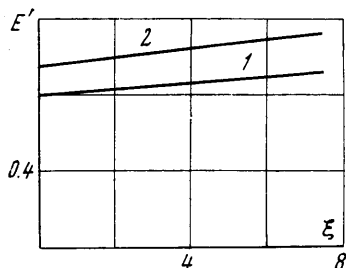
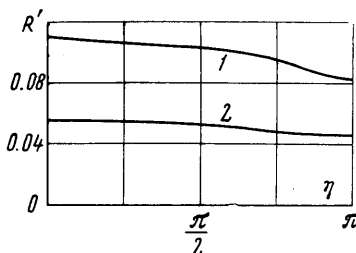


15° ( $M_\infty = 3$ ). Типичные профили продольной составляющей скорости и энтальпии показаны на фиг. 2—3. Изменение  $E_{\lambda=0}'$  вдоль  $\xi$  приведено на фиг. 4 (кривая 1 соответствует  $\alpha = 10^\circ$ ,  $R_0 = 0.5$ ; кривая 2 соответствует случаю  $\alpha = 10^\circ$ ,  $R_0 = 0.75$ ). Изменение  $R_{\lambda=0}'$  вдоль  $\eta$  при  $\xi = n\Delta\xi$  ( $n = 5$ ) показано на фиг. 5. Профили энтальпии оказались подобными вдоль  $\xi$  в расчетной области, которая была ограничена имеющимися в наличии данными о внешнем течении.



Фиг. 4



Фиг. 5

Приведем, например, результаты численных расчетов величины  $E_{\lambda=0}'$ , пропорциональной значению трения на стенке, для эллипсоида с соотношением полуосей 1 : 1.5 : 1.5 под углом атаки  $\alpha = 15^\circ$ ,  $M_\infty = 4$  при  $\eta = 1/2\pi$  вдоль  $\xi = n\Delta\xi$

$n =$	0	1	2	3	4	5	6	7	
$E' =$	0.782	0.794	0.804	0.813	0.822	0.834	0.847	0.863	( $\lambda=0$ )

Составленная программа позволяет рассчитать течение около эллипсоида вращения с произвольным соотношением полуосей под углом атаки, если известны параметры внешнего потока.

Поступило 19 IV 1967

### ЛИТЕРАТУРА

1. Шевелев Ю. Д. Численный расчет пространственного пограничного слоя в несжимаемой жидкости, Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 5.
2. Friedell S. The physical components of vectors and tensors. Z. angew. Math. und Mech, 1953, В. 33, № 10/11.
3. Тияков Г. Г. Исследование трехмерного сверхзвукового обтекания эллипсоидов вращения. Изв. АН СССР, МЖГ, 1965, № 6.

## МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЖИДКОСТИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ СОСУДЕ С ПЕРЕГОРОДКАМИ

К. С. КОЛЕСНИКОВ, В. Е. САМОДАЕВ

(Москва)

Уравнения движения твердого тела, полость которого частично заполнена идеальной жидкостью, получены в работах Н. Н. Моисеева [1, 2, 3], Д. Е. Охочимского [4], Г. С. Нариманова [5], Б. И. Рабиновича [6]. Для полости в виде кругового цилиндра или двух concentрических цилиндров вычислены все коэффициенты уравнений.

Задача о движении жидкости в цилиндрической полости с перегородками рассматривалась Б. И. Рабиновичем [7]. Она рассматривалась также Бауэром [8], который проанализировал частный случай движения сосуда в плоскости одной из перегородок.

Ниже рассмотрено плоское движение цилиндра с радиальными и кольцевыми перегородками и дано определение потенциала скоростей в случае произвольного положения радиальных перегородок по отношению к плоскости движения. Получены формулы для определения параметров механического аналога волновых колебаний, состоящего из двух подсистем математических маятников.

1. Сосуд в виде двух concentрических цилиндров с радиусами  $r_0$  и  $\beta r_0$  ( $0 \leq \beta < 1$ ) разделен радиальными перегородками. Обозначим угол между соседними перегородками через  $2\alpha$  ( $0 < \alpha \leq 1$ ), а глубину заполнения через  $h$  (фиг. 1).

Зафиксируем невозмущенное положение сосуда таким, чтобы ось цилиндров была вертикальной, а свободная поверхность жидкости — горизонтальной. Расположим начало неподвижной системы координат  $xuz$  на невозмущенной оси цилиндров на уровне свободной поверхности. Оси  $y$  и  $z$  пусть лежат в горизонтальной плоскости, ось  $x$  направим вертикально вверх. Исследуем малые движения идеальной жидкости в случае, когда сосуд совершает колебания в плоскости  $xu$ . На продольной оси цилиндров зафиксируем некоторую точку  $C$  и будем определять возмущенное положение сосуда в плоскости  $xu$  координатами точки  $C$  ( $x_c = -L = \text{const}$ ,  $y_c(t)$ ) и углом поворота  $\phi(t)$  относительно оси, проходящей через точку  $C$  и параллельной координатной оси  $z$ . Угол между плоскостью  $xz$  и ближайшей радиальной перегородкой обозначим через  $2\alpha_0$ . Абсолютное движение жидкости будем предполагать безвихревым. Введем цилиндрические координаты  $x, r, \eta$ , как показано на фиг. 1. Пусть  $\Phi$  — потенциал абсолютных скоростей.

Условие несжимаемости дает

$$\Delta\Phi = 0 \quad (1.1)$$

Граничные условия будут следующими: на наружной и внутренней цилиндрических стенках

$$\partial\Phi / \partial r = v_r^\circ \quad (r = r_0, r = \beta r_0) \quad (1.2)$$

на радиальных перегородках

$$\partial\Phi / r \partial\eta = v_\eta^\circ \quad (\eta = 2\pi\alpha_0, \eta = 2\pi(\alpha_0 + \alpha)) \quad (1.3)$$

на дне

$$\partial\Phi / \partial x = v_x^\circ \quad (x = -h) \quad (1.4)$$

на свободной поверхности [4]

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + g \int_0^t \frac{\partial\Phi}{\partial x} dt = 0 \quad (x = 0) \quad (1.5)$$

Здесь  $v_r^\circ, v_\eta^\circ, v_x^\circ$  — проекции скоростей точек стенок полости на нормаль к соответствующим стенкам в невозмущенном положении. Они равны

$$v_r^\circ = [y_c^\cdot + (L + x)\phi^\cdot] \sin \eta, \quad (1.6)$$

$$v_\eta^\circ = [y_c^\cdot + (L + x)\phi^\cdot] \cos \eta, \quad v_x^\circ = -\phi^\cdot r \sin \eta$$

Давление  $p$  определяется из интеграла Коши, который для малых колебаний имеет вид

$$(p - p_0) / \rho = -\partial\Phi / \partial t - gx \quad (1.7)$$

Здесь  $p_0$  — давление на свободную поверхность жидкости,  $\rho$  — плотность жидкости,  $g$  — потенциал внешних массовых сил. Следуя Охочимскому [4], положим

$$\Phi = \psi + \phi \quad (1.8)$$

причем  $\psi$  и  $\phi$  удовлетворяют уравнению (1.1).

Пусть  $\psi$  удовлетворяет условиям (1.2) — (1.4) и, кроме того,

$$\partial\psi / \partial x = v_x^\circ \quad (x = 0) \quad (1.9)$$

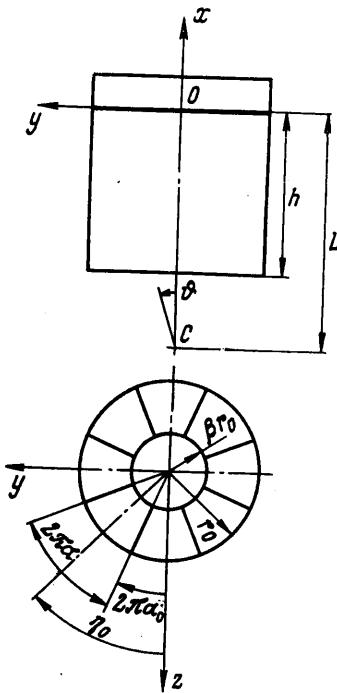
Подставив (1.8) в (1.2) — (1.5), найдем для  $\phi$  граничные условия

$$\partial\phi / \partial r = 0 \quad (r = r_0, r = \beta r_0) \quad (1.10)$$

$$\partial\phi / r \partial\eta = 0 \quad (\eta = 2\pi\alpha_0, \eta = 2\pi(\alpha_0 + \alpha)) \quad (1.11)$$

$$\partial\phi / \partial x = 0 \quad (x = -h) \quad (1.12)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} + g \int_0^t \frac{\partial\phi}{\partial x} dt = - \left( \frac{\partial\psi}{\partial t} + g \int_0^t \frac{\partial\psi}{\partial x} dt \right) \quad (x = 0) \quad (1.13)$$



Фиг. 1

2. Метод определения функции  $\psi$  предложен Н. Е. Жуковским [9]. Следуя [9], ищем  $\psi$  в виде

$$\psi = F(x, r, \eta)\theta' + r \sin \eta [y_c' + (L+x)\theta'] \quad (2.1)$$

Функция  $F(x, r, \eta)$  должна удовлетворять уравнению Лапласа  $\Delta F = 0$  и условиям на границе жидкости

$$\partial F / \partial r = 0 \quad (r = r_0, r = \beta r_0) \quad (2.2)$$

$$\partial F / r \partial \eta = 0 \quad (\eta = 2\pi\alpha_0, \eta = 2\pi(\alpha_0 + \alpha)) \quad (2.3)$$

$$\partial F / \partial x = -2r \sin \eta \quad (x = 0, x = -h) \quad (2.4)$$

Полагая

$$F(x, r, \eta) = X(x)R(r)H(\eta)$$

получаем

$$\frac{d^2 X}{dx^2} - k^2 X = 0, \quad \frac{d^2 H}{d\eta^2} + m^2 H = 0, \quad \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left(k^2 - \frac{m^2}{r^2}\right) R = 0$$

$$X(x) = A \operatorname{ch} kx + B \operatorname{sh} kx, \quad H(\eta) = \sin(m\eta + \xi), \quad R(r) = J_m(kr) + \gamma Y_m(kr)$$

Здесь  $J_m(kr)$  и  $Y_m(kr)$  — функции Бесселя соответственно первого и второго рода. Используя (2.3), находим

$$H(\eta) = \cos [1/2 \nu \alpha^{-1} (\eta - 2\pi\alpha_0)], \quad m = 1/2 \nu \alpha^{-1} \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots)$$

Условия (2.2) дают возможность найти собственные значения  $\zeta_{\nu n} = k_{\nu n} r_0$  и коэффициенты  $\gamma_{\nu n}$  из уравнений

$$J'_{\nu/2\alpha}(\zeta) Y'_{\nu/2\alpha}(\beta\zeta) - J'_{\nu/2\alpha}(\beta\zeta) Y'_{\nu/2\alpha}(\zeta) = 0 \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots)$$

$$\gamma_{\nu n} = -\frac{J'_{\nu/2\alpha}(\zeta)}{Y'_{\nu/2\alpha}(\zeta)} = -\frac{J'_{\nu/2\alpha}(\beta\zeta)}{Y'_{\nu/2\alpha}(\beta\zeta)} \quad \left( \begin{array}{l} \nu = 0, 1, 2, \dots \\ n = 1, 2, 3, \dots \end{array} \right)$$

где штрих означает дифференцирование по  $\zeta$ . Значения  $\zeta_{\nu n}$  и  $\gamma_{\nu n}$  приведены в таблице. Пронормировав функцию  $R_{\nu n}(r)$  так, чтобы  $R_{\nu n}(r_0) = 1$ , получим

$$R_{\nu n}(r) = \frac{J_{\nu/2\alpha}(\zeta_{\nu n} r) + \gamma_{\nu n} Y_{\nu/2\alpha}(\zeta_{\nu n} r)}{J_{\nu/2\alpha}(\zeta_{\nu n}) + \gamma_{\nu n} Y_{\nu/2\alpha}(\zeta_{\nu n})}$$

Здесь и далее под  $x, r, h$  будем понимать безразмерные величины, отнесенные к  $r_0$ . Функцию  $F$  можно записать теперь в виде

$$F = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \cos [1/2 \nu \alpha^{-1} (\eta - 2\pi\alpha_0)] [A_{\nu n} \operatorname{ch}(\zeta_{\nu n} x) + B_{\nu n} \operatorname{sh}(\zeta_{\nu n} x)] R_{\nu n}(r)$$

Чтобы воспользоваться граничными условиями (2.4), разложим предварительно функции  $r$  и  $\sin \eta$  в ряды следующих видов:

$$\sin \eta = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{\nu} \cos [1/2 \nu \alpha^{-1} (\eta - 2\pi\alpha_0)] \quad r = \sum_{n=1}^{\infty} b_{\nu n} R_{\nu n}(r) \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.5)$$

Коэффициенты разложений будут следующими:

$$a_{\nu} = d_{\nu} \cos \eta_0 \quad d_0 = \frac{\sin \pi \alpha}{\pi \alpha} \quad d_{\nu} = \frac{2 \sin \pi \alpha}{\pi \alpha [(\nu/2\alpha)^2 - 1]} \quad (\nu = 2, 4, 6, \dots) \quad (2.6)$$

n	$\beta$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
$m = 0$							
1	$\zeta_{vn}$	3.832	3.941	4.236	4.706	5.391	6.393
	$\gamma_{vn}$	0	0.1071	0.4173	1.154	26.28	-0.7099
	$D_{vn}$	3.664	3.112	2.729	2.487	2.325	2.212
	$N_{vn}$	14.68	14.75	15.21	16.27	18.07	20.93
2	$\zeta_{vn}$	7.016	7.330	8.055	9.104	10.56	12.62
	$\gamma_{vn}$	0	0.3233	1.677	-1.805	0.4028	-0.8379
	$D_{vn}$	-2.080	-0.7643	-0.1964	0.0380	0.1337	0.1629
	$N_{vn}$	49.22	49.94	53.22	59.01	67.61	80.23
3	$\zeta_{vn}$	10.17	10.75	11.93	13.55	15.77	18.89
	$\gamma_{vn}$	0	0.6451	-5.592	0.2331	-0.8477	-0.8881
	$D_{vn}$	4.897	2.862	2.229	2.009	1.928	1.903
	$N_{vn}$	103.5	106.1	115.3	129.6	149.9	178.9
$m = 2$							
1	$\zeta_{vn}$	3.054	3.053	3.034	2.968	2.842	2.681
	$\gamma_{vn}$	0	-0.0008	-0.0126	-0.0545	-0.1309	-0.2214
	$D_{vn}$	5.537	5.544	5.550	5.433	5.009	4.264
	$N_{vn}$	5.328	5.329	5.340	5.339	5.167	4.635
2	$\zeta_{vn}$	6.706	6.687	6.495	6.274	6.416	7.062
	$\gamma_{vn}$	0	-0.0183	-0.2015	-0.4301	-0.2799	0.3507
	$D_{vn}$	-9.094	-9.221	-8.707	-5.590	-2.500	-0.6588
	$N_{vn}$	40.79	41.17	41.87	36.76	30.04	27.61
3	$\zeta_{vn}$	9.969	9.887	9.549	9.918	11.06	12.95
	$\gamma_{vn}$	0	-0.0801	-0.4336	-0.0502	1.795	-0.2213
	$D_{vn}$	12.45	12.70	8.188	3.376	1.564	0.8279
	$N_{vn}$	95.39	96.56	88.87	76.24	76.86	85.71
$m = 4$							
1	$\zeta_{vn}$	5.317	5.317	5.317	5.312	5.282	5.175
	$\gamma_{vn}$	0	$-3 \cdot 10^{-6}$	-0.0001	-0.0026	-0.0204	-0.0802
	$D_{vn}$	30.18	30.14	30.11	30.17	30.28	29.56
	$N_{vn}$	12.28	12.28	12.28	12.31	12.46	12.74
2	$\zeta_{vn}$	9.282	9.282	9.273	9.152	8.852	8.836
	$\gamma_{vn}$	0	$-4 \cdot 10^{-5}$	-0.0080	-0.1163	-0.4014	-0.4180
	$D_{vn}$	-55.53	-55.61	-56.11	-56.55	-44.59	-23.59
	$N_{vn}$	70.163	70.16	70.49	73.61	70.60	53.04
3	$\zeta_{vn}$	12.682	12.68	12.61	12.24	12.50	13.89
	$\gamma_{vn}$	0	$5 \cdot 10^{-4}$	-0.0679	-0.4412	-0.1726	2.237
	$D_{vn}$	65.75	65.70	66.87	47.70	16.90	5.552
	$N_{vn}$	144.8	144.9	148.3	143.2	110.9	103.5

$$a_v = -c_v \sin \eta_0, \quad c_v = \frac{\cos 2\pi\alpha}{\pi\alpha [(v/2\alpha)^2 - 1]} \quad (v = 1, 3, 5, \dots)$$

$$b_{vn} = \frac{2D_{vn}}{N_{vn}}, \quad D_{vn} = 1 - \beta R_{vn}(\beta) + [(v/2\alpha)^2 - 1] \int_{\beta}^1 R_{vn}(r) dr \quad (2.7)$$

$$N_{vn} = \zeta_{vn}^2 - (v/2\alpha)^2 - [\beta^2 \zeta_{vn}^2 - (v/2\alpha)^2] R_{vn}^2(\beta)$$

Угол  $\eta_0$  определяет положение плоскости симметрии секторной полости. Используя граничные условия (2.4) с учетом разложений (2.5) — (2.7), найдем

$$F = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{\nu} b_{\nu n} \cos [{}^{1/2}\nu\alpha^{-1}(\eta - 2\pi\alpha_0)] R_{\nu n}(r) \left\{ -\frac{2r_0^2}{\zeta_{\nu n}} \frac{\text{sh} [\zeta_{\nu n}(h/2 + x)]}{\text{ch} (\zeta_{\nu n}h/2)} \right\}$$

Принимая во внимание (2.1), запишем потенциал  $\psi$  в виде

$$\psi = r_0 \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{\nu} b_{\nu n} \cos [{}^{1/2}\nu\alpha^{-1}(\eta - 2\pi\alpha_0)] R_{\nu n}(r) \left\{ \left[ -\frac{2r_0}{\zeta_{\nu n}} \frac{\text{sh} [\zeta_{\nu n}(h/2 + x)]}{\text{ch} (\zeta_{\nu n}h/2)} + \right. \right. \\ \left. \left. + (L + x) \right] \vartheta + y_c \right\} \quad (2.8)$$

Решение для  $\varphi$  ищем в виде суммы выражений вида

$$\varphi = X(x)R(r)H(\eta) \cdot f(t)$$

где  $f(t)$  — некоторая функция времени.

Условия (1.10), (1.11) совпадают с условиями (2.2), (2.3), поэтому берем  $R(r)$  и  $H(\eta)$  такими же, как для функции  $F(x, r, \eta)$ . Условию (1.12) удовлетворим, положив

$$X(x) = \text{ch} [\zeta_{\nu n}(x + h)]$$

Чтобы упростить уравнение для определения функций, зависящих от времени, запишем  $\varphi$  в виде

$$\varphi = \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{\nu} b_{\nu n} \cos [{}^{1/2}\nu\alpha^{-1}(\eta - 2\pi\alpha_0)] R_{\nu n}(r) \frac{\text{ch} [\zeta_{\nu n}(x + h)]}{\text{ch} (\zeta_{\nu n}h)} \lambda_{\nu n}(t) \quad (2.9)$$

Подставив теперь (2.8) и (2.9) в равенство (1.13) и сравнив слагаемые с одинаковыми индексами в правой и левой частях, получим следующее уравнение для обобщенных координат  $\lambda_{\nu n}(t)$ :

$$\lambda_{\nu n}'' + \omega_{\nu n}^2 \lambda_{\nu n} = -L_{\nu n} \vartheta'' - y_c'' + g\vartheta \quad \begin{pmatrix} \nu = 0, 1, 2, \dots \\ n = 1, 2, 3, \dots \end{pmatrix} \quad (2.10)$$

$$\omega_{\nu n} = \sqrt{\frac{\zeta_{\nu n} g}{r_0} \text{th} (\zeta_{\nu n} h)}, \quad L_{\nu n} = L - \frac{2r_0}{\zeta_{\nu n}} \text{th} (\zeta_{\nu n} h/2) \quad (2.11)$$

Величины  $\omega_{\nu n}$  — частоты собственных колебаний жидкости. Волновые колебания в секторной полости представлены в виде двойного ряда. Индекс  $n$  характеризует число волн в направлении радиуса, индекс  $\nu$  соответствует числу волн в окружном направлении.

Как следует из выражения (2.5), четным  $\nu$  соответствуют волны, симметричные относительно плоскости симметрии сосуда, нечетным  $\nu$  — антисимметричные. Нулевому  $\nu$  соответствуют осесимметричные волны, так как  $H_0(\eta) \equiv 1$ . Степень возбуждения той или иной формы зависит от расположения полости относительно плоскости колебаний сосуда, характеризуемого углом  $\eta_0$ . В частности, при  $\eta_0 = 0$  возбуждаются только антисимметричные формы, при  $\eta_0 = {}^{1/2}\pi$  только симметричные, что следует из формул (2.6). В случаях  $\eta_0 = 0$ ,  $\alpha = {}^{1/2}$  и  $\eta_0 = {}^{1/2}\pi$ ,  $\alpha = 1$  разложение по косинусам (2.5) обращается в тождество, что соответствует колебаниям жидкости в кольцевой или круговой полостях (перегородки не препятствуют колебаниям жидкости).

3. Найдем проекцию на ось  $y$  силы давления жидкости при колебаниях сосуда. Ограничимся одной секторной полостью. Учитывая, что горизонтальная проекция силы давления на дно величина второго порядка малости, будем иметь

$$P_y = \int_{\eta_1}^{\eta_2} \int_{-h}^0 [(p)_{r=1} - \beta(p)_{r=\beta}] r_0^2 \sin \eta \, d\eta \, dx + \\ + \cos \eta_2 \int_{-h}^0 \int_{\beta}^1 (p)_{\eta=\eta_2} r_0^2 \, dr \, dx - \cos \eta_1 \int_{-h}^0 \int_{\beta}^1 (p)_{\eta=\eta_1} r_0^2 \, dr \, dx \\ \eta_1 = 2\pi\alpha_0, \quad \eta_2 = 2\pi(\alpha_0 + \alpha)$$

Принимая во внимание (1.7), (1.8), (2.8) и (2.9), получаем

$$P_y = -m [y_c'' + (L - h/2)\theta''] - \sin^2 \eta_0 \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} m_{2\mu, n} \lambda_{2\mu, n}'' - \\ - \cos^2 \eta_0 \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} m_{2\mu+1, n} \lambda_{2\mu+1, n}'' \quad (3.1)$$

Здесь  $m$  — масса всей жидкости в сосуде,

$$m_{2\mu, n} = \rho r_0^3 \pi a d_{2\mu}^2 \frac{D_{2\mu, n}^2}{N_{2\mu, n}} \frac{2}{\zeta_{2\mu, n}} \operatorname{th}(\zeta_{2\mu, n} h) \quad \left( \begin{array}{l} \mu = 0, 1, 2, \dots \\ n = 1, 2, 3 \end{array} \right) \\ m_{2\mu+1, n} = \rho r_0^3 \pi a c_{2\mu+1, n}^2 \frac{D_{2\mu+1, n}^2}{N_{2\mu+1, n}} \frac{2}{\zeta_{2\mu+1, n}} \operatorname{th}(\zeta_{2\mu+1, n} h) \quad (3.2)$$

Момент, создаваемый жидкостью относительно оси, которая проходит через точку  $C$  и параллельна координатной оси  $z$ , будет

$$M_c = \int_{\eta_1}^{\eta_2} \int_{-h}^0 [(p)_{r=1} - \beta(p)_{r=\beta}] (L + r_0 x) r_0^2 \sin \eta \, d\eta \, dx + \\ + \int_{\beta}^1 \int_{-h}^0 [(p)_{\eta=\eta_2} \cos \eta_2 - (p)_{\eta=\eta_1} \cos \eta_1] (L + r_0 x) r_0^2 \, dr \, dx + \\ + \int_{\beta}^1 \int_{\eta_1}^{\eta_2} (p)_{x=x^*} \sin \eta r_0 \, dr \, d\eta, \quad x^* = -h - r\theta \sin \eta$$

где  $x^*$  — координаты точек дна с учетом наклона сосуда на угол  $\theta$ .

Проинтегрировав и выполнив некоторые преобразования, получим с точностью до константы, равной статическому моменту невозмущенной жидкости

$$M_c = -m(L - h/2) y_c'' - \left( I_0 - \sin^2 \eta_0 \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} I_{2\mu, n} - \cos^2 \eta_0 \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} I_{2\mu+1, n} \right) \theta'' - \\ - \sin^2 \eta_0 \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} m_{2\mu, n} L_{2\mu, n} \lambda_{2\mu, n}'' - \cos^2 \eta_0 \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} m_{2\mu+1, n} L_{2\mu+1, n} \lambda_{2\mu+1, n}'' + \\ + g \left[ \sin^2 \eta_0 \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} m_{2\mu, n} \lambda_{2\mu, n} + \cos^2 \eta_0 \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} m_{2\mu+1, n} \lambda_{2\mu+1, n} \right] + gm(L - h/2)\theta \quad (3.3)$$

$$I_{2\mu, n} = \rho r_0^5 \pi a d_{2\mu}^2 \frac{D_{2\mu, n}^2}{N_{2\mu, n}} \left( \frac{8h}{\zeta_{2\mu, n}^2} - \frac{16}{\zeta_{2\mu, n}^2} \operatorname{th} \frac{\zeta_{2\mu, n} h}{2} \right)$$

$$I_{2\mu+1, n} = \rho r_0^5 \pi a c_{2\mu+1, n}^2 \frac{D_{2\mu+1, n}^2}{N_{2\mu+1, n}} \left( \frac{8h}{\zeta_{2\mu+1, n}^2} - \frac{16}{\zeta_{2\mu+1, n}^2} \operatorname{th} \frac{\zeta_{2\mu+1, n} h}{2} \right)$$

Здесь  $I_0$  — момент инерции «затвердевшей» жидкости относительно оси, проходящей через точку  $C$  и параллельной координатной оси  $z$ .

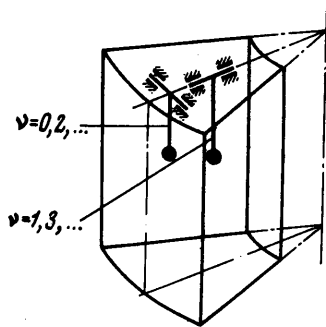
Н. Н. Моисеев показал [3], что механическим аналогом волновых колебаний жидкости могут быть математические маятники. Параметры маятников (масса, дли-

на, расположение точек подвеса) достаточно просто определяются в случаях, когда полость имеет форму кругового цилиндра [10] или прямоугольного параллелепипеда. Проведенное здесь решение дает возможность получить параметры маятников и для секторной полости.

Обобщенные координаты  $\lambda_{\nu n}$  волновых колебаний жидкости могут быть найдены из решения уравнений (2.10). Они соответствуют относительным смещениям маятников. Анализ равенств (3.1), (3.3) показывает, что для секторной полости волновые колебания могут быть представлены двумя подсистемами математических маятников. На фиг. 2 условно показано по одному маятнику из каждой подсистемы. Маятники подвешены в цилиндрических шарнирах так, чтобы плоскость колебаний маятников первой подсистемы совпала с плоскостью симметрии секторной полости, а плоскость колебаний маятников второй подсистемы была перпендикулярна ей.

Масса  $m_{\nu n}$  маятника определяется по формуле (3.2), длина  $l_{\nu n}$  маятника берется такой, чтобы собственная частота колебаний была равна (2.11)

$$l_{\nu n} = \frac{r_0}{\zeta_{\nu n} \operatorname{th}(\zeta_{\nu n} h)}$$



Фиг. 2

расстояние  $L_{\nu n}$  от оси качания сосуда до массы  $m_{\nu n}$  маятника вычисляется по формуле (2.12). Масса  $m_{\nu n}$ , длина  $l_{\nu n}$  и расстояние  $L_{\nu n}$  не зависят от расположения секторной полости по отношению к плоскости движения.

Поскольку четным индексам  $\nu = 2\mu$  (включая нуль) в выражении  $\varphi$  соответствуют симметричные формы волновых колебаний жидкости, их аналогом будут маятники первой подсистемы. Маятники второй подсистемы — аналоги антисимметричных форм колебаний ( $\nu = 2\mu + 1$ ).

Таким образом, при малых поперечных колебаниях сосуда, в смысле суммарного силового воздействия на сосуд, жидкость, частично заполняющую секторную полость, можно заменить механическим аналогом, состоящим из твердого тела и двух бесконечных систем математических маятников. Масса твердого тела и момент инерции твердого тела относительно оси вращения сосуда соответственно равны

$$m^* = m - \sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} m_{\nu n}, \quad I^* = I_0 - \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \cos^2 \eta_0 \sum_{\mu=0}^{\infty} I_{2\mu+1, n} + \sin^2 \eta_0 \sum_{\mu=0}^{\infty} I_{2\mu, n} \right]$$

Если смещение маятника в системе координат, жестко связанной с сосудом, обозначить через  $\lambda_{\nu n}$ , то эти смещения будут определяться из уравнения (2.10). Поперечная сила  $P_y$  и момент  $M_x$ , создаваемые механической системой (твердое тело плюс маятники), будут такими же, как и в (3.1) и (3.3).

Поступило 21 II 1967

### ЛИТЕРАТУРА

1. Моисеев Н. Н. Движение тела, имеющего полости, частично заполненные идеальной каплевой жидкостью. Докл. АН СССР, 1952, т. 85, № 4.
2. Моисеев Н. Н. О двух маятниках с жидкостью. ПММ, 1952, т. 16, вып. 6.
3. Моисеев Н. Н. Задача о движении твердого тела, содержащего жидкие массы, имеющие свободные поверхности. Матем. сб., 1953, т. 32 (74), № 1.
4. Охотимский Д. Е. К теории движения тела с полостями, частично заполненными жидкостью. ПММ, 1956, т. 20, вып. 1.
5. Нариманов Г. С. О движении твердого тела, полость которого частично заполнена жидкостью. ПММ, 1956, т. 20, вып. 1.
6. Рабинович Б. И. Об уравнениях возмущенного движения твердого тела с цилиндрической полостью, частично заполненной жидкостью. ПММ, 1956, т. 20, вып. 1.
7. Рабинович Б. И., Докучаев Л. В., Полякова З. М. О расчете коэффициентов уравнений возмущенного движения твердого тела с полостями, частично заполненными жидкостью. Космические исследования, 1965, т. 3, вып. 2.
8. Вауер Н. F. Treibstoffschwingungen in Raketenbehältern und ihr Einfluß auf die Gesamtstabilität. Z. Flugwissenschaften, 1964, № 3.
9. Жуковский Н. Е. О движении твердого тела, имеющего полости, заполненные однородной каплевой жидкостью. Собр. соч., т. II, Гостехиздат, 1949.
10. Колесников К. С. Колебания жидкости в цилиндрическом сосуде. Изд. МВТУ им. Баумана, 1964.