметры $f''(0)$ и $h'(0)$.

Вычисления, связанные с асимптотическим интегрированием, а также с получением точных численных решений системы (5), производились на ЭВМ БЭСМ-2 ЛОЦЭМИ АН СССР. Ниже обсуждаются результаты расчетов, соответствующие граничным условиям $\tau = 1, \gamma = 0$. Для каждого значения магнитного параметра (0, 0.1, 0.5, 1, 2) получены асимптотические решения и точные численные решения в широком диапазоне диффузионных чисел ε (0.1, 0.5, 1, 2, 3, 4, 5, 10). Часть результатов представлена в таблице, где дается сравнение значений $f''(0)$ и $h'(0)$, полученных асимптотическим интегрированием, с соответствующими точными значениями. Таблица



Фиг. 1

лица показывает, что в рассматриваемой области параметров асимптотическое интегрирование дает почти всюду значения производных $f''(0)$ и $h'(0)$, практически совпадающие с их точными значениями.

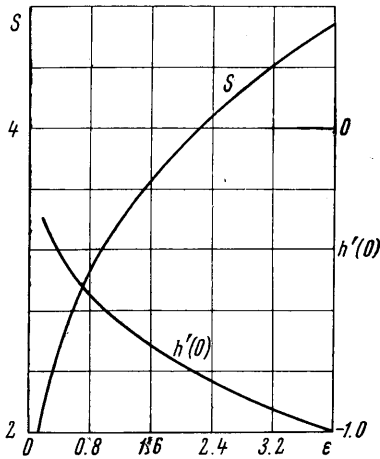
ε		$S = 0$		$S = 0.1$		$S = 0.5$		$S = 1.0$	
		точное	асимп.	точное	асимп.	точное	асимп.	точное	асимп.
0.5	f''	1.3119	1.3119	1.2726	1.2725	1.1114	1.1112	0.9003	0.8955
	h'	-0.5839	-0.5827	-0.5812	-0.5800	-0.5694	-0.5686	-0.5532	-0.5743
1	f''	1.3119	1.3119	1.2787	1.2787	1.1434	1.1426	0.9676	0.9738
	h'	-0.7622	-0.7621	-0.7591	-0.7590	-0.7460	-0.7457	-0.7281	-0.7455
2	f''	1.3119	1.3119	1.2843	1.2838	1.1719	1.1710	1.0270	1.0266
	h'	-0.9862	-0.9862	-0.9828	-0.9826	-0.9685	-0.9682	-0.9494	-0.9536
5	f''	1.3119	1.3119	1.2905	1.2872	1.2040	1.1928	1.0931	1.0851
	h'	-1.3722	-1.3722	-1.3684	-1.3670	-1.3530	-1.3481	-1.3324	-1.3303
10	f''	1.3119	1.3119	1.2945	1.3052	1.2240	1.1964	1.1342	1.1627
	h'	-1.7520	-1.7520	-1.7480	-1.7539	-1.7320	-1.7171	-1.7111	-1.7270

На фиг. 1 приведены примеры графиков функций скорости и магнитной индукции для различных значений ε при фиксированном магнитном параметре $S = 1$. Сравнивая графики функций скорости и индукции для одного и того же значения, легко проследить изменение соотношения толщин вязкого и токового слоев в зависимости от величины диффузионного числа. Так, например, для $\varepsilon = 10$ толщина вязкого слоя более чем в два раза превышает толщину токового слоя. Для $\varepsilon = 0.5$, напротив, вязкий слой тоньше токового и лежит на дне его. Полученная картина оправдывает приближенную постановку задачи для предельных случаев малых и больших ε , принятую в работах [2–4].

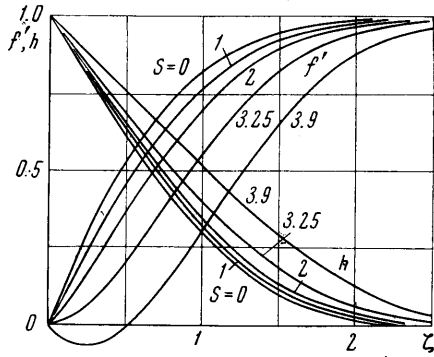
Заметим, что характер влияния числа ϵ на оба слоя одинаков, а именно, с ростом диффузионного числа уменьшается толщина как вязкого, так и токового слоев. Однако, поскольку влияние числа ϵ на функцию магнитной индукции h сильнее, чем на функцию скорости f' , толщина токового слоя для данного диапазона изменения ϵ варьирует в гораздо более широких пределах, тем самым, определяя соотношение между толщинами слоев.

Фиг. 2 относится к случаю достаточно сильных полей, таких, что жидкость около стенки значительно подтормаживается магнитным полем, и безразмерное трение $f''(0)$ всюду на плоскости $z = 0$ обращается в нуль. На фигуре приводятся графики зависимости магнитного параметра S и производной функции магнитной индукции в нуле от диффузионного числа при условии $f''(0) = 0$.

Наиболее интересный эффект обнаруживается при дальнейшем увеличении маг-



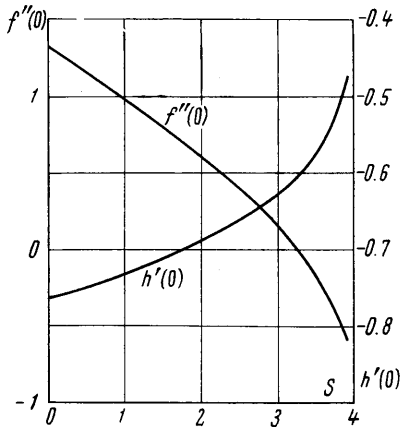
Фиг. 2



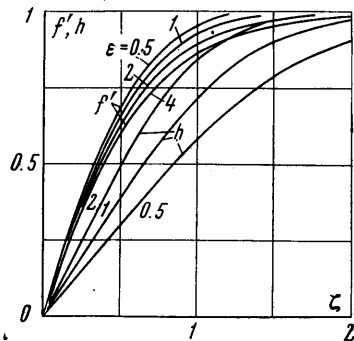
Фиг. 3

нитного параметра. Производная $f''(0)$ становится отрицательной, в пристеночном слое радиальные и z -компоненты скорости меняют направления на противоположные, т. е. у стенки появляется область обратных токов жидкости, толщина которой растет с ростом числа S .

На фиг. 3 приведены графики функции магнитной индукции h и функции f' , пропорциональной радиальной составляющей скорости v_r , для различных значений параметра S ($\epsilon = 1$). Кривая $S = 3.25$ соответствует рассмотренному ранее случаю нулевого трения ($f''(0) = 0$).



Фиг. 4



Фиг. 5

На графике скорости $S = 3.9$ имеется область отрицательных значений f' , толщина которой составляет уже значительную часть толщины вязкого слоя. При этом область отрицательных значений v_z еще больше (толщина ее по безразмерной координате ζ составляет 0.8).

Исследования показали, что, увеличивая число S , нельзя добиться большого увеличения области обратных токов жидкости. Оказывается, что значение магнитного параметра $S = 3.9005$ — предельное для $\varepsilon = 1$, и при больших значениях S решения рассматриваемой задачи не существует.

На фиг. 4 показана зависимость трения $f''(0)$ и производной $h'(0)$ от параметра S для только что рассмотренного случая $\varepsilon = 1$.

В данной работе исследовалось также течение проводящей жидкости в области критической точки в чисто азимутальном магнитном поле с другими граничными условиями $h(0) = 0$, $h(\infty) = 1$, что соответствует случаю источников магнитного поля, удаленных в бесконечность.

На фиг. 5 приведены функции f' и h для этой конфигурации поля при $S = 1$ и различных значениях ε .

Отметим, что, в отличие от предыдущего случая, влияние числа ε на толщины токового и вязкого слоев здесь различно: с увеличением ε толщина токового слоя уменьшается, а вязкого увеличивается. Это обстоятельство легко может быть объяснено физически. Уменьшение диффузионного числа, например при постоянной величине кинематической вязкости, соответствует увеличению магнитной вязкости η , т. е. утолщению токового слоя независимо от граничных условий для h . Вследствие различной конфигурации магнитного поля в рассматриваемых случаях (фиг. 1 и 5) это утолщение токового слоя будет оказывать различное действие.

В случае $h(0) = 1$ (фиг. 1) утолщение токового слоя приводит к тому, что большее по величине магнитное поле действует на проводящую жидкость при уменьшении числа ε на большей толщине. При этом тормозящее действие поля более эффективно и вязкий слой также утолщается.

В случае $h(0) = 0$, наоборот, утолщение токового слоя при уменьшении ε приводит к тому, что вблизи стенки маленькое поле действует на жидкость на большем протяжении, вследствие чего подтормаживающее действие поля ослабляется и вязкий слой становится тоньше.

Очевидно, что во втором случае, где влияние ε на толщины токового и вязкого слоев противоположно, соотношение между этими толщинами должно быть более чувствительным к изменению диффузионного числа, чем в первом случае.

Поступило 27 VIII 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Lin C. C. Note on a class of exact solutions in magnetohydrodynamics. Arch. Rat. Mech. Anal., 1958, vol. 1, No. 5, p. 391—395.
2. Axford W. J. Axisymmetric stagnation — point flow in magnetohydrodynamics. Appl. Sci. Res., 1961, sec. B, vol. 9, No. 3, p. 213—229.
3. Gribben R. J. Magnetohydrodynamic stagnation — point flow. Quart. J. Mech. Appl. Math., 1965, vol. 18, pt. 3, p. 357—384.
4. Gribben R. J. Numerical solution of magnetohydrodynamic stagnation — point flow equations. AIAA., J. 1965, vol. 3, No. 5, p. 972.
5. Glauert M. B. The boundary layer on a magnetized plate. J. Fluid Mech., 1962, vol. 12, pt. 4, p. 625—638.
6. Мексын D. Integration of the boundary — layer equations. Proc. Roy. Soc. A, 1956, vol. 237, No. 1211, p. 543—559.
7. Мексын D. The new methods in laminar boundary layer theory. Oxf., Pergamon Press, 1961.
8. Резников Б. И. Метод асимптотического интегрирования уравнений ламинарного пограничного слоя. Сб. «Аэрофизические исследования сверхзвуковых течений» (под ред. Ю. А. Дунаева). Изд-во «Наука», 1967.
9. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного, изд. 3-е, испр. Изд-во «Наука», 1965.