

ТЕЧЕНИЕ ИЗЛУЧАЮЩЕГО ВОДОРОДА В ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ СОПЛАХ

В. В. АЛЕКСАНДРОВ

(Москва)

Течению излучающего газа в каналах и трубах посвящено значительное количество работ, опубликованных в последние годы. Ввиду сложности и неразработанности вопроса в основном рассматриваются отдельные аспекты этой проблемы. Определение характеристик лучистого поля в областях простой геометрической формы, заполненных излучающе-поглощающей неподвижной средой с постоянным коэффициентом поглощения, проведено во многих работах. Статьи [1-3] посвящены расчету лучистого поля и поля температуры по заданному течению совершенного невязкого нетеплопроводного излучающего газа с постоянным коэффициентом поглощения. Течение предполагается поступательным [1, 2], или близким к потенциальному [3]. Авторы изучили точность получаемого решения при применении различных приближенных методов и установили, что диффузионное приближение дает небольшую ошибку при расчете поля плотности излучения и величины лучистых тепловых потоков для достаточно широкого класса отражающих свойств стенок. Отметим еще работы [4, 5], в которых рассчитано одномерное стационарное течение вязкого теплопроводного излучающего совершенного газа с постоянными коэффициентами переноса.

В работах [1-5] коэффициент поглощения считается постоянным. Это обстоятельство значительно упрощает процесс решения, так как в качестве независимых переменных могут быть выбраны соответствующие оптические толщины. Работа [3] содержит замечание о том, что предложенный в ней метод расчета может быть использован при переменном коэффициенте поглощения. Однако в приведенных расчетах эта возможность не использована.

При постоянном коэффициенте поглощения перечисленные работы дают достаточно полное исследование методов решения двумерных задач в геометрически простых областях при отсутствии механического движения и одномерных задач с движением. Они содержат результаты, полученные для точных интегральных или интегро-дифференциальных уравнений и дают анализ приближенных методов. В работе [3] рассмотрены более широкие возможности решения двумерных задач (использование метода Монте-Карло), но течение предполагается заранее заданным.

Ниже предлагается метод численного расчета двумерного равновесного течения невязкого нетеплопроводного излучающего газа с переменным коэффициентом поглощения. В качестве примера рассчитывается течение излучающе-поглощающего водорода в осесимметричных соплах. Предполагается, что излучение серое и находится в локальном термодинамическом равновесии. Уравнение переноса рассматривается в диффузионном приближении. Поток лучистой энергии через стенку принят равным нулю. Рассматриваемые сопла имеют полубесконечную цилиндрическую входную часть. Начальное течение газа в цилиндрической части задается сверхзвуковым. В процессе решения определяются поле плотности излучения и все параметры течения внутри сопла.

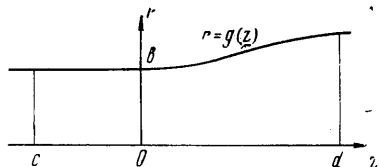
1. Постановка задачи. Осесимметричное равновесное течение сжимаемого невязкого нетеплопроводного излучающего газа описывается системой уравнений

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial z} + v \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= 0, & u \frac{\partial v}{\partial z} + v \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} \rho u r + \frac{\partial}{\partial r} \rho v r &= 0 \\ \rho u \frac{\partial}{\partial z} \left(H + \frac{w^2}{2} \right) + \rho v \frac{\partial}{\partial r} \left(H + \frac{w^2}{2} \right) &= -Q \\ \rho &= \rho(p, T), & H &= H(p, T) \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь z, r — осевая и радиальная координаты, u, v — осевая и радиальная составляющие вектора скорости течения газа, w — модуль скорости, p — давление, T — температура, ρ — плотность, H — энтальпия на единицу массы газа, Q — скорость потери энергии единицей объема газа за счет излучения. Предположим, что излучение серое и находится в локальном термодинамическом равновесии. Тогда

$$Q = \kappa(4\sigma T^4 - U) \quad (1.2)$$

Здесь $\kappa(p, T)$ — объемный коэффициент поглощения газа, σ — постоянная Стефана — Больцмана, а функция U определяется как нулевая сферическая гармоника интенсивности излучения I



Фиг. 1

$$U(r, z) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi I(r, z, \theta, \varphi) \sin \theta d\theta$$

Интенсивность излучения, в свою очередь, является функцией четырех аргументов: r, z, θ (полярного угла, отсчитываемого от положительного направления оси z) и φ (меридионального угла, отсчитываемого от некоторой плоскости, проходящей через ось симметрии). Плотность излучения равна $c_0^{-1}U$, где c_0 — скорость света. Ради краткости изложения в дальнейшем будем везде называть U функцией плотности излучения, имея в виду, что она отличается от истинной плотности излучения множителем c_0^{-1} . Плотность ρ , энтальпия H , коэффициент поглощения κ в каждом конкретном случае должны быть заданы как известные функции от давления и температуры. Уравнение для плотности излучения в диффузионном приближении имеет вид [6]

$$\operatorname{div} \frac{l}{3} \operatorname{grad} U - \frac{1}{l} U = -\frac{4\sigma}{l} T^4 \quad \left(l = \frac{1}{\kappa} \right) \quad (1.3)$$

Здесь l — средняя длина пробега излучения. Это уравнение будем называть уравнением диффузии излучения (фотонного газа).

В качестве простейшего примера будем рассматривать течения в гладких расширяющихся соплах с цилиндрическим входом. Уравнение стенки такого сопла задается функцией (фиг. 1)

$$g(z) = b, z \leq 0, \quad g(z) = g_1(z), \quad 0 \leq z \leq d \quad (1.4)$$

Здесь b и d — константы, а $g_1(z)$ — гладкая монотонно возрастающая функция такая, что $g_1(0) = b$, и при $z = 0$ первые k производных равны нулю, где $k \geq 1$.

Газ течет в положительном направлении оси z . При $z = -\infty$ течение представляет собой равномерный сверхзвуковой поток газа, который характеризуется числом Маха M_∞ , давлением p_∞ и температурой T_∞ . Газодинамические параметры удовлетворяют следующим граничным условиям:

$$\begin{aligned} u &= M_\infty a_\infty, \quad v = 0, \quad p = p_\infty, \quad T = T_\infty \\ a &= a(p_\infty, T_\infty) \text{ при } z = -\infty, \quad v = 0 \text{ при } r = 0 \\ v/u &= dg(z)/dz \text{ при } r = g(z) \end{aligned} \quad (1.5)$$

Здесь $a(p, T)$ — изэнтропическая скорость звука, которая в каждом конкретном случае является известной функцией от давления и температуры. Если координата d выходного сечения сопла достаточно велика, так что

поток излучения от струи газа, вытекающей от сопла, мал и не влияет на течение внутри сопла, то сечение $z = d$ для излучения можно считать прозрачной границей. На ней должно выполняться граничное условие [7]

$$U + \frac{2}{3} l \partial U / \partial z = 0 \quad \text{при } z = d \quad (1.6)$$

Предположим далее, что стенка сопла адиабатическая, т. е. поток лучистой энергии через эту стенку равен нулю. Тогда при $r = g(z)$

$$\int_{\Omega \cdot \mathbf{n} > 0} I(\Omega \cdot \mathbf{n}) d\Omega + \int_{\Omega \cdot \mathbf{n} < 0} I(\Omega \cdot \mathbf{n}) d\Omega = \int_{4\pi} I(\Omega \cdot \mathbf{n}) d\Omega = 0 \quad (1.7)$$

В выражении (1.7) направление вектора Ω совпадает с направлением светового луча, а вектор \mathbf{n} обозначает единичную внешнюю нормаль к стенке сопла. В диффузионном приближении (1.7) эквивалентно условию

$$\partial U / \partial n = 0 \quad \text{при } r = g(z) \quad (1.8)$$

Примечание 1. В диффузионном приближении интенсивность излучения выражается через функцию U следующим образом:

$$I(\Omega) = \frac{1}{4\pi} \left[U - \frac{1}{\kappa} (\text{grad } U \cdot \Omega) \right] \quad (1.9)$$

Если векторы Ω и Ω' ($\Omega \neq \Omega'$) совпадают с направлениями падающего и зеркально отраженного от стенки лучей, то они удовлетворяют соотношению

$$\Omega \times \mathbf{n} = \Omega' \times \mathbf{n} \quad (1.10)$$

Из выражения (1.9) и условия (1.8) видно, что на стенке $I(\Omega) = I(\Omega')$, если выполняется соотношение (1.10).

Значит, адиабатическая стенка в диффузионном приближении отражает излучение по зеркальному закону.

Предположим, что стенка отражает падающее на нее излучение диффузным образом. Это означает, что $I(\Omega) = U / 4\pi$ при $\Omega \cdot \mathbf{n} < 0$. Если стенка адиабатическая, то

$$\int_{\Omega \cdot \mathbf{n} > 0} I(\Omega \cdot \mathbf{n}) d\Omega + \frac{U}{4\pi} \int_{\Omega \cdot \mathbf{n} < 0} (\Omega \cdot \mathbf{n}) d\Omega = 0 \quad (1.11)$$

Диффузное отражение не может быть реализовано точно ни в одном дифференциальном приближении уравнения переноса с конечным числом членов. Если, тем не менее, рассмотрим соотношение (1.11) в диффузионном приближении, то (1.11) будет эквивалентно условию (1.8). Значит, (1.8) будет граничным условием и в случае адиабатического диффузного отражения для рассматриваемого приближения.

Ввиду адиабатичности стенки излучение при $z = -\infty$ изотропно, следовательно, при $z = -\infty$

$$U(r, \infty) = 4\sigma T_\infty^4 \quad (1.12)$$

В численных расчетах условие (1.12) будем сносить на плоскость $z = c$, $c < 0$, достаточно удаленную от плоскости $z = 0$.

На оси сопла в силу симметрии при $r = 0$

$$\partial U / \partial r = 0 \quad (1.13)$$

Введем безразмерные переменные по формулам

$$\begin{aligned} r^\circ &= \frac{r}{l_\infty}, & z^\circ &= \frac{z}{l_\infty}, & u^\circ &= \frac{u}{a_\infty}, & v^\circ &= \frac{v}{a_\infty}, & \rho^\circ &= \frac{\rho}{\rho_\infty} \\ p^\circ &= \frac{p}{\rho_\infty a_\infty^2}, & H^\circ &= \frac{H}{a_\infty^2}, & T^\circ &= \frac{RT}{a_\infty^2}, & l^\circ &= \frac{l}{l_\infty}, & I^\circ &= \frac{4\pi I}{\rho_\infty a_\infty^3} \end{aligned} \quad (1.14)$$

где R — газовая постоянная.

Используя (1.14), представим уравнения задачи (1.1) и (1.3) в безразмерном виде (индекс ° в дальнейшем изложении опущен)

$$u \frac{\partial u}{\partial z} + v \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \quad u \frac{\partial v}{\partial z} + v \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \rho u r + \frac{\partial}{\partial r} \rho v r = 0 \quad (1.15)$$

$$\rho u \frac{\partial}{\partial z} \left(H + \frac{w^2}{2} \right) + \rho v \frac{\partial}{\partial r} \left(H + \frac{w^2}{2} \right) = \kappa \left(\frac{U}{4\pi} - \beta_0 T^4 \right)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{3\kappa} \frac{\partial U}{\partial z} \right) - \kappa U = -4\pi\beta_0 \kappa T^4 \left(\beta_0 - \frac{4\sigma a_\infty^5}{\rho_\infty R^4} \right) \quad (1.16)$$

Здесь ρ_∞ и a_∞ — размерные величины. Равенства (1.5), (1.6), (1.8), (1.12), (1.13), записанные в безразмерной форме, — граничные условия задачи

$$u = M_\infty, \quad v = 0, \quad p = p_\infty, \quad T = T_\infty \quad \text{при } z = c$$

$$v = 0 \quad \text{при } r = 0 \quad (1.17)$$

$$v/u = dg(z)/dz \quad \text{при } r = g(z)$$

$$U = 4\pi\beta_0 T_\infty^4 \quad \text{при } z = c$$

$$U + (2/3\kappa) (\partial U / \partial z) = 0 \quad \text{при } z = d \quad (1.18)$$

$$\partial U / \partial r = 0 \quad \text{при } r = 0$$

$$\partial U / \partial n = 0 \quad \text{при } r = g(z)$$

Первое уравнение в условиях (1.17) записано при $z = c$, так как при $z < c$ излучение изотропно и не возмущает течения.

Эллиптико-гиперболическая (при $M > 1$) система дифференциальных уравнений (1.15), (1.16) совместно с граничными условиями (1.17), (1.18) полностью описывает поставленную задачу.

Безразмерный параметр β_0 связан с параметром Γ Гуларда [8], в котором за характерную длину принят радиус b цилиндрической части сопла, соотношением

$$\beta_0 = \frac{M_\infty H_\infty}{\tau_\infty T_\infty^4} \Gamma$$

Здесь $\tau_\infty = \kappa_\infty b$ — оптический радиус сопла при $z = -\infty$. Параметр Γ — характеристика влияния излучения на механическое движение в том случае, когда оптическая толщина излучающего газа невелика и на границах течения поток излучения из окружающей среды равен 0. При подсчете параметра Γ скорость потери энергии Q частицей газа за счет излучения принимается равной скорости потери энергии в приближении объемного высвечивания.

В данной задаче поток лучистой энергии через стенку сопла равен нулю, и поэтому параметры Γ и β_0 не имеют такого прозрачного смысла, как, например, в задаче об излучающем ударном слое.

2. Итерационный процесс. Если величину U считать заданной функцией координат, то система дифференциальных уравнений (1.15) с граничными условиями (1.17) будет замкнутой. Эта система будет гиперболической, если во всем поле течения выполняется условие $M > 1$. Если функции κ и T считать заданными, то будет замкнуто уравнение (1.16) с граничными условиями (1.18). Это уравнение — эллиптическое. Поэтому поставленная задача может решаться итерационным путем. Каждая итерация состоит из двух частей.

В первой части решаются уравнения газовой динамики (1.15) с граничными условиями (1.17). Скорость выделения лучистой энергии

$$-Q = \kappa (U / 4\pi - \beta_0 T^4)$$

полагается известной функцией координат: значения функций κ и T берутся из расчета уравнений газовой динамики, а значение функции U — из расчета уравнения диффузии в предыдущей итерации.

Во второй части решается уравнение диффузии (1.16) с граничными условиями (1.18). Температура T и коэффициент поглощения κ полагаются равными соответствующим функциям, полученным в результате первой части итерации.

При расчете первой итерации функция Q полагается равной нулю.

Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока значения какого-нибудь чувствительного параметра, полученного в двух последовательных итерациях, не станут отличаться на заданную малую величину во всем поле течения.

3. Расчет уравнений газовой динамики. Уравнения газовой динамики, в которых скорость выделения лучистой энергии Q задана как функция координат, в случае сверхзвукового течения рассчитываются методом характеристик. Характеристики первого C^+ и второго C^- семейств определяются уравнением

$$dz = \frac{\beta \mp \zeta}{\beta \zeta \pm 1} dr \quad \left(\beta = \sqrt{M^2 - 1}, M = \frac{w}{a}, \zeta = \frac{v}{u} \right) \quad (3.1)$$

в котором верхние знаки относятся к характеристикам первого семейства, нижние — к характеристикам второго семейства; M — местное число Маха, ζ — тангенс угла наклона вектора скорости к оси сопла. Вдоль характеристик выполняются соотношения

$$\frac{d\zeta}{1 + \zeta^2} \pm \frac{\beta}{\rho w^2} dp \pm \frac{1}{\beta \mp \zeta} \left[\frac{\zeta}{r} - \frac{\rho_r Q \sqrt{1 + \zeta^2}}{\rho^2 w H_\tau} \right] dz = 0 \quad (3.2)$$

в которых индексы означают частные производные. Функция тока ψ вводится уравнениями

$$\rho u r = \partial \psi / \partial r, \quad \rho v r = -\partial \psi / \partial z \quad (3.3)$$

Вдоль линий тока C° выполняются условия

$$\rho w dw + dp = 0 \quad (3.4)$$

$$(\rho H_p - 1) dp + \rho H_\tau dT + \frac{Q \sqrt{1 + \zeta^2}}{w} dz = 0 \quad (3.5)$$

Вдоль характеристик C^\pm функция тока изменяется согласно уравнениям

$$d\psi = \pm \rho w r \frac{\sqrt{1 + \zeta^2}}{\beta \mp \zeta} dz = \pm \rho w r \frac{\sqrt{1 + \zeta^2}}{\beta \zeta \pm 1} dr \quad (3.6)$$

На основании соотношений (3.1)–(3.6) построена схема численного решения уравнений газовой динамики методом характеристик. Она отличается от схемы, описанной в работе [9], способом определения значений скорости и температуры в расчетной точке. Отличие возникает вследствие того, что при ненулевой скорости выделения лучистой энергии энтропия вдоль линии тока не сохраняется.

Расчет течения начинается с некоторой характеристики второго семейства, целиком лежащей левее прямой $z = c$. На этой характеристике задаются условия равномерного потока. По данным на первой характеристике строится следующая характеристика второго семейства вниз по течению потока, по данным на второй характеристике — третья характеристика и т. д. до тех пор, пока рассматриваемая область $D = \{c \leq z \leq d; 0 \leq r \leq g(z)\}$ не будет покрыта характеристической сеткой.

В процессе расчета вдоль каждой характеристики второго семейства, начиная от стенки, вычисляется функция тока. Полученная таким образом величина функции тока ψ_0 на оси будет мерой точности расчета течения.

Для численного решения уравнения диффузии необходимо иметь значения функций T и κ в точках с фиксированными значениями координат z_i и y_j , где $y = r/g(z)$, а

$$z_i = c + ih_z' \quad (i = 0, 1, \dots, m_1), \quad y_j = jh_y' \quad (j = 0, 1, \dots, n_1), \\ h_z' = (d - c)/m_1, \quad h_y' = 1/n_1$$

При расчете течения методом характеристик точки на характеристиках имеют неизвестные заранее координаты. Поэтому программа, реализующая на ЭВМ метод характеристик, включает в себя подпрограмму квадратичной интерполяции, позволяющую вычислять и запоминать значения нужных функций в заранее известных точках.

Функция Q при $z < c$ полагается равной нулю. При $z > c$ она задается в узлах прямоугольной равномерной сетки (см. 4). В точках, не совпадающих с узлами сетки, значения Q вычисляются при помощи линейной интерполяции.

В результате расчета газодинамические параметры и коэффициент поглощения получаются на линиях $y = n''/n'$, где $n' > 1$, n'' — положительные целые числа и $n'' = 0, 1, 2, \dots, n'$.

4. Расчет уравнения диффузии излучения. Уравнение переноса излучения в диффузионном приближении рассчитывается методом локальных вариаций [10]. Выпишем функционал

$$J = \int_c^d dz \int_0^{g(z)} r dr \left\{ \frac{1}{6\kappa} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 \right] + \frac{\kappa}{2} U^2 - qU \right\} + \frac{1}{4} \int_0^{g(d)} r U_2 dr \quad (4.1)$$

где κ и q — функции точки в области D . Рассмотрим множество функций $U(r, z)$, принимающих заданные значения $f(r)$ на отрезке $L = \{0 \leq r \leq g(c); z = c\}$. Функционал (4.1) достигает своего единственного минимума на такой функции $U_0(r, z)$ из этого множества, которая удовлетворяет дифференциальному уравнению [11]

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r}{3\kappa} \frac{\partial U_0}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{3\kappa} \frac{\partial U_0}{\partial z} \right) - \kappa U_0 = -q \quad (4.2)$$

и граничным условиям

$$U_0 = f(r) \quad \text{при } z = c$$

$$U_0 + \frac{2}{3\kappa} \frac{\partial U_0}{\partial z} = 0 \quad \text{при } z = d \quad (4.3)$$

$$\frac{\partial U_0}{\partial r} = 0 \quad \text{при } r = 0, \quad \frac{\partial U_0}{\partial n} = 0 \quad \text{при } r = g(z)$$

В рассматриваемой задаче положим

$$q = 4\pi\beta_0\kappa T^4, \quad f(r) = 4\pi\beta_0 T_\infty^4$$

где κ и T — функции координат r и z , полученные в результате предшествующего расчета уравнений газовой динамики.

Метод локальных вариаций особенно удобен для поиска функции, имеющей область определения прямоугольник со сторонами, параллельными координатным осям. Преобразование $y = r/g(z)$, $z = z$ переводит область D в прямоугольную область $D_1 = \{0 \leq y \leq 1; c \leq z \leq d\}$.

Оставляя прежние обозначения для всех функций, выпишем подлежащий минимизации функционал в виде интеграла по области D_1

$$J = \int_c^d dz \int_0^1 y dy \left\{ \frac{1}{6\kappa} \left[(1 + y^2 g'^2) \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 + g^2 \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 - 2y g g' \frac{\partial U}{\partial z} \frac{\partial U}{\partial y} \right] + g^2 \left(\frac{\kappa}{2} U^2 - 4\pi\beta_0\kappa T^4 U \right) \right\} + \frac{1}{4} g^2(d) \int_0^1 y U^2(d, y) dy \quad (4.4)$$

в котором функции κ , T , U зависят от аргументов y , z .

В области D_1 построим равномерную прямоугольную сетку $z = z_i$, $y = y_j$, где $z_i = c + ih_z$, $y_j = jh_y$ ($i = 0, 1, \dots, m$, $j = 0, 1, \dots, n$), $h_z = (d - c) / m$, $h_y = 1 / n$ (m и n — положительные целые числа).

В работе [10] и принятой здесь схеме подынтегральное выражение функционала аппроксимируется при помощи центральных разностей. Значения искомой функции U и ее первых производных в центре прямоугольника, образованного точками (z_i, y_j) , (z_{i+1}, y_j) , (z_{i+1}, y_{j+1}) , (z_i, y_{j+1}) , принимаются равными

$$\begin{aligned} (U)_{ij} &= 1/4(U_{ij} + U_{i+1,j} + U_{i+1,j+1} + U_{i,j+1}) \\ (\partial U / \partial z)_{ij} &= 1/2h_z^{-1}(U_{i+1,j} + U_{i+1,j+1} - U_{ij} - U_{i,j+1}) \\ (\partial U / \partial y)_{ij} &= 1/2h_y^{-1}(U_{i,j+1} + U_{i+1,j+1} - U_{ij} - U_{i+1,j}) \\ U_{ij} &= U(z_i, y_j) \end{aligned} \tag{4.5}$$

При решении уравнения диффузии в первой итерации в качестве начального приближения для функции U задается значение изотропной плотности излучения, равное $4\pi\beta_0 T^4$, а в следующих итерациях — функция U , полученная в результате решения уравнения диффузии в предыдущей итерации.

В процессе расчета сетка оставалась фиксированной. Начальный шаг варьирования δ_0 функции U выбирался равным

$$\delta_0 = N_0^{-1} \min 4\pi\beta_0 T^4$$

где $N_0 \gg 1$, минимум ищется по всем $(m + 1)(n + 1)$ узлам сетки, а в качестве величины температуры использованы значения T , полученные при первом расчете уравнений газовой динамики. Последнее значение шага варьирования δ_i на i -й итерации выбирается равным $\delta_i = \delta_0 / N_i$, причем $N_1 < N_2 < \dots$.

При минимизации функционала (4.4) варьировались значения функции U во всех узлах, за исключением точек, лежащих на отрезке L . Полученное решение уравнения диффузии удовлетворяет всем граничным условиям, так как на остальной части границы соответствующие граничные условия являются естественными.

Примечание 2. Функция U , получающаяся в результате варьирования, может иметь пилообразный характер (см. фиг. 2, а). Эта пилообразность не связана с истинным поведением решения, а является результатом аппроксимации (4.5). На фиг. 2, б ломаная $abcde$ изображена часть профиля такой функции U при фиксированном значении координаты y . Пилообразность устраняется сглаживанием. Ломаная $abcde$ заменяется ломаной fg , проведенной через точки (z_i, U°_{ij}) . Новые значения U°_{ij} функции U в точках (z_i, y_j) ($i = 1, \dots, m - 1$, $j = 0, 1, \dots, n$) вычисляются по формуле

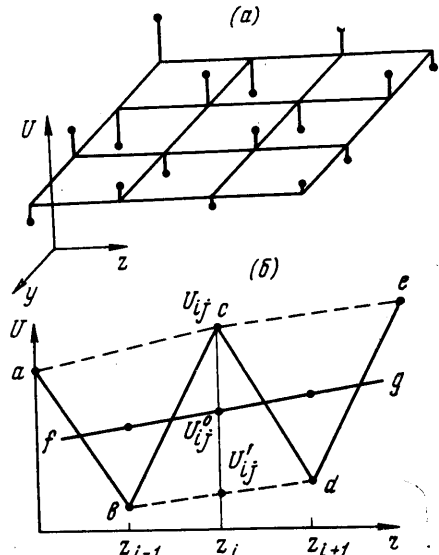
$$U^{\circ}_{ij} = 1/2(U_{ij} + U_{ij}')^{\circ}$$

На фиг. 2, б, прямая bd соединяет точки $(z_{i-1}, U_{i-1,j})$, $(z_{i+1}, U_{i+1,j})$.

При $i = m$, $j = 0, 1, \dots, n$ величины U°_{mj} вычисляются при помощи линейной экстраполяции по значениям

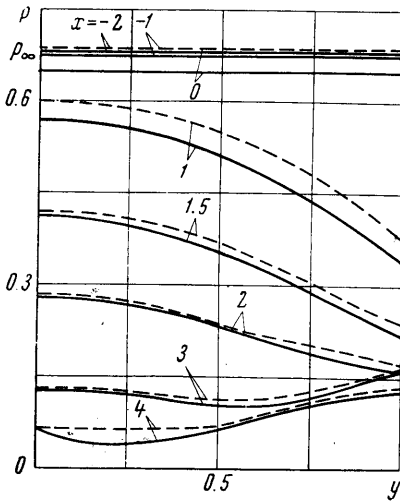
$$U^{\circ}_{m-2,j}, \quad U^{\circ}_{m-1,j}$$

Сравнение близости сглаженной функции к истинному решению производится при помощи функционала (4.4).



Фиг. 2

5. Примеры численных расчетов. В качестве примеров были рассчитаны течения водорода при различных значениях параметров $p_\infty, T_\infty, M_\infty$ в соплах двух конфигураций. Уравнения стенок этих сопел имеют вид (см. 1.4)



Фиг. 3

Здесь m_e, m_a — массы электрона и атома водорода, e — заряд электрона, k — постоянная Больцмана, h — постоянная Планка, χ — потенциал ионизации атома. Коэффициент ионизации ξ ввиду равновесности течения может быть найден по формуле Саха [13]

$$\xi = \left(\frac{A}{1+A} \right)^{1/2} \left(A(p, T) = \frac{(2\pi m_e)^{3/2} (kT)^{5/2}}{h^3 p} e^{-\chi/kT} \right) \quad (5.3)$$

Энтальпия H на единицу массы, плотность ρ , показатель адиабаты γ , изэнтропическая скорость звука a определяются методами статистической физики [14]

$$H(p, T) = \frac{5}{2} RT (1 + \xi) + \xi \chi, \quad \rho(p, T) = \frac{p}{R(1 + \xi)T}, \quad a^2(p, T) = \frac{2\gamma}{(2 - \xi)(1 + \xi)} \frac{p}{\rho}$$

$$\gamma(p, T) = \frac{5/2 + 1/2 \xi (1 - \xi) (5/2 + \chi/kT)^2}{3/2 + \xi (1 - \xi) (2 - \xi)^{-1} (1 + \xi)^{-1} (3/2 + \chi/kT)^2} \quad (5.4)$$

В формулах (5.2) — (5.4) все величины — размерные.

В этом параграфе подробно рассмотрим расчет одного течения внутри сопла, имеющего форму (5.1.1), и приведем некоторые данные по расчету сопел с образующей (5.1.2).

Равномерное течение водорода в цилиндрической части сопла задавалось параметрами

$$p_\infty = 50 \text{ атм}, \quad T_\infty = 30000^\circ \text{ К}, \quad M_\infty = 1.25$$

По формулам (5.2) — (5.4) можно получить

$$\kappa_\infty = 0.587 \text{ см}^{-1}, \quad \xi_\infty = 0.920$$

$$\rho_\infty = 0.102 \cdot 10^{-4} \text{ г см}^{-3}$$

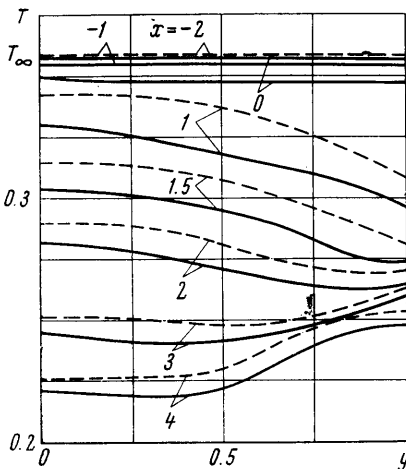
$$\gamma_\infty = 1.51$$

$$a_\infty = 2.64 \cdot 10^6 \text{ см сек}^{-1}, \quad \beta_0 = 59.6$$

Соответствующие безразмерные величины

$$p_\infty = 0.686, \quad T_\infty = 0.357,$$

$$\rho_\infty = 1$$



Фиг. 4

Размеры сопла выбраны равными:

$$b = 2 \text{ см.} \quad c = -6 \text{ см.} \quad d = 8 \text{ см}$$

Оптический радиус сопла при $z = c$ равен $\tau_\infty = 1.17$.

На начальной характеристике C^- было выбрано 64 равноотстоящие точки. Число точек на всех характеристиках второго семейства оставалось постоянным. При расчете новой точки на следующей характеристике проводилось четыре итерации.

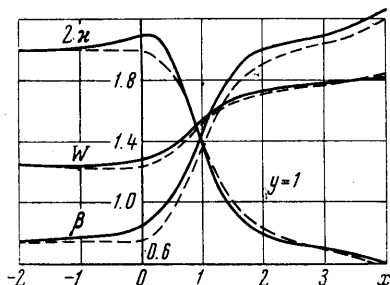
Числа m , n , m_1 , n_1 , определяющие размеры прямоугольных сеток, выбраны равными соответственно 39, 6, 16, 8.

При этих значениях m и n оптическая толщина ячейки сетки, использованной в методе локальных вариаций, равнялась 0.210 — в осевом направлении и 0.195 — в радиальном направлении (при $z = c$).

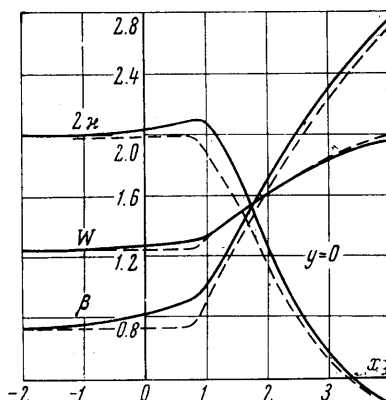
Число N_0 выбрано равным 2^8 , а максимальное значение N_t равнялось $3^5 N_0$. Число n' равно 6. При расчете течения методом характеристик величины ψ_0 функции тока на оси, вычисленные вдоль характеристик второго семейства, не превышали нескольких десятитысячных от значения функции тока на стенке сопла.

В процессе расчета течения на каждой i -й итерации вычислялся интеграл X_i от давления газа на стенке сопла

$$X_i = \int_{s(c)}^{s(d)} pr \, dr \quad (5.5)$$



Фиг. 5



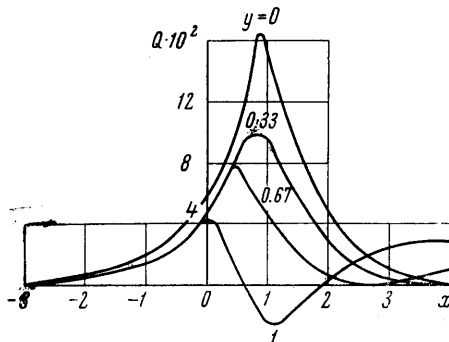
Фиг. 6

В описываемом примере были рассчитаны четыре итерации.

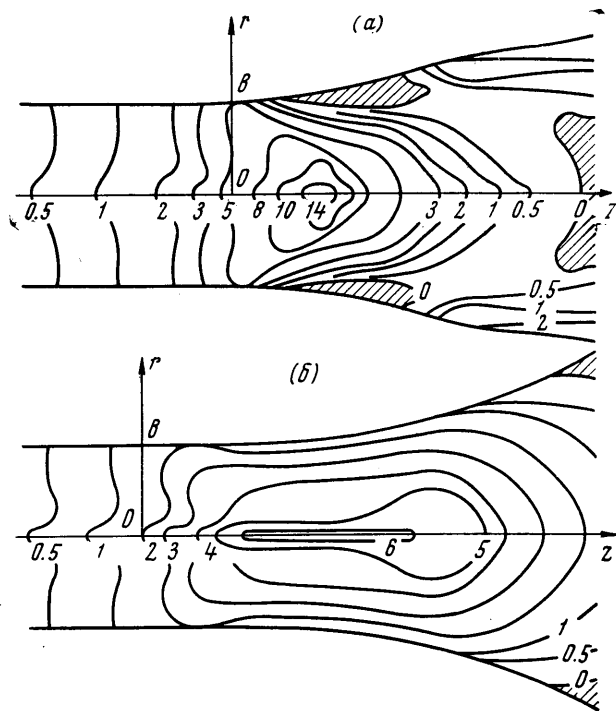
Расчеты проводились на ЭВМ БЭСМ-3М ВЦ АН СССР.

Во время счета одной итерации время работы метода характеристик равно 1 ч, а время работы метода локальных вариаций колебалось от 15 мин. до 1 ч.

На фиг. 3 изображены профили давления в сечениях $x = \text{const}$. Пунктирные линии относятся к течению неизлучающего, а сплошные — к течению излучающего газа. Аналогичные графики для температуры приведены на фиг. 4. Фиг. 5 и 6 представляют кривые зависимости функций β , w и κ от координаты x на стенке и на оси сопла соответственно. Увеличение коэффициента поглощения в окрестности горла сопла (сечение $x = 0$) отражает немонотонную зависимость κ от p и T . На фиг. 7 нанесена зависимость функции Q от координаты x при фиксированных значениях y . Из чертежа видно, что вблизи стенки сопла функция Q становится отрицательной в окрестности точки перегиба стенки. Линии равных значений $Q \cdot 10^2$ внутри сопел, профили которых описываются уравнениями (5.1), изображены на фиг. 8, а и б. Параметры потока во входном сечении для обоих сопел выбраны одинаковыми. Области, в которых $Q < 0$, заштрихованы. Из приведенных графиков видно, что в рассматриваемом примере значение $c = -3b$ достаточно для того, чтобы решение выходило на асимптотический режим при $z = c$.



Фиг. 7



Фиг. 8

Приведем еще один пример. Рассчитано течение внутри сопла, форма стенки которого определяется уравнением (5.1.2). Параметры, определяющие течение, равны

$$p_{\infty} = 100 \text{ атм}, \quad T_{\infty} = 20000^{\circ} \text{ К}, \quad M_{\infty} = 1.5, \quad b = 0.2 \text{ см}$$

Уменьшение величины X составляет 1.3%.

Автор благодарит Ю. Д. Шмыглевского за постоянное внимание к работе.

Поступило 26 I 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Шорин С. Н. Лучистый теплообмен в поглощающей среде. Изв. АН СССР. ОТН. 1951, № 3.
2. Ветлудкий В. Н., Онуфриев А. Т. Об охлаждении излучением серого идеального газа, текущего в плоском канале, с учетом точного и приближенного уравнения переноса, ПМТФ, 1964, № 6.
3. Howell J. R., Strite M. K., Renkel H. Heat transfer analysis of rocket nozzles using very high temperature propellants, AIAA J., 1965, 3, p. 669—673.
4. Немчинов И. В., Фонарев А. С. Течение Куэтта с учетом переноса тепла излучением. ПМТФ, 1960, № 3.
5. Greif R. Plane Poiseuille flow of a radiating and conducting gas, AIAA J., 1965, 3.
6. Марчук Г. И. Методы расчета ядерных реакторов. Госатомиздат, 1961.
7. Владимиров В. С. О граничных условиях в методе сферических гармоник, Докл. АН СССР, 1960, т. 135, № 5.
8. Goulard R., Goulard M. One-dimensional energy — transfer in radiating media. Intern. J. Heat Mass Transfer, 1960, 1, p. 81—91.
9. Кацкова О. Н., Крайко А. Н. Расчет плоских и осесимметричных сверхзвуковых течений при наличии необратимых процессов. Тр. ВЦ АН СССР, 1964.
10. Баничук Н. В., Петров В. М., Черноусько Ф. Л. Численное решение вариационных и краевых задач методом локальных вариаций. Ж. вычисл. матем. и матем. физ., 1966, т. 6, № 6.
11. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. Гостехиздат, 1957.
12. Амбарцумян В. А. Теоретическая астрофизика. ОГИЗ, 1939.
13. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Статистическая физика. Изд-во «Наука», 1964.
14. Прокофьев В. А. К вопросу об учете излучения при одномерном стационарном течении одноатомного газа. Уч. зап. МГУ, 1954, вып. 172 (механика).

При расчете течения считалось, что газ, находящийся правее плоскости $z = d$, не излучает и не перестраивает тем самым течение внутри сопла. Для проверки этого предположения было рассчитано течение внутри удлиненного сопла, для которого координата выходного сечения d была выбрана равной 10 см. Последовательные значения интеграла (5.5) будут равны:

$$X_0 = 0.2669 \text{ (неизлучающий газ)}, \quad X_1 = 0.2440$$

$$X_2 = 0.2482, \quad X_3 = 0.2477$$

$$X_4 = 0.2478$$

Окончательное значение вычисленного в тех же пределах интеграла X для удлиненного сопла равно $X = 0.2486$.

Излучение газа уменьшает величину X на 7.2%.

Для сопла, изображенного на фиг. 8, б, соответствующее уменьшение X равно 7.0%.