АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОГО СЖИМАЕМОГО ГАЗА ОКОЛО ЗАТУПЛЕННОГО ТЕЛА

А. А. МАРКОВ, Л. А. ЧУДОВ

(Москва)

Рассматривается обтекание затупленного тела сверхзвуковым потоком вязкого газа. Предлагается метод, позволяющий строить асимптотическое разложение любого порядка по малому параметру ε, характеризующему коэффициенты вязкости и теплопроводности. Построена асимптотика, включающая члены нулевого, первого и второго порядков ε. Проведено сопоставление с результатами других авторов, изучавших различные частные аспекты рассматриваемой задачи при помощи метода внешних и внутренних разложений [1–3].

1. Рассмотрим обтекание гладкого затупленного тела однородным на бесконечности сверхзвуковым потоком вязкого газа. Пусть безразмерные коэффициенты вязкости и теплопроводности — малые величины порядка ε^2. При достаточно малом значении ε в области течения, прилежащей к носику тела, можно выделить следующие основные зоны.

Зона 1 — пограничный слой; здесь эффекты вязкости и теплопроводности имеют нулевой порядок по ε; толщина зоны 1 порядка ε.

Зона 2 — промежуточная зона, лежащая между пограничным слоем и размытой ударной волной; локальные эффекты вязкости и теплопроводности здесь порядка ε^2, однако параметры течения отличаются от параметров соответствующего невязкого и нетеплопроводного течений на величины порядка ε вследствие влияния зоны 1.

Зона 3 — размытая ударная волна; толщина этой зоны порядка ε^2, имеется смещение порядка ε условной средней линии этой зоны по отношению к фронту ударной волны соответствующего невязкого течения.

Зона 4 — внешнее течение, где параметры газа с погрешностью, экспоненциально малой относительно ε, совпадают с параметрами набегающего потока.

Ван-Дайк (см., например, [4]), рассматривая осесимметричный случай, вывел уравнения, определяющие члены нулевого и первого порядков по ε в асимптотике для зон 1, 2 и указал условие сопряжения, описывающие взаимодействие этих зон. Асимптотику для зоны 3 и ее связь с асимптотикой зон 1, 2 Ван-Дайк не рассматривал. Впервые модифицированные условия Ренкина — Гюгонио с учетом диссипативных эффектов рассматривались в работе [5].

Жермен и Гиро (см., например, [1]), Чоу и Тинг [2] получили асимптотику нулевого и первого порядков по ε^2 для зоны 3. При этом не учитывалось воздействие на эту зону со стороны областей 1, 2, представляющее эффект порядка ε.

Этот эффект рассмотрел Б. М. Булах [3]. Учитывались члены нулевого и первого порядков по ε; внутренняя структура волны не рассматривалась. Все упомянутые выше авторы пользовались методом внешних и внутренних разложений.

Ниже для вывода асимптотических разложений применен метод погранслойных поправок, развитый в известных работах М. И. Вишика и Л. А. Люстерника (см. например [6, 7]). В работе [8] показано, что при помощи метода погранслойных поправок можно получить приближения любого порядка по ε для зон 1,2.

2. Постановка задачи. Общая характеристика алгоритма. Для сокращения изложения ограничимся плоским течением, причем тело будем считать симметричным, а угол атаки — равным нулю. Газ считаем совершенным, удельные теплоемкости постоянными. Коэффициенты вязкости и теплопроводности предполагаем зависящими только от температуры, хотя это и не существенно для применяемого метода. Коэффициент второй вязкости принимаем равным — $2\mu/3$, где μ — коэффициент первой вязкости. Температуру на поверхности тела будем считать заданной и постоянной.

Приведем систему уравнений Навье — Стокса к безразмерному виду так, как это сделано в работе [4], т. е. отнесем длину к L (где L — радиус кривизны носика), плотность — к ρ_∞, температуру — к U_∞ / c_p, давление — к $\rho_\infty U_\infty^2$, коэффициент вязкости — к его значению при $T = U_\infty / c_p$.

Запишем полученную таким путем систему уравнений в векторно-матричной форме:

$$L_\varepsilon(w_\varepsilon) \equiv \frac{\partial M(w_\varepsilon)}{\partial x} + \frac{\partial N(w_\varepsilon)}{\partial y} - \varepsilon^2 \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(P(w_\varepsilon) \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x} + Q(w_\varepsilon) \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial y} \right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial y} \left(R(w_\varepsilon) \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x} + S(w_\varepsilon) \frac{\partial w_\varepsilon}{\partial y} \right) \right\} \tag{2.1}$$

Здесь w_ε, M, N — четырехмерные векторы; P, Q, R, S — матрицы четвертого порядка:

$$w_{\varepsilon 1} = \rho, \quad M_1 = \rho v_x^2 + (\gamma - 1)\rho e, \quad N_1 = \rho v_x v_y$$

$$w_{\varepsilon 2} = v_x, \quad M_2 = \rho v_x v_y, \quad N_2 = \rho v_y^2 + (\gamma - 1)\rho e$$

$$w_{\varepsilon 3} = v_y, \quad M_3 = \rho v_x[\gamma e + {}^1/_2(v_x^2 + v_y^2)], \quad N_3 = \rho v_y[\gamma e + {}^1/_2(v_x^2 + v_y^2)]$$

$$w_{\varepsilon 4} = e, \quad M_4 = \rho v_x, \quad N_4 = \rho v_y \tag{2.2}$$

$$P = \begin{Vmatrix} 0 & {}^4/_3 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & {}^4/_3 & \mu v_x & \mu v_y & \gamma\lambda/N_{\mathrm{Pr}_\infty} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \qquad Q = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & -2\mu/3 & 0 \\ 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & \mu v_y & -{}^2/_3\,\mu v_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

$$R = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & -{}^2/_3\mu & 0 & 0 \\ 0 & -{}^2/_3\mu v_y & \mu v_x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}, \qquad S = \begin{Vmatrix} 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & & {}^4/_3\,\mu & 0 \\ 0 & \mu v_x & {}^4/_3\,\mu v_y & \gamma\lambda/N_{\mathrm{Pr}_\infty} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix} \tag{2.3}$$

$$N_{\mathrm{Pr}_\infty} = \frac{\mu_\infty c_p}{\lambda_\infty}, \quad \varepsilon^2 = \frac{1}{Re_\infty} \frac{\mu(\gamma - 1) M_\infty^2 T_\infty}{\mu(T_\infty)}, \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v}$$

В уравнениях (2.1) и формулах (2.2), (2.3) приняты следующие обозначения: ρ — плотность, v_x — проекция скорости на ось x, v_y — проекция скорости на ось y, e — внутренняя энергия, μ — коэффициент вязкости, λ — коэффициент теплопроводности, c_p, c_v — удельные теплоемкости; N_{Pr_∞} — число Прандтля. Систему (2.1) дополним граничными условиями на поверхности тела и бесконечности соответственно

$$l(w_\varepsilon) = W_\varepsilon, \quad l'(w_\varepsilon) = W_\infty \tag{2.4}$$

Условия (2.4.1) представляют собой условие вязкого обтекания (например, условия прилипания, условия массообмена, условия скольжения, температурного скачка и т. п.). Граничные условия (2.4.2) для равномерного параллельного потока имеют вид:

$$v_x \to 1, \quad v_y \to 0, \quad \rho \to 1, \quad (\gamma - 1)\rho e \to 1/\gamma M_\infty^2 \tag{2.5}$$

В задачу входят два параметра подобия M_∞ и N_{Re_∞}, причем величина $1/\gamma M_\infty^2$ входит в граничное условие для давления. В предельном случае $M_\infty \to \infty$ единственным параметром подобия становится ε.

В дальнейшем предполагаем, что ε — малое положительное число (малый параметр), а $1/M_\infty^2 = O(1)$.

Сформулированную выше краевую задачу будем называть невырожденной задачей. Наряду с ней рассмотрим следующую вырожденную задачу:

$$L_0(w_0) \equiv \frac{\partial M(w_0)}{\partial x} + \frac{\partial N(w_0)}{\partial y} = 0 \tag{2.6}$$

$$l_0(w_0) = W_0, \quad l_0'(w_0) = W_\infty \tag{2.7}$$

где (2.7.1) — условия на поверхности для невязкого обтекания, а (2.7.2) совпадает с (2.4.2), (2.5).

Будем предполагать, что решение w_0 вырожденной задачи (2.6), (2.7) существует, единственно и имеет изолированный разрыв типа ударной волны вдоль достаточно гладкой линии γ_0 на плоскости xy, а вне этой линии w_0 обладает той гладкостью, которая нам в дальнейшем понадобится.

Асимптотическое представление решения w_ε будем искать в виде суммы

$$w_\varepsilon = \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k w_k(x, y) + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k w_k'(x, y; \varepsilon) + \sum_{k=0}^{\infty} \varepsilon^k w_k''(x, y; \varepsilon) \tag{2.8}$$

Первый ряд соответствует так называемому внешнему решению в методе внешних и внутренних разложений. Уравнения, которым удовлетворяют отдельные члены этого ряда, получаются при помощи формального разложения решения системы (2.1) по степеням ε. Эти уравнения выписывать не будем. Граничные условия задаются на бесконечности и на поверхности тела. На линии γ_0 функции $w_k(x, y)$ имеют разрыв первого рода. Граничные условия на теле и условия на линии γ_0 для $w_k(x, y)$ получаются при построении соответствующих членов второго и третьего рядов.

Члены второго ряда w_k' представляют собой так называемые погранслойные поправки на линии разрыва. Основное их назначение — устранить разрывы функций внешнего решения (и их первых производных) на линии γ_0. Функции w_k' весьма быстро убывают с удалением от линии γ_0.

Для построения функций w используется система координат ns, связанная с линией γ_0, причем n — нормальная, а s — касательная координаты.

Вводится быстрая переменная $\eta = n/\varepsilon^2$, после чего уравнения для функций w_k' получаются приравниванием нулю членов соответствующих порядков по ε. Условия на линии γ_0 для функций w_k находятся из требования, чтобы для суммы

$$w^{(n)}(x, y; \varepsilon) = \sum_{k=0}^{n} \varepsilon^k w_k(x, y) + \sum_{k=0}^{n} \varepsilon^k w_k'(x, y; \varepsilon) + \sum_{k=0}^{n} \varepsilon^k w_k''(x, y; \varepsilon) \tag{2.9}$$

на линии γ_0 с соответствующей точностью выполнились законы сохранения (ср. [1]).

Члены третьего ряда в (2.8) призваны уничтожить невязки приближенного решения (2.9) по отношению к граничному условию (2.4.1) на теле. Эти функции также имеют характер погранслойных поправок, т. е. они очень быстро убывают при удалении от тела. Способ вывода уравнений для w_k'' и граничных условий для w_k на поверхности тела указан в работе [8]. Будем считать известными граничные условия для $w_k(x, y)$ на теле и в дальнейшем сосредоточим внимание на построении погранслойных поправок и выводе граничных условий для w_k на линии γ_0.

3. Местная система координат. Интегральная невязка.

В окрестности линии γ_0 введем криволинейную ортогональную систему координат ns, связанную с линией γ_0. Пусть в системе координат ns уравнение линии γ_0 есть $n=0$, уравнение оси симметрии Ox есть $s=0$.

Пусть

$$x = a(s,n), \qquad y = b(s,n) \tag{3.1}$$

соответствующие формулы замены переменных, причем $x=a(s,0)$; $y=b(s,0)$ — уравнение γ_0 в плоскости xy, где s — длина дуги вдоль γ_0.

Пусть

$$D = \begin{Vmatrix} \partial a/\partial s & \partial b/\partial s \\ \partial a/\partial n & \partial b/\partial n \end{Vmatrix}, \quad D' = \begin{Vmatrix} \partial a/\partial s & \partial a/\partial n \\ \partial b/\partial s & \partial b/\partial n \end{Vmatrix}$$

Обозначим через A четырехмерную матрицу

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{\boxed{D'}} & 0 \\ 0 & & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix} \tag{3.2}$$

Введем новые функции f_ε, f_0 по формулам

$$w_\varepsilon = Af_\varepsilon, \qquad w_0 = Af_0 \tag{3.3}$$

Система координат ns потребуется нам для построения погранслойных функций, которые, как показывает исследование, заметно отличны от нуля лишь на расстояниях порядка $O(\varepsilon)$ от γ_0, поэтому достаточно рассмотреть окрестность G_0 линии γ_0. После преобразований (3.1), (3.3) уравнения (2.1) и (2.6) примут соответственно следующий вид:

$$L_\varepsilon(f_\varepsilon) \equiv \frac{\partial}{\partial n} B(f_\varepsilon, s, n) + \frac{\partial}{\partial s} C(f_\varepsilon, s, n) - \varepsilon^2 \left\{ \frac{\partial}{\partial n} T_1(f_\varepsilon, s, n) \frac{\partial Af_\varepsilon}{\partial n} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial n} T_2 \frac{\partial Af_\varepsilon}{\partial s} + \frac{\partial}{\partial s} T_3 \frac{\partial Af_\varepsilon}{\partial n} + \frac{\partial}{\partial s} T_4 \frac{\partial Af_\varepsilon}{\partial s} \right\} = 0 \tag{3.4}$$

$$L_0(f_0) \equiv \frac{\partial}{\partial n} B(f_0, s, n) + \frac{\partial}{\partial s} C(f_0, s, n) = 0 \tag{3.5}$$

В соответствии со сказанным выше, введем интегральную невязку

$$r_\alpha^{(n)}(w^{(n)}) = \oint_\alpha \left\{ M(w^{(n)}) - \varepsilon^2 P(w^{(n)}) \frac{\partial w^{(n)}}{\partial x} - \varepsilon^2 Q(w^{(n)}) \frac{\partial w^{(n)}}{\partial y} \right\} dy -$$

$$- \left\{ N(w^{(n)}) - \varepsilon^2 R(w^{(n)}) \frac{\partial w^{(n)}}{\partial x} - \varepsilon^2 S(w^{(n)}) \frac{\partial w^{(n)}}{\partial y} \right\} dx \tag{3.6}$$

где α — произвольный замкнутый контур в плоскости xy. В частности, если контур $\alpha \subset G_0$, то, делая замену (3.1), получим

$$r_{\alpha'}^{(n)}(f^{(n)}) = \oint_{\alpha'} \left\{ B(f^{(n)}, s, n) - \varepsilon^2 T_1(f^{(n)}, s, n) \frac{\partial Af^{(n)}}{\partial n} - \varepsilon^2 T_2 \frac{\partial Af^{(n)}}{\partial s} \right\} ds -$$

$$- \left\{ C(f^{(n)}, s, n) - \varepsilon^2 T_3 \frac{\partial Af^{(n)}}{\partial n} - \varepsilon^2 T_4 \frac{\partial Af^{(n)}}{\partial s} \right\} dn \tag{3.7}$$

где α' образ контура α при отображении xy в ns. Приближение порядка n строим так, чтобы выполнялось неравенство

$$|r_{\alpha}^{(n)}(w^{(n)})| \leqslant C\varepsilon^{n+1}, \qquad C = \text{const} \tag{3.8}$$

4. Нулевое приближение. В качестве члена нулевого порядка в первой из сумм (2.9) примем решение вырожденной задачи w_0. Известно, что на линии разрыва γ_0 предельные значения w_0^{+0}, w_0^{-0} справа и слева соответственно связаны соотношениями Ренкина — Гюгонио. В наших обозначениях эти соотношения записываются следующим образом:

$$[N(w_0)] - a_0[M(w_0)] = 0 \tag{4.1}$$

Здесь $[\Phi] = \Phi^{+0} - \Phi^{-0}$, a_0 — тангенс угла между касательной к линии γ_0 в рассматриваемой точке и осью Ox. В плоскости переменных ns имеем соотношение

$$[B(f_0, s, n)] = 0 \tag{4.2}$$

Разрыв функции w_0 устраняется при помощи погранслойных поправок, т. е. функций вида $\bar{f}_0^{\pm}(\eta, s)$, где $\eta = n/\varepsilon^2$. Погранслойные поправки строятся отдельно для $\eta < 0$ и $\eta > 0$, что и символизируют индексы «минус» и «плюс». Вывод уравнений для функций $f_0^{\pm}(\eta, s)$ здесь не приводим, так как он аналогичен выкладкам, проведенным в [9] для случая одномерного нестационарного течения вязкого теплопроводного газа. В этой же работе подробно изучены свойства функции $\bar{f}_0^{\pm}$. Оказывается, что

$$\bar{f}_0^{\pm}(\eta, s) = \bar{f}_0(\eta, s) - f_0^{\pm 0}(s) \tag{4.3}$$

где $\bar{f}_0(\eta, s)$ — стационарная одномерная волна, т. е. стационарное решение одномерных уравнений Навье — Стокса, удовлетворяющее краевым условиям

$$\bar{f}_0 \to f_0^{\pm 0} \quad \text{при } \eta \to \pm\infty \tag{4.4}$$

Условия Ренкина — Гюгонио, постулированные нами, можно получить также из требования, чтобы интегральная невязка (3.6) обращалась в нуль при $\varepsilon = 0$. Как показано в [9], краевые условия (4.4) определяют $\bar{f}_0$ с точностью до параметрической функции $\nu(s, \varepsilon)$, которую можно интерпретировать как сдвиг $\bar{f}_0$ вдоль оси η.

Обозначим через $\bar{f}_0^*$ решение, однозначно определяемое каким-либо условием нормировки, например, одним из следующих:

1) при $\eta = 0$ достигается максимум $|\partial\bar{v}^{*}_{n,0}/\partial\eta|$

2) при $\eta = 0$ имеем $\bar{\rho}_0^* = (\rho_0^{+0} + \rho_0^{-0})/2$

Будем в дальнейшем пользоваться вторым способом нормировки.

Произведя нормировку, как бы привязываем стационарную волну к линии γ_0, причем различные способы нормировки дают волны, смещенные друг относительно друга на величину порядка ε^2.

Любое допустимое решение $\bar{f}_0$ получается из нормированного $\bar{f}_0^*$ простым сдвигом

$$\bar{f}_0(\eta, s; \nu) = \bar{f}_0^*(\eta - \nu, s) \tag{4.5}$$

Функция ν будет последовательно уточняться при построении следующих приближений.

5. Первое приближение. Введем некоторые обозначения. Пусть $V(f)$ — достаточно гладкая вектор-функция векторного аргумента $f = (f_1, \ldots, f_n)$, $V = (V_1, \ldots, V_n)$; пусть $h = (h_1, \ldots, h_n)$ — приращение аргумента f. Тогда

$$V(f+h) = V(f) + V_f h + (V_f h)_f h + \ldots, \qquad V_f = \|\partial V/\partial f_1, \ldots, \partial V/\partial f_n\| \tag{5.1}$$

При этом член порядка m оценивается величиной $C_m|h|^m$, где C_m — постоянная, $|h|^2 = h_1^2 + \ldots + h_n^2$.

Пусть теперь $A(f)$ — n-мерная матрица, элементы которой a_{ij} будут достаточно гладкими функциями векторного аргумента $f = (f_1, \ldots, f_n)$.

Обозначим через A_* оператор, ставящий в соответствие вектору h матрицу A_*h с элементами

$$c_{ij} = (A_*h)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial a_{ij}}{\partial f_k} h_k$$

Тогда

$$A(f+h) = A(f) + A_*(f)h + (A_*(f)h)_*h + \ldots \tag{5.2}$$

причем член порядка m также оценивается через $|h|^m$.

Перейдем к описанию первого приближения. Поступая так, как указано в п. 2, получим для определения $w_1(x, y)$ линеаризированную однородную систему уравнений движения невязкого газа и граничные условия на поверхности тела. Так как условия в набегающем потоке, согласно предположению, не зависят от ε, то на бесконечности получим для w_1 однородные граничные условия. Будем считать, что $w_1 \equiv 0$ в области, лежащей слева от γ_0. Обсуждение этого предположения (см. ниже в п. 8). Условия для w_1 на линии γ_0 получим при построении погранслойных функций первого приближения.

При выводе уравнений для этих функций прежде всего уточним параметрическую функцию $\nu(s, \varepsilon)$ погранслойных функций нулевого приближения для того, чтобы учесть эффекты первого порядка в граничных условиях на теле.

Предположим, что параметрическая функция $\nu(s, \varepsilon)$ допускает разложение

$$\nu(s, \varepsilon) = \nu_1(s) / \varepsilon + \nu_2(s) + O(\varepsilon), \tag{5.3}$$

где ν_i $(i = 1, 2)$ — неизвестные пока функции.

Положим в первом приближении в формуле (4.5)

$$\nu(s, \varepsilon) = \nu_1(s) / \varepsilon \tag{5.4}$$

Уравнения для погранслойных функций в первом приближении получаются точно таким же путем, как и в нулевом приближении. Они представляют собой линеаризированные уравнения стационарной волны с правыми частями, зависящими от $d\nu_1 / ds$ и функций нулевого приближения. Из требования малости интегральной невязки находим условия для w_1 на линии γ_0

$$\left[B_f(f_0, s, n) f_1 - \frac{d\nu_1}{ds} C(f_0, s, n) \right] = 0, \qquad f_1 = A^{-1} w_1 \tag{5.5}$$

Учитывая, согласно сказанному выше, что $w_1^{-0} = 0$, получаем из (5.5) граничное условие для w_1 на линии γ_0. Таким образом, для построения функции w_1 достаточно найти такое решение однородной линеаризированной системы уравнений движения невязкого газа при соответствующих граничных условиях на теле и такую параметрическую функцию $\nu_1(s)$, определенную на линии γ_0, чтобы выполнялись соотношения (5.5).

Задача об определении w_1 с вычислительной точки зрения очень близка к задаче обтекания затупленного тела невязким газом и может решаться соответствующими приближенными методами (см., например, [10]).

Равенство (5.5) позволяет заключить, что отыскание погранслойных поправок $\bar{f}_1^{\pm}$ можно свести к решению краевой задачи на $(-\infty, +\infty)$ для функции $\bar{f}_1 = \bar{f}_1^{\pm} + f_1^{\pm 0}$ с условиями $\bar{f}_1 \to f_1^{\pm 0}$, $\eta \to \pm\infty$. Методами качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений доказывается существование решения, обладающего нужными асимптотическими свойствами при $\eta \to \pm\infty$ (см. [9]). Решение $\bar{f}_1$ также определяется с точностью до параметрической функции $\Omega_1(s, \varepsilon)$, которую, однако, нельзя уже интерпретировать как сдвиг. Функция $\Omega_1(s, \varepsilon)$ должна быть уточнена в последующих приближениях.

6. Второе приближение. Вывод уравнений для гладкой и погранслойной частей второго приближения совершенно аналогичен выводу соответствующих уравнений для первого приближения. Уравнения для w_2 будут линеаризированными уравнениями движения невязкого газа с теми же коэффициентами при искомых функциях и их производных, что и в первом приближении. Но, в отличие от первого приближения, эти уравнения уже не будут однородными. Правые части этих уравнений зависят от w_0, w_1. Слева от γ_0 снова полагаем $w_2 \equiv 0$.

При построении погранслойных функций второго приближения необходимо уточнить погранслои нулевого и первого приближений. Для этого в (4.5) полагаем

$$\nu(s, \varepsilon) = \nu_1(s) / \varepsilon + \nu_2(s) \tag{6.1}$$

Обозначим через $\eta_1(\Omega_1, \varepsilon)$ ту точку на оси η, в которой $\bar{\rho}_1^* = (\rho_1^{+0} + \rho_1^{-0}) / 2$. Потребуем, чтобы для всех $|s| < \bar{s}$ выполнялось соотношение

$$\eta_1(\Omega_1, \varepsilon) = \nu_1(s) / \varepsilon \tag{6.2}$$

Условие (6.2) устраняет произвол первого приближения в соответствующем порядке по ε.

Уравнения для погранслойных функций $\bar{f}_2^{\pm}$ представляют собой также линеаризированные уравнения стационарной волны с теми же коэффициентами при искомых функциях и их производных, что и в первом приближении, и с правыми частями, зависящими от низших приближений. В эти правые части входят члены с неизвестной параметрической функцией $\nu_2(s)$, причем коэффициент при $d\nu_2 / ds$ такой же, как при $d\nu_1 / ds$ в уравнении первого приближения; кроме того, в правые части входят члены, возникающие при дифференцировании по параметрам $\nu(s, \varepsilon)$ и $\Omega_1(s, \varepsilon)$ функций $\bar{f}_0^\pm$ и $\bar{f}_1^\pm$. Погранслойные функции $\bar{f}_2^\pm$ определяются также с точностью до параметрической функции $\Omega_2(s, \varepsilon)$, уточняемой в последующих приближениях.

Предположим, наконец, что второе приближение уже построено, тогда неравенство (3.8) при $n = 2$ позволяет выписать соотношение на линии γ_0 для функции w_2

$$\left[B_f(f_0, s, n) f_2 - \frac{d\nu_2}{ds} C(f_0, s, n) \right] =$$

$$= \left[-(B_f(f_0, s, n) f_1)_f f_1 + T_1(f_0, s, n) \frac{\partial A(s, n) f_0}{\partial n} + \right.$$

$$\left. + T_2(f_0) \frac{\partial A f_0}{\partial s} + \frac{d\nu_1}{ds} T_3(\bar{f}_0^*) \frac{\partial A \bar{f}_1^*}{\partial \eta} + \frac{d\nu_1}{ds} C_f(f_0) f_1 \right] -$$

$$- \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\partial}{\partial s} C(\bar{f}_0^*, s, 0) - \frac{\partial}{\partial s} C(f_0^{\pm 0}, s, 0) + \frac{1}{\eta_1'} \frac{d\nu_1}{ds} C_f(\bar{f}_0^*, s, 0) \frac{\partial \bar{f}_1^*}{\partial \Omega_1} - \right.$$

$$\left. - \frac{\partial}{\partial s} T_3(\bar{f}_0^*, s, 0) \frac{\partial A(s, 0) \bar{f}_0^*}{\partial \eta} - \frac{1}{\eta_1'} \frac{d\nu_1}{ds} \left(T_{3*}(\bar{f}_0^*, s, 0) \frac{\partial \bar{f}_1^*}{\partial \Omega_1} \right) \frac{\partial A(s, 0) \bar{f}_0^*}{\partial \eta} \right\} d\eta \qquad (6.3)$$

где

$$w_2 = A f_2, \qquad \eta_1' = \frac{\partial \eta_1(\Omega_1, \varepsilon)}{\partial \Omega_1}$$

Итак, задача построения функций w_2, ν_2 аналогична соответствующей задаче для функций w_1, ν_1, отличие заключается в том, что в данном случае приходится решать неоднородную линеаризированную систему уравнений движения невязкого газа с неоднородными соотношениями на линии γ_0.

Легко видеть, что предложенная методика может быть распространена на приближении произвольного порядка n. Заметим, что при построении погранслойной части n-го приближения нужно уточнить с соответствующей степенью точности местоположения погранслоев всех более низких приближений, а именно положить

$$\nu = \nu_1 / \varepsilon + \nu_2 + \ldots + \varepsilon^{n-2} \nu_n \qquad (6.4)$$

$$\eta_i(\Omega_i, \varepsilon) = \nu_1 / \varepsilon + \nu_2 + \ldots + \varepsilon^{n-2} \nu_n \qquad (i=1,\ldots,n-1) \qquad (6.5)$$

где смысл η_i аналогичен первому и второму приближениям. При этом функции ν_k, $k = 1, 2, \ldots, n = 1$, уже известны из приближений более низкого порядка, а функция ν_n определяется одновременно с построением гладкой части w_n, так как она входит в соответствующие соотношения на линии γ_0.

7. Подробная запись условий на волне. Приведем, наконец, более подробную запись соотношений (5.5) и (6.3) в форме, удобной для сопоставления с результатами других авторов, о которых шла речь выше.

Пусть $\Phi = \langle f, g, h, \ldots \rangle$, т. е. Φ — функция переменных $f, g, h, \ldots$

Пусть $f = f_0 + \varepsilon f_1 + \ldots$, $g = g_0 + \varepsilon g_1 + \ldots$, $h = h_0 + \varepsilon h_1 + \ldots$; тогда $\Phi = \Phi_0 + \varepsilon \Phi_1 + \ldots$. Будем обозначать $\Phi_k = \langle f, g, h, \ldots \rangle_k$.

После преобразований соотношения (5.5) и (6.3) для касательной компоненты количества движения, нормальной компоненты количества движения, потока энергии и потока массы можно представить в виде:

первое приближение

$$\left[\langle uv\rho \rangle_1 - \frac{d\nu_1}{ds} \langle P + \rho u^2 \rangle_0 \right] = 0, \qquad \left[\langle P + \rho v^2 \rangle_1 - \frac{d\nu_1}{ds} \langle \rho uv \rangle_0 \right] = 0 \qquad (7.1)$$

$$\left[\left\langle \rho v \left(\gamma e + \frac{u^2 + v^2}{2} \right) \right\rangle_1 - \frac{d\nu_1}{ds} \left\langle \rho u \left(\gamma e + \frac{u^2 + v^2}{2} \right) \right\rangle_0 \right] = 0$$

$$\left[\langle \rho v \rangle_1 - \frac{d\nu_1}{ds} \langle \rho u \rangle_0 \right] = 0$$

второе приближение

$$\left[\langle uv\rho\rangle_2-\frac{d\nu_2}{ds}\langle P+\rho u^2\rangle_0\right]=\left[\mu\frac{\partial u_0}{\partial n}+\mu\frac{\partial v_0}{\partial s}+\frac{d\nu_1}{ds}\langle P+\rho u^2\rangle_1\right]-$$

$$-\frac{\partial}{\partial s}(u_0^{\pm 0})^2\int\limits_{-\infty}^{\infty}\widetilde{\rho}_0{}^*\,d\eta+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial s}\left\{\left(-\frac{2}{3}\mu\right)\frac{\partial\widetilde{v}_0{}^*}{\partial\eta}-\widetilde{P}_0{}^*\right\}d\eta-$$

$$-\frac{1}{\eta_1'}\frac{d\nu_1}{ds}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left\{\frac{\partial\widetilde{P}_1{}^*}{\partial\Omega_1}+(u_0^{\pm 0})^2\frac{\partial\widetilde{\rho}_1{}^*}{\partial\Omega_1}+2\bar{\rho}_0{}^*u_0^{\pm 0}\frac{\partial\widetilde{u}_1{}^*}{\partial\Omega_1}+\frac{2}{3}\frac{\partial\mu}{\partial e}\bar{v}_0{}^*\frac{\partial\widetilde{e}_1{}^*}{\partial\Omega_1}\frac{\partial\widetilde{v}_0{}^*}{\partial\eta}\right\}d\eta$$

$$\left[\langle P+\rho v^2\rangle-\frac{d\nu_2}{ds}\langle\rho uv\rangle_0\right]=\left[\left(2\mu-\frac{2}{3}\mu\right)\frac{\partial v_0}{\partial n}+\left(-\frac{2}{3}\mu\right)\frac{\partial u_0}{\partial s}+\right.$$

$$\left.+k\left(-\frac{2}{3}\mu\right)v_0+\frac{d\nu_1}{ds}(\mu\bar{u}_1{}^*+\langle\rho uv\rangle_1)\right]-k(u_0^{\pm 0})^2\int\limits_{-\infty}^{\infty}\widetilde{\rho}_0{}^*\,d\eta+$$

$$+k\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left\{\left(-\frac{2}{3}\mu\right)\frac{\partial\widetilde{v}_0{}^*}{\partial\eta}-\widetilde{P}_0{}^*\right\}d\eta-\frac{1}{\eta_1'}\frac{d\nu_1}{ds}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left\{u_0^{\pm 0}\left(\bar{v}_0{}^*\frac{\partial\widetilde{\rho}_1{}^*}{\partial\Omega_1}+\bar{\rho}_0{}^*\frac{\partial\widetilde{v}_1{}^*}{\partial\Omega_1}\right)+\right.$$

$$\left.+\bar{\rho}_0{}^*\bar{v}_0{}^*\frac{\partial\widetilde{u}_1{}^*}{\partial\Omega_1}+\frac{\partial\mu}{\partial e}\frac{\partial\widetilde{e}_1{}^*}{\partial\Omega_1}\frac{\partial\widetilde{u}_0{}^*}{\partial\eta}\right\}d\eta \qquad (7.2)$$

$$\left[\left\langle\rho v\left(\gamma e+\frac{u^2+v^2}{2}\right)\right\rangle_2-\frac{d\nu_2}{ds}\left\langle\rho u\left(\gamma e+\frac{u^2+v^2}{2}\right)\right\rangle_0\right]=$$

$$=\left[\frac{\gamma\lambda}{Pr_\infty}\frac{\partial e_0}{\partial n}+\mu u_0\frac{\partial u_0}{\partial n}+\left(2\mu-\frac{2}{3}\mu\right)v_0\frac{\partial v_0}{\partial n}+\left(-\frac{2}{3}\mu\right)v_0\frac{\partial u_0}{\partial s}+\right.$$

$$+\mu u_0\frac{\partial v_0}{\partial s}+\left(-\frac{2}{3}\mu\right)kv_0{}^2+\frac{d\nu_1}{ds}\left(\mu\bar{v}_0{}^*\frac{\partial\widetilde{u}_1{}^*}{\partial\eta}+\left(-\frac{2}{3}\mu\right)u_0{}^{\pm 0}\frac{\partial\widetilde{v}_1{}^*}{\partial\eta}+\right.$$

$$\left.\left.+\left\langle\rho u\left(\gamma e+\frac{u^2+v^2}{2}\right)\right\rangle\right)\right]+\frac{\partial}{\partial s}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left\{\left(-\frac{2}{3}\mu\right\}u_0{}^{\pm 0}\frac{\partial\widetilde{v}_0{}^*}{\partial\eta}-\right.$$

$$-u_0{}^{\pm 0}\left(\gamma\bar{\rho}_0{}^*\bar{e}_0{}^*+\frac{1}{2}\bar{\rho}^*(\bar{u}_0{}^{*2}+\bar{v}_0{}^{*2})\right)-\gamma\rho_0{}^{\pm 0}e_0{}^{\pm 0}-\frac{1}{2}\rho_0{}^{\pm 0}(u_0{}^{\pm 0})^2-$$

$$\left.-\frac{1}{2}\rho_0{}^{\pm 0}(v_0{}^{\pm 0})^2\right\}d\eta-\frac{1}{\eta_1'}\frac{d\nu_1}{ds}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left\{\left(\gamma\bar{\rho}_0{}^*+\frac{1}{2}(u_0{}^{\pm 0})^2+\frac{1}{2}\bar{v}_0{}^{*2}\right)u_0{}^{\pm 0}\frac{\partial\widetilde{\rho}_1{}^*}{\partial\Omega_1}+\right.$$

$$+\left(\gamma\rho_0{}^*\bar{e}_0{}^*+\frac{3}{2}\bar{\rho}_0{}^*(u_0{}^{\pm 0})^2+\frac{1}{2}\bar{\rho}_0{}^*\bar{v}_0{}^{*2}\right)\frac{\partial\widetilde{u}_1{}^*}{\partial\Omega_1}+$$

$$\left.+\bar{\rho}_0{}^*\bar{v}_0{}^*u_0{}^{\pm 0}\frac{\partial\widetilde{v}_1{}^*}{\partial\Omega_1}+\gamma\bar{\rho}_0{}^*u_0{}^{\pm 0}\frac{\partial\widetilde{e}_1{}^*}{\partial\Omega_1}+\left(-\frac{2}{3}\mu_e\right)\frac{\partial\widetilde{u}_1{}^*}{\partial\Omega_1}\frac{\partial\widetilde{v}_0{}^*}{\partial\eta}\right\}d\eta$$

$$\left[\langle\rho v\rangle_2-\frac{d\nu_2}{ds}\langle\rho u\rangle_0\right]=\left[\frac{d\nu_1}{ds}\langle\rho u\rangle_1\right]-\frac{\partial}{\partial s}u_0{}^{\pm 0}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\widetilde{\rho}_0{}^*d\eta$$

$$P\,\|\,(\gamma-1)\rho e$$

8. Обсуждение результатов. В условия, описывающие краевые задачи для функций w_i, входят только производные $d\nu_i/ds$ параметров $\nu_i(s)$, $i = 1, 2$. Построив гладкие функции w_1, w_2, определим параметры $\nu_i(s)$ с точностью до произвольных постоянных интегрирования. Для определения этих постоянных потребуются, по-видимому, дополнительные соображения.

Сопоставим полученные здесь соотношения на волне с результатами Жермена и Гиро [1], Чоу и Тинга [2] и Булаха [3].

Для краткости ограничимся сопоставлением соотношений для касательной составляющей количества движения (см. формулу (7.2.1), а также формулы (5)—(8) работы [1] и (6) работы [2]). Сначала мы перепишем результаты упомянутых выше авторов, используя наши обозначения.

Рассмотрим результат Жермена и Гиро. Будем предполагать, что поверхность Σ_0 (см. [1]) — цилиндрическая, причем $x = x(s)$, $y = y(s)$ — уравнение направляющей, n — внутренняя нормаль к поверхности, s — длина дуги вдоль направляющей; тогда

$$H_1^2 = 1, \quad H_2^2 = 1, \quad K_1 = (\ddot{x}\,\dot{y} - \dot{x}\,\ddot{y})\,/\,H_1^3 = \ddot{x}\,\dot{y} - \dot{x}\,\ddot{y} = k$$

$$K_2 = 0, \qquad U_2 = 0, \qquad u_2 = 0, \qquad \partial(\ldots)/\partial x_2 \equiv 0$$

Изменим обозначения следующим образом (везде в дальнейшем слева — оригинальные обозначения, а справа — наши):

$$w = v, \qquad U_1 = u, \quad u_1\,|_{n=0} = u, \qquad \varepsilon = \varepsilon^2$$

Собирая в формуле (6) работы [1] члены порядка $O(\varepsilon)$ и приравнивая результат нулю, получим

$$[\rho_0 u_2 v_0] = \left[\mu\frac{\partial u_0}{\partial n} + (\mu+\lambda)\frac{\partial v_0}{\partial s}\right] -$$

$$- \int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial s}(\bar{P}_0 - \hat{P}_0)\,d\eta - u_0\frac{\partial u_0}{\partial s}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(\bar{\rho}_0 - \hat{\rho}_0)\,d\eta \qquad (8.1)$$

Чоу и Тинг [2] рассматривали частный случай фронта волны, являющейся окружностью радиуса R_0. Уравнение такой окружности можно записать в виде $x = R_0\cos\varphi$, $y = R_0\sin\varphi$.

Если вместо параметра φ взять длину дуги s, то, очевидно, $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 1$. Изменим в формуле (6) работы [2] обозначения следующим образом

$$\rho^{(0)} = \bar{\rho}_0, \quad \bar{u}^{(0)} = \bar{v}_0, \quad v_2^{(1)} = u_2^{+0}, \quad p^{(0)} = \bar{P}_0$$

$$v_\infty = u_0^{\pm 0} = u_0, \qquad \frac{\partial v_1^0}{\partial\theta} = \frac{\partial u^{-0}}{\partial s}, \quad \frac{\partial}{\partial\theta} = \frac{\partial}{ds}$$

$$\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial n}, \quad u_2^{-0} = 0, \quad \frac{\partial u_0^{-0}}{\partial n} = 0$$

$$u_1^{(0)} - u_2^{(0)} = -[v_0], \quad P_\infty = P_0^{-0}, \quad \rho_\infty = \rho_0^{-0}, \quad s = -\eta$$

тогда формулу (6) работы [2], учитывая, что

$$[\bar{\rho}_0\bar{u}_0] = [\rho_0 u_0]$$

можно переписать в виде

$$
[\rho_0 v_0 u_2] = \left[\mu\frac{\partial u_0}{\partial n} + \left(\mu' - \frac{2}{3}\mu\right)\frac{\partial v_0}{\partial s}\right] -
$$

$$
- \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial s}(\bar{P}_0 - P_0^{\pm 0})\,d\eta - u_0\frac{\partial u_0}{\partial s}\int_{-\infty}^{\infty} (\bar{\rho}_0 - \rho_0^{\pm 0})\,d\eta \tag{8.2}
$$

Б. М. Булах учитывал эффект порядка $O(\varepsilon)$, обусловленный толщиной вытеснения пограничного слоя, но не рассматривал внутреннюю структуру волны и возникающие при этом члены порядка $O(\varepsilon^2)$, поэтому сравним его результат с формулой (7.1.1). Ограничимся, как и прежде, сопоставлением соотношений для касательной компоненты количества движения. Используя соотношения

$$
[u_0] = 0, \quad [\rho_0 v_1 + \rho_1 v_0 - \varphi_0' u_0 \rho_0] = 0, \quad [u_1 + v_0\varphi_0'] = 0
$$

$$
[\rho_0 v_0^2 + P_0] = 0
$$

(см. формулы (3.2) [3]) и производя несложные преобразования, получим

$$
[\langle uv\rho\rangle_1 - \varphi_0' \langle \rho u^2 + P\rangle_0] = 0 \tag{8.3}
$$

В работе [3] используется следующий принцип сопряжения внутреннего и внешнего разложений:

$$
f_0 = F_{00}(s) = F_0(n, s)\,|_{n=\pm 0} \tag{8.4}
$$

$$
f_1 = F_{10}(s) + F_{01}(s)\varphi_0(s) = \left(F_1 + \varphi_0\frac{\partial F_0}{\partial n}\right)_{n=\pm 0}
$$

где f_n — n-й член внутреннего разложения, а F_{mk} — k-й член внутреннего разложения для m-го члена внешнего разложения (по поводу терминологии см., например, [4]), φ_0 — величина, учитывающая эффект вытеснения. В выписанной выше формуле (8.3) присутствуют члены внутреннего разложения f_n, $n = 0, 1$.

Наконец, перепишем наш результат (см. 7.2.1) более подробно

$$
\left[\rho_0 v_0 u_2 - \frac{d\nu_2}{ds}P_0\right] = [-2(v_0\rho_1 u_1 + \rho_0 u_1 v_1)] + \tag{8.5}
$$

$$
+ \frac{d\nu_1}{ds}[(\gamma - 1)(\rho_1 e_0 + \rho_0 e_1) + \rho_0 u_0 u_1] + \left[\mu\frac{\partial u_0}{\partial n} + \left(\mu' - \frac{2}{3}\mu\right)\frac{\partial v_0}{\partial s}\right] -
$$

$$
- \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial s}(\bar{P}_0 - P_0^{\pm 0})\,d\eta - u_0\frac{\partial u_0}{\partial s}\int_{-\infty}^{\infty} (\bar{\rho}_0 - \rho_0^{\pm 0})\,d\eta +
$$

$$
+ \frac{1}{\eta_1'}\frac{d\nu_1}{ds}\int_{-\infty}^{\infty} \left\{ (\gamma - 1)\left(\tilde{e}_0^*\frac{\partial \tilde{\rho}_1^*}{\partial \Omega_1} + \bar{\rho}_0^*\frac{\partial \tilde{e}_1^*}{\partial \Omega_1}\right) + \bar{\rho}_0^*\tilde{u}_0^*\frac{\partial \tilde{u}_1^*}{\partial \Omega_1}\right\} d\eta
$$

Из формул (8.1), (8.2) нетрудно усмотреть, что при сделанных выше предположениях результаты [1] и [2] совпадают, хотя они были получены несколько различными методами (см. [1,2]). Далее, если в формуле (8.5) приравнять нулю все члены с индексами 1 и положить $d\nu_2 / ds \equiv 0$, то наш результат совпадает с (8.1), (8.2). Наконец, результат Булаха (см. (8.3)) совпадает с формулой (7.1.1), если $\varphi_0' = d\nu_1 / ds$ и если использовать в отличие от (8.4) следующий принцип сопряжения внутреннего и внешнего разложений:

$$
f_0 = F_0(n, s)\,|_{n=\pm 0}, \quad f_1 = F_1(n, s)\,|_{n=\pm 0}
$$

Указанное различие в принципах сопряжения связано с тем, что в работе [3] возмущаются независимые переменные, что приводит к возмущению членов внешнего разложения. В нашей работе члены внешнего разложения (гладкие функции) не возмущаются, а возмущению подвергаются только погранслойные поправки.

В работе [11] на примере модельного уравнения газовой динамики

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial\varphi(u)}{\partial x}=\varepsilon\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

рассмотрены оба метода построения асимптотики и показана их эквивалентность.

В заключение остановимся на постановке задачи для отыскания гладких функций (или членов внешнего разложения). В случае одномерного нестационарного течения вязкого теплопроводного газа задачи для гладких функций близки по постановке к рассмотренным выше. Вопрос о разрешимости этих задач изучен в работе [12]. В работе [3] предлагается несколько вариантов постановки задачи для гладкой части первого приближения, использующих различные условия на волне (линии γ_0). Нам наиболее естественным представляется вариант, в котором отсутствуют возмущения перед волной по всем направлениям, включая и характеристические. Для этого необходимо, чтобы возмущение было тождественным нулем перед волной.

Поступило 17 II 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Germain P., Guiraud J. Conditions de choc dans un fluide doué de coefficients de viscosité et de conductibilité thermique faibles mais non nuls. C. r. Acad. sci. 1960, vol. 250, No. 11, p. 1965—1967.
2. Chow R., Ting Lu. Higher order theory of curved shock. J. Aeronaut. Sci., 1961, vol. 28, No. 5, p. 428—430.
3. Булах Б. М. Об условиях на головном скачке при обтекании тупоносого тела вязким газом. ПММ, 1966, т. 30, вып. 2, стр. 353.
4. Ван-Дайк М. Теория сжимаемого пограничного слоя во втором приближении с применением к обтеканию затупленных тел гиперзвуковым потоком. В сб. «Исследование гиперзвуковых течений» под ред. Ф. П. Риддела. М., «Мир», 1964.
5. Седов Л. И., Михайлова М. П., Черный Г. Г. О влиянии вязкости и теплопроводности на течение газа с сильно искривленной ударной волной. Вестн. Моск. ун-та, 1953, № 3, стр. 95.
6. Вишик М. И., Люстерник Л. А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром. Успехи матем наук, 1957, т. 12, вып. 5, стр. 3—122.
7. Вишик М. И., Люстерник Л. А. Об асимптотике решений краевых задач для квазилинейных дифференциальных уравнений. Докл. АН СССР, 1958, т. 121, № 5, стр. 778—781.
8. Браиловская И. Ю., Чудов Л. А. О двух методах построения высших приближений по малому параметру вязкости. Вычислительные методы и программирование (в сб. работ ВЦ МГУ), Изд. Моск. ун-та, 1967, вып. 7, стр. 173—185.
9. Марков А. А., Чудов Л. А., Асимптотика одномерного нестационарного течения вязкого теплопроводного газа с зоной ударного сжатия. Численные методы в газовой динамике (в сб. работ ВЦ МГУ), Изд. Моск. ун-та, 1967, вып. 7, стр. 83—104.
10. Теленин Г. Ф., Тиняков Г. П. Метод расчета пространственного обтекания тел с отошедшей ударной волной. Докл. АН СССР, 1964, т. 154, № 5, стр. 1056—1058.
11. Сушко Г. В., Чудов Л. А. Асимптотика некоторых решений квазилинейного параболического уравнения второго порядка с малым параметром при старшей производной. Численные методы в газовой динамике (в сб. работ ВЦ МГУ). Изд. Моск. ун-та, 1967, вып. 7, стр. 131—161.
12. Марков А. А. К обоснованию первого приближения асимптотики одномерного нестационарного течения вязкого теплопроводного газа зоной ударного сжатия. Численные методы в газовой динамике (в сб. работ ВЦ МГУ). Изд. Моск. ун-та, 1967, вып. 7.