

## ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ В СЖИМАЕМОМ ГАЗЕ

Ю. Д. ШЕВЕЛЕВ

(Москва)

Уравнения пространственного ламинарного пограничного слоя в сжимаемом газе, записанные в произвольной криволинейной системе координат, нормально связанной с поверхностью, приведены к виду, напоминающему случай несжимаемой жидкости. Пользуясь схемой расчета, приведенной в работе [1], можно рассчитать течение в пространственном пограничном слое при наличии у рассматриваемого течения линии растекания. Основываясь на понятиях о зоне зависимости и зоне влияния, можно найти решение во всей области, начиная от линии растекания вплоть до «линии отрыва», если известны параметры внешнего потока. В качестве примера рассмотрен пограничный слой на эллипсоиде вращения под углом атаки в сжимаемом газе. При помощи предложенной конечно-разностной схемы находим величины сопротивления трения и потока тепла на эллипсоиде вращения с соотношением полуосей 1 : 1.5 : 1.5 под углом атаки ( $\alpha = 10^\circ, 15^\circ$ ), предположив, что вязкость связана линейно с температурой, газ совершенный, число Прандтля равно единице, температура стенки задана.

§ 1. Можно показать, что уравнения трехмерного пограничного слоя для случая сжимаемого газа в системе координат, нормально связанной с поверхностью, записанные в субтензорной (инвариантной относительно преобразования систем координат на поверхности) форме, имеют следующий вид:

$$u^\alpha u_{\beta,\alpha} + v \frac{\partial u_\beta}{\partial \xi} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x^\beta} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \mu \frac{\partial u_\beta}{\partial \xi} \right)$$

$$(\rho u^\alpha)_{,\alpha} + \partial \rho v / \partial \xi = 0, \quad \partial p / \partial \xi = 0 \quad (\alpha, \beta = 1, 2) \quad (1.1)$$

$$\rho u^\alpha \frac{\partial H}{\partial x^\alpha} + \rho v \frac{\partial H}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left\{ \frac{\mu}{\sigma} \left[ \frac{\partial H}{\partial \xi} + (\sigma - 1) \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{U^2}{2} \right] \right\}$$

или

$$\rho c_p u^\alpha \frac{\partial T}{\partial x^\alpha} + \rho c_p v \frac{\partial T}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) + \mu a_{\alpha\beta} \frac{\partial u^\alpha}{\partial \xi} \frac{\partial u^\beta}{\partial \xi} + u^\alpha \frac{\partial p}{\partial x^\alpha}$$

$$H = c_p T + \frac{1}{2} u^\alpha u_\alpha, \quad p = \rho R T$$

Здесь  $u^\alpha$  — контравариантные составляющие вектора скорости на поверхности;  $u_\alpha = g_{\alpha\beta} u^\beta$  — ковариантные составляющие вектора скорости;  $v$  — скорость, нормальная к поверхности; запятая обозначает ковариантное дифференцирование по поверхности,  $\rho$  — плотность,  $p$  — давление,  $\mu$  — вязкость,  $\lambda$  — коэффициент теплопроводности,  $c_p$  — удельная теплоемкость при постоянном давлении,  $\sigma$  — число Прандтля,  $T$  — температура,  $H$  — полная энтальпия. Причем

$$U^\alpha U_{\beta,\alpha} = -\rho e^{-1} \partial p / \partial x^\beta$$

где  $U^\alpha$  и  $U_\beta$  — контравариантные и ковариантные составляющие вектора скорости внешнего течения и

$$U^\alpha \partial H_e / \partial x^\alpha = 0, \quad \rho c_p U^\alpha \partial T_e / \partial x^\alpha = U^\alpha \partial p / \partial x^\alpha$$

Метрический тензор  $a_{\alpha\beta}(x^1, x^2) = g_{ij}(x^1, x^2, 0)$ , где  $i, j, \alpha, \beta = 1, 2$ .

Перейдем от субтензорной записи к обычным физическим координатам. Связь, согласно [2], выражается соотношениями  $u(i) = u^i \sqrt{g_{ii}}$  (по  $i$  не суммировать),  $u(i) = = g^{ij} u_j / \sqrt{g_{ii}}$  (по  $i$  не суммировать). Уравнения примут вид

$$\frac{u}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\omega}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial u}{\partial \eta} + v \frac{\partial u}{\partial \xi} + A_2 u^2 + A_2 \omega^2 + A_3 u \omega = \frac{A_4}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \mu \frac{\partial u}{\partial \xi} \right)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \xi} = 0 \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{u}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial \omega}{\partial \xi} + \frac{\omega}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial \omega}{\partial \eta} + v \frac{\partial \omega}{\partial \zeta} + B_1 u^2 + B_2 \omega^2 + B_3 u \omega &= \frac{B_4}{\rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \mu \frac{\partial \omega}{\partial \zeta} \right) \\ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \rho \sqrt{\frac{g}{g_{11}}} u \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \rho \sqrt{\frac{g}{g_{22}}} \omega \right) + \sqrt{g} \frac{\partial \rho v}{\partial \zeta} &= 0 \\ \frac{\rho u}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial H}{\partial \xi} + \frac{\rho \omega}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial H}{\partial \eta} + \rho v \frac{\partial H}{\partial \zeta} &= \frac{\partial}{\partial \zeta} \left\{ \frac{\mu}{\sigma} \left[ \frac{\partial H}{\partial \zeta} + (\sigma - 1) \frac{\partial U^2}{\partial \zeta} \right] \right\} \\ \rho c_p \left( \frac{u}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial T}{\partial \xi} + \frac{\omega}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial T}{\partial \eta} + v \frac{\partial T}{\partial \zeta} \right) &= \frac{\partial}{\partial \zeta} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial \zeta} \right) + \mu \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial \zeta} \right)^2 + \left( \frac{\partial \omega}{\partial \zeta} \right)^2 + \right. \\ &+ \left. 2 \cos \psi \frac{\partial u}{\partial \zeta} \frac{\partial \omega}{\partial \zeta} \right] + \frac{u}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial p}{\partial \xi} + \frac{\omega}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial p}{\partial \eta}, \quad \cos \psi = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11} g_{22}}}, \quad g = \det \| g_{\alpha\beta} \| \end{aligned}$$

Здесь  $u(1) = u$ ,  $u(2) = \omega$ ,  $v = v$  — физические составляющие вектора скорости (вместо  $x^1, x^2, x^3$  взяты соответственно  $\xi, \eta, \zeta$ ),  $\psi$  — угол между координатными линиями на поверхности,  $g_{\alpha\beta}$  — метрические коэффициенты,  $G^{\alpha\beta}$  — соответствующие алгебраические дополнения метрического тензора  $g_{\alpha\beta}$ . Коэффициенты  $A_1, A_2, A_3, A_4, B_1, B_2, B_3, B_4$  определяются геометрией поверхности и внешним течением. Они имеют такой же вид, как и в случае несжимаемой жидкости [1]. Граничные условия

$$\begin{aligned} u = v = \omega = 0, \quad H = H_0 \quad \text{или} \quad T = T_0 \quad \text{при} \quad \zeta = 0 \\ u = u_e, \quad \omega = \omega_e, \quad H = H_e = \text{const} \quad \text{или} \quad T = T_e(\xi, \eta) \quad \text{при} \quad \zeta \rightarrow \infty \end{aligned}$$

§ 2. Как известно, уравнения пограничного слоя в сжимаемом газе можно свести к виду, напоминающему случай несжимаемой жидкости, если воспользоваться преобразованием А. А. Дородницына. Сведем систему уравнений (1.2) к виду, удобному для численного интегрирования, при помощи следующей замены переменных:

$$u = u_e(\xi, \eta) E(\xi, \eta, \lambda), \quad \omega = \beta(\xi, \eta) u_e(\xi, \eta) [G(\xi, \eta, \lambda) + \varphi(\xi, \eta) E(\xi, \eta, \lambda)]$$

$$\begin{aligned} v_1 = \rho v + \frac{u}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial \zeta_1}{\partial \xi} + \frac{\omega}{\sqrt{g_{22}}} \frac{\partial \zeta_1}{\partial \eta} = \sqrt{\mu_e \rho_e u_e} \left[ K(\xi, \eta, \lambda) - \right. \\ \left. - \frac{\alpha}{\sqrt{g_{11}}} E \frac{\partial \lambda}{\partial \xi} - \frac{\alpha \beta}{\sqrt{g_{22}}} (G + \varphi E) \frac{\partial \lambda}{\partial \eta} \right] \\ \lambda = \left( \frac{u_e(\xi, \eta)}{\mu_e \rho_e \alpha(\xi, \eta)} \right)^{1/2} \int_0^{\zeta} \rho d\zeta, \quad \zeta_1 = \int_0^{\zeta} \rho d\zeta, \quad \varphi = \frac{\omega_e}{\beta u_e}, \quad H = H_e R(\xi, \eta, \lambda) \end{aligned}$$

После соответствующих преобразований система сводится к виду

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( l \frac{\partial E}{\partial \lambda} \right) &= K \frac{\partial E}{\partial \lambda} + N_1^* (E^2 - F) + N_2^* G^2 + N_3^* EG + \\ &+ N_4^* E \frac{\partial E}{\partial \xi} + N_5^* (G + \varphi E) \frac{\partial E}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( l \frac{\partial G}{\partial \lambda} \right) &= K \frac{\partial G}{\partial \lambda} + M_1^* (E^2 - F) + M_2^* G^2 + M_3^* EG + \\ &+ M_4^* E \frac{\partial G}{\partial \xi} + M_5^* (G + \varphi E) \frac{\partial G}{\partial \eta} \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \frac{l}{\sigma} \frac{\partial R}{\partial \lambda} \right) &= K \frac{\partial R}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial \lambda} \left\{ \frac{1 - \sigma}{\sigma} \frac{l}{k} \frac{\partial}{\partial \lambda} [E^2 + \beta^2 (G + \varphi E)^2 + \right. \\ &+ \left. 2\beta \cos \psi (G + \varphi E) E] \right\} + S_3^* E \frac{\partial R}{\partial \xi} + S_4^* (G + \varphi E) \frac{\partial R}{\partial \eta} \end{aligned}$$

$$\partial K / \partial \lambda = -P_1^* E - P_2^* G - P_3^* \partial E / \partial \xi - P_4^* \partial G / \partial \eta - \varphi P_4^* \partial E / \partial \eta$$

Граничные условия

$$\begin{aligned} E = G = K = 0, \quad R = R_0 \quad \text{при } \lambda = 0 \\ E \rightarrow 1, \quad G \rightarrow 0, \quad R \rightarrow 1 \quad \text{при } \lambda \rightarrow \infty \end{aligned}$$

Коэффициенты связаны соотношениями

$$\begin{aligned} N_1^* &= N_1 + \varphi N_3 + \varphi^2 N_2, \quad N_2^* = N_2, \quad N_3^* = N_3 + 2\varphi N_2 \\ M_1^* &= (M_1 - \varphi N_1) + \varphi(M_3 - \varphi N_3) + \varphi^2(M_2 - \varphi N_2) + N_4 \partial \varphi / \partial \xi + N_5 \varphi \partial \varphi / \partial \eta \\ M_2^* &= M_2 - \varphi N_2, \quad M_3^* = (M_3 - \varphi N_3) + 2\varphi(M_2 - \varphi N_2) + N_5 \partial \varphi / \partial \eta \\ P_1^* &= P_1 + \varphi P_2 + P_4 \partial \varphi / \partial \eta, \quad P_2^* = P_2, \\ N_4^* &= M_4^* = P_3^* = S_3^* = \alpha / \sqrt{g_{11}}, \quad N_5^* = M_5^* = P_4^* = S_4^* = \alpha \beta / \sqrt{g_{22}} \end{aligned}$$

$$N_1 = \frac{\alpha}{\sqrt{g_{11} u_e}} \frac{\partial u_e}{\partial \xi} + \alpha A_1, \quad N_2 = \alpha \beta^2 A_2$$

$$N_3 = \frac{\alpha \beta}{\sqrt{g_{22}}} \frac{1}{u_e} \frac{\partial u_e}{\partial \eta} + \alpha \beta A_3, \quad M_0 = -F \left( \frac{\alpha}{\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \frac{\alpha \beta}{\sqrt{g_{22}}} \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \right)$$

$$M_1 = \frac{\alpha}{\beta} B_1, \quad M_2 = \frac{\alpha}{\sqrt{g_{22} u_e}} \frac{\partial \beta u_e}{\partial \eta} + \alpha \beta B_2, \quad M_3 = \alpha B_3 + \frac{\alpha}{\sqrt{g_{11} \beta u_e}} \frac{\partial \beta u_e}{\partial \xi}$$

$$P_1 = \frac{\alpha}{\sqrt{g_{11} u_e}} \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \left( \frac{g}{g_{11}} \right)^{1/2} u_e \right] - \frac{1}{2 \sqrt{g_{11}}} \left( \frac{\alpha}{u_e} \frac{\partial u_e}{\partial \xi} - \frac{1}{\mu_e \rho_e} \frac{\partial \mu_e \rho_e \alpha}{\partial \xi} \right)$$

$$P_2 = \frac{\alpha}{\sqrt{g_{22} u_e}} \frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \beta \left( \frac{g}{g_{22}} \right)^{1/2} u_e \right] - \frac{\beta}{2 \sqrt{g_{22}}} \left( \frac{\alpha}{u_e} \frac{\partial u_e}{\partial \eta} - \frac{1}{\mu_e \rho_e} \frac{\partial \mu_e \rho_e \alpha}{\partial \eta} \right)$$

Полученную систему уравнений (2.1) с граничными условиями (2.2) сведем к такому виду, проинтегрировав уравнение неразрывности и положив  $E = f_\lambda'(\xi, \eta, \lambda)$  и  $G = g_\lambda'(\xi, \eta, \lambda)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( l \frac{\partial^2 f}{\partial \lambda^2} \right) &= -(P_1^* f + P_2^* g) \frac{\partial^2 f}{\partial \lambda^2} + N_1^* \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial \lambda} \right)^2 - \frac{\rho_e}{\rho} \right] + \\ &+ N_2^* \left( \frac{\partial g}{\partial \lambda} \right)^2 + N_3^* \frac{\partial f}{\partial \lambda} \frac{\partial g}{\partial \lambda} + N_4^* \left[ \frac{\partial f}{\partial \lambda} \frac{\partial^2 f}{\partial \lambda \partial \xi} - \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial^2 f}{\partial \lambda^2} \right] + \\ &+ N_5^* \left[ \frac{\partial}{\partial \lambda} (g + \varphi f) \frac{\partial^2 f}{\partial \lambda \partial \eta} - \frac{\partial}{\partial \eta} (g + \varphi f) \frac{\partial^2 f}{\partial \lambda^2} \right] \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( l \frac{\partial^2 g}{\partial \lambda^2} \right) &= -(P_1^* f + P_2^* g) \frac{\partial^2 g}{\partial \lambda^2} + M_1^* \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial \lambda} \right)^2 - \frac{\rho_e}{\rho} \right] + \\ &+ M_2^* \left( \frac{\partial g}{\partial \lambda} \right)^2 + M_3^* \frac{\partial f}{\partial \lambda} \frac{\partial g}{\partial \lambda} + M_4^* \left[ \frac{\partial f}{\partial \lambda} \frac{\partial^2 g}{\partial \lambda \partial \xi} - \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial^2 g}{\partial \lambda^2} \right] + \\ &+ M_5^* \left[ \frac{\partial}{\partial \lambda} (g + \varphi f) \frac{\partial^2 g}{\partial \lambda \partial \eta} - \frac{\partial}{\partial \eta} (g + \varphi f) \frac{\partial^2 g}{\partial \lambda^2} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \frac{l}{\sigma} \frac{\partial R}{\partial \lambda} \right) &= -(P_1^* f + P_2^* g) \frac{\partial R}{\partial \lambda} + \frac{\partial}{\partial \lambda} \left\{ \frac{1 - \sigma}{\sigma} \frac{l}{k} \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[ \left( \frac{\partial f}{\partial \lambda} \right)^2 + \right. \right. \\ &+ \beta^2 \left. \left. \left[ \frac{\partial}{\partial \lambda} (g + \varphi f) \right]^2 + 2\beta \cos \psi \frac{\partial f}{\partial \lambda} \frac{\partial}{\partial \lambda} (g + \varphi f) \right] \right\} + S_3^* \left[ \frac{\partial f}{\partial \lambda} \frac{\partial R}{\partial \xi} - \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\partial R}{\partial \lambda} \right] + \\ &+ S_4^* \left[ \frac{\partial}{\partial \lambda} (g + \varphi f) \frac{\partial R}{\partial \eta} - \frac{\partial}{\partial \eta} (g + \varphi f) \frac{\partial R}{\partial \lambda} \right] \end{aligned}$$

с граничными условиями

$$j = g = f_{\lambda'} = g_{\lambda'} = 0, \quad R = R_0, \quad \text{при } \lambda = 0 \\ f_{\lambda'} \rightarrow 1, \quad g_{\lambda'} \rightarrow 0, \quad R \rightarrow 1 \quad \text{при } \lambda \rightarrow \infty$$

Функции  $l, F, k$  имеют вид

$$l = \frac{\mu\rho}{\mu_e\rho_e}, \quad F = \frac{\rho_e}{\rho} = \frac{T}{T_c}, \quad k = \frac{1}{2}(1 + 2\beta\varphi \cos\psi + \varphi^2) \frac{1 + 1/2(\gamma - 1)M_e^2}{1/2(\gamma - 1)M_e^2}$$

§ 3. Рассмотрим гладкое тело  $S$  в потоке жидкости или газа. Возмущения, возникшие в некоторой точке внутри пограничного слоя, распространяются вдоль линий тока и накапливаются около сгущений линий тока и около «линий отрыва», т. е. вблизи огибающей предельных линий тока. Одновременно эти возмущения распространяются вдоль нормали к телу. В плоскости  $\xi, \eta$  линии тока, проходящие через нормаль к поверхности, разворачиваются внутри угла, стороны которого связаны с линиями тока внешнего течения и предельными линиями тока на поверхности. Если у рассматриваемого течения имеется линия растекания, то, двигаясь от этой линии с учетом зоны зависимости и влияния, можно найти решение во всей области вплоть до «линии отрыва», если известны параметры внешнего потока. Сложнее обстоит дело, если зоны влияния от разных линий растекания пересекаются. Возможен случай вязкого взаимодействия пространственных профилей скорости от разных линий растекания, ведущий к образованию и зарождению в пограничном слое вихрей. В общем случае расчет пространственного пограничного слоя следует начинать с отыскания критической точки и плоских геодезических линий, проходящих через критическую точку.

Предположим, что удалось найти такую систему координат с началом в критической точке и линией  $\eta = 0$ , совпадающей с линией тока внешнего течения и плоской геодезической линией на поверхности, что

$$u_e \sim \xi, \quad \omega_e \sim \xi\eta, \quad \sqrt{g_{11}} \sim C, \quad \sqrt{g_{22}} \sim \xi, \quad g_{12} \sim \xi\eta.$$

При таком выборе системы координат на поверхности особенности, возникающие в критической точке и критической линии, легко устранимы, и уравнения локально сводятся к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Изучая свойства дифференциальных уравнений, метрических коэффициентов и компонент скорости при переходе от одной системы координат на поверхности к другой, можно показать, что система уравнений с частными производными сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений в критической точке неоднозначно. Будем выбирать систему координат на поверхности так же, как выбирали в случае несжимаемой жидкости [1]. Одна из координат при этом совпадала с потенциалом скорости. В качестве другой системы координат на поверхности можно предложить сферическую систему координат. Выделение линий растекания позволяет построить решение, начиная от этих линий. Если линия растекания не совпадает с линией симметрии, то необходимо искать плоские геодезические линии на поверхности, для которых выполняется теорема о вторичных течениях. Пусть решение известно в некоторой точке  $\xi_0, \eta_0$  вдоль линии  $\lambda$ . Строим решение вблизи  $\xi_0, \eta_0$ , наблюдая за поведением линий тока внутри пограничного слоя, а затем, используя концепцию о зоне зависимости и зоне влияния, — во всей области.

§ 4. Рассмотрим расчет пространственного пограничного слоя на эллипсоиде вращения под углом атаки (фиг. 1). Течение в пограничном слое определяется геометрией поверхности и параметрами внешнего течения. Внешнее течение известно из работы [3].

Результаты численных расчетов работы [3] аппроксимируем в системе координат  $\theta, \psi$  в виде полиномов, где  $\theta$  и  $\psi$  — обычная сферическая система координат с возможным сдвигом начала координат вдоль осей. Эта система координат связана с прямоугольной декартовой системой координат  $y^1, y^2, y^3$  следующим образом:

$$x^{*1} = \theta = \arccos\left(-\frac{y^1}{((y^1)^2 + (y^2 - y_0)^2 + (y^3)^2)^{1/2}}\right) \\ x^{*2} = \psi = \arccos\left(-\frac{y^3}{y^2 - y_0}\right), \quad x^{*3} = r = ((y^1)^2 + (y^2 - y_0)^2 + (y^3)^2)^{1/2}$$

Метрические коэффициенты в исходной системе координат выражаются следующим образом:

$$g_{11}^* = r^2 + r_0^2, \quad g_{12}^* = r_0 r_\psi, \quad g_{22}^* = r^2 \sin^2 \theta + r_\psi^2$$

Здесь  $r = r(\theta, \psi)$  находится из уравнения

$$Pr^2 + Qr + S = 0$$

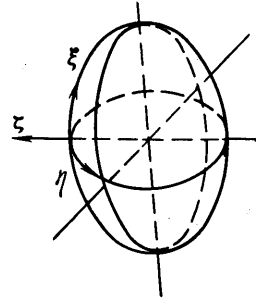
$$P = \frac{\cos^2 \theta}{a^2} + \frac{\sin^2 \theta \cos^2 \psi}{b^2} + \frac{\sin^2 \theta \sin^2 \psi}{c^2}, \quad Q = -2 \frac{\sin \theta \cos \psi y_0}{b^2}, \quad S = \frac{y_0^2}{b^2} - 1$$

Здесь  $a, b, c$  — главные полуоси эллипсоида,  $y_0$  — постоянная сдвига.

Получив распределение давления, плотности и компонент скорости в виде полиномов по  $\theta, \psi$ , проводим пересчет параметров внешнего потока в искомую систему координат  $\xi, \eta$ , связанную с прямоугольной системой координат соотношениями

$$x^1 = \xi = \arccos \left( -\frac{py^1 + qy^2}{l} \right)$$

$$x^2 = \eta = \arctg \frac{y^3}{c(ap y^2/bl - bq y^4/al)}$$



Фиг. 1

Здесь,  $p, q$  — постоянные, связанные с внешним течением

$$l = \sqrt{a^2 p^2 + b^2 q^2}$$

Метрические коэффициенты в системе координат  $\xi, \eta$  запишутся следующим образом:

$$g_{11} = \gamma^2 + (\gamma_1^2 - \gamma^2) \sin^2 \xi + 2\gamma_4^2 \sin \xi \cos \xi \cos \eta$$

$$g_{22} = \sin^2 \xi (\gamma_2^2 \sin^2 \eta + \gamma_3^2 \cos^2 \eta)$$

$$g_{12} = \sin \xi \sin \eta [(\gamma_3^2 - \gamma_2^2) \cos \xi \cos \eta - \gamma_4^2 \sin \xi]$$

$$\gamma^2 = \gamma_2^2 \cos^2 \eta + \gamma_3^2 \sin^2 \eta, \quad \gamma_1^2 = \frac{a^4 p^2 + b^4 q^2}{l^2}$$

$$\gamma_2^2 = \frac{a^2 b^2 (p^2 + q^2)}{l^2}, \quad \gamma_3^2 = c^2, \quad \gamma_4^2 = \frac{abpq}{l^2} (b^2 - a^2)$$

Для заданного набора значений  $\xi_i, \eta_k$  находим соответствующие значения  $\theta_i, \psi_k$ , и по значениям независимых переменных находим значения функций в заданных точках. Затем аппроксимируем значения параметров потока, полученных в старой системе координат, в виде полиномов по  $\xi$  и  $\eta$ . Составляющие скорости при переходе от одной системы координат на поверхности к другой связаны известными соотношениями

$$U(\alpha) = \left( \frac{g_{\alpha\alpha}}{g_{\beta\beta}^*} \right)^{1/2} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\beta*}} U^*(\beta), \quad (\text{по } \alpha \text{ не суммировать})$$

$$U(\alpha) = \sqrt{g_{\alpha\alpha} g^{\alpha\beta}} \frac{\partial x^{\alpha\gamma}}{\partial x^{\beta}} \left( g_{\gamma\delta}^* \frac{U^*(\delta)}{\sqrt{g_{\delta\delta}^*}} \right)$$

Здесь  $x^\alpha$  — новая система координат, а  $x^{\beta*}$  — старая система координат. Значения метрических коэффициентов и компонент скорости в старой системе координат известны, поэтому нетрудно найти составляющие скорости в новой системе координат. Полученные результаты окончательно аппроксимируем в виде полиномов по  $\xi$  и  $\eta$  выражениями

$$p_e = p_0 + \alpha_1(\eta)\xi + \alpha_2(\eta)\xi^2 + \alpha_3(\eta)\xi^3 + \dots$$

$$\rho_e = \rho_0 + \beta_1(\eta)\xi + \beta_2(\eta)\xi^2 + \beta_3(\eta)\xi^3 + \dots$$

$$u_e = \gamma_1(\eta)\xi + \gamma_2(\eta)\xi^2 + \gamma_3(\eta)\xi^3 + \gamma_4(\eta)\xi^4 + \dots$$

$$\omega_e = \xi \sin \eta (\delta_1(\eta) + \delta_2(\eta)\xi + \delta_3(\eta)\xi^2 + \delta_4(\eta)\xi^3 + \dots)$$

Причем

$$\alpha_1(\eta), \alpha_2(\eta), \alpha_3(\eta), \dots, \beta_1(\eta), \beta_2(\eta), \beta_3(\eta), \dots, \gamma_1(\eta), \gamma_2(\eta), \dots, \delta_1(\eta), \delta_2(\eta) \dots$$

— полиномы по  $\eta$ .

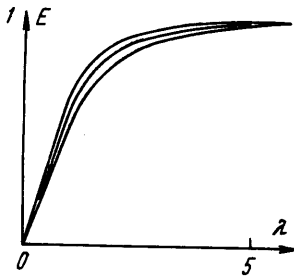
§ 5. Расчет течения сжимаемого газа в ламинарном пограничном слое был проведен на основе линейной зависимости вязкости от температуры, величина  $\mu$  поперек пограничного слоя меняется мало, газ совершенный, число Прандтля равно единице, температуру стенки считаем известной. Система уравнений пограничного слоя в сжимаемом газе (2.1) при  $\sigma = 1$  сводится к системе уравнений вида

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 E}{\partial \lambda^2} &= K \frac{\partial E}{\partial \lambda} + N_1^*(E^2 - F) + N_2^*G^2 + N_3^*EG + N_4^*E \frac{\partial E}{\partial \xi} + N_5^*(G + \Phi E) \frac{\partial E}{\partial \eta} \\ \frac{\partial^2 G}{\partial \lambda^2} &= K \frac{\partial G}{\partial \lambda} + M_1^*(E^2 - F) + M_2^*G^2 + M_3^*EG + N_4^*E \frac{\partial G}{\partial \xi} + N_5^*(G + \Phi E) \frac{\partial G}{\partial \eta} \\ \frac{\partial^2 R}{\partial \lambda^2} &= K \frac{\partial R}{\partial \lambda} + S_3^*E \frac{\partial R}{\partial \xi} + S_4^*(G + \Phi E) \frac{\partial R}{\partial \eta} \\ \frac{\partial K}{\partial \lambda} &= -P_1^*E - P_2^*G - P_3^* \frac{\partial E}{\partial \xi} - P_4^* \frac{\partial G}{\partial \eta} - \Phi P_4^* \frac{\partial E}{\partial \eta} \end{aligned} \quad (5.1)$$

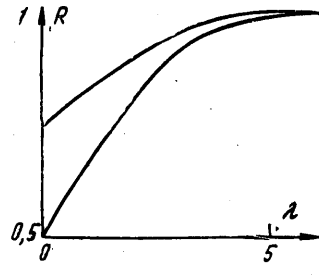
с граничными условиями

$$E = G = K = 0, \quad R = R_0 \quad \text{при } \lambda = 0; \quad E \rightarrow 1, \quad G \rightarrow 0, \quad R \rightarrow 1 \quad \text{при } \lambda \rightarrow \infty$$

Заметим, что при числе Прандтля, равном единице, преобразованное уравнение энергии системы уравнений допускает особое решение —  $R = \text{const}$ . Это решение бу-



Фиг. 2



Фиг. 3

дет пригодным, если  $R_0 = 1$ . При небольшом изменении температуры в пограничном слое, по сравнению с абсолютной температурой, изменение плотности также мало, и уравнения напоминают случай несжимаемой жидкости.

Поток тепла к телу вычисляется по формуле

$$q_w = -\lambda \partial T / \partial \zeta |_{\zeta=0}$$

Компоненты трения на поверхности имеют такие составляющие:

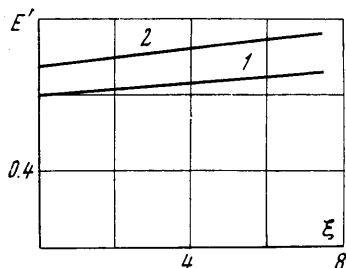
$$\sigma_{(3\alpha)} = \mu \frac{g_{\alpha\beta}}{\sqrt{g_{\alpha\alpha}g_{\beta\beta}}} \frac{\partial}{\partial \zeta} u(\beta) \Big|_{\zeta=0}$$

где  $u(1) = u$ ,  $u(2) = \omega$  — физические составляющие вектора скорости ( $\alpha, \beta = 1, 2$ ).

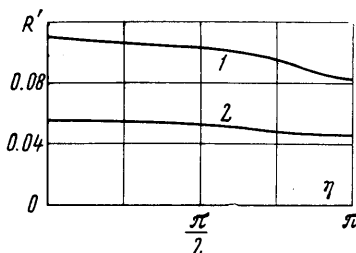
При расчете пространственного пограничного слоя оказались удобными невязные разностные схемы при двухслойной и однослойной аппроксимациях производных по  $\xi$  и  $\eta$  или аппроксимации производных в половинных узлах. Двухслойные аппроксимации неудобны тем, что требуется больший объем памяти машины, зато шаг по каждому из независимых направлений берется сравнительно большим. Использование двухслойной аппроксимации в одном из направлений при однослойной аппроксимации в другом позволяет построить оптимальную разностную схему. Решение задачи начинали с определения параметров внешнего течения и значения коэффициентов, входящих в систему уравнений. Начальные данные получаются из решения системы уравнений (5.1) при  $\xi = \eta = 0$  методом прогонки. Шаг в направлении  $\xi$  выбирали постоянным, а в направлении  $\eta$  — переменным. В каждой расчетной точке находили угол расхождения между линией тока внешнего течения и линией тока на поверхности в исходной и преобразованной системах координат.

На фиг. 2—5 приведены результаты численного расчета пограничного слоя на эллипсоиде вращения с соотношением полуосей 1:1.5:1.5 под углом атаки  $\alpha = 10^\circ$ ,

15° ( $M_\infty = 3$ ). Типичные профили продольной составляющей скорости и энтальпии показаны на фиг. 2—3. Изменение  $E_{\lambda=0}'$  вдоль  $\xi$  приведено на фиг. 4 (кривая 1 соответствует  $\alpha = 10^\circ$ ,  $R_0 = 0.5$ ; кривая 2 соответствует случаю  $\alpha = 10^\circ$ ,  $R_0 = 0.75$ ). Изменение  $R_{\lambda=0}'$  вдоль  $\eta$  при  $\xi = n\Delta\xi$  ( $n = 5$ ) показано на фиг. 5. Профили энтальпии оказались подобными вдоль  $\xi$  в расчетной области, которая была ограничена имеющимися в наличии данными о внешнем течении.



Фиг. 4



Фиг. 5

Приведем, например, результаты численных расчетов величины  $E_{\lambda=0}'$ , пропорциональной значению трения на стенке, для эллипсоида с соотношением полуосей 1 : 1.5 : 1.5 под углом атаки  $\alpha = 15^\circ$ ,  $M_\infty = 4$  при  $\eta = 1/2\pi$  вдоль  $\xi = n\Delta\xi$

$n =$	0	1	2	3	4	5	6	7	
$E' =$	0.782	0.794	0.804	0.813	0.822	0.834	0.847	0.863	( $\lambda=0$ )

Составленная программа позволяет рассчитать течение около эллипсоида вращения с произвольным соотношением полуосей под углом атаки, если известны параметры внешнего потока.

Поступило 19 IV 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Шевелев Ю. Д. Численный расчет пространственного пограничного слоя в несжимаемой жидкости, Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 5.
2. Friedell S. The physical components of vectors and tensors. Z. angew. Math. und Mech, 1953, В. 33, № 10/11.
3. Тияков Г. Г. Исследование трехмерного сверхзвукового обтекания эллипсоидов вращения. Изв. АН СССР, МЖГ, 1965, № 6.

МАЛЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЖИДКОСТИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ СОСУДЕ С ПЕРЕГОРОДКАМИ

К. С. КОЛЕСНИКОВ, В. Е. САМОДАЕВ

(Москва)

Уравнения движения твердого тела, полость которого частично заполнена идеальной жидкостью, получены в работах Н. Н. Моисеева [1, 2, 3], Д. Е. Охочимского [4], Г. С. Нариманова [5], Б. И. Рабиновича [6]. Для полости в виде кругового цилиндра или двух concentрических цилиндров вычислены все коэффициенты уравнений.

Задача о движении жидкости в цилиндрической полости с перегородками рассматривалась Б. И. Рабиновичем [7]. Она рассматривалась также Бауэром [8], который проанализировал частный случай движения сосуда в плоскости одной из перегородок.

Ниже рассмотрено плоское движение цилиндра с радиальными и кольцевыми перегородками и дано определение потенциала скоростей в случае произвольного положения радиальных перегородок по отношению к плоскости движения. Получены формулы для определения параметров механического аналога волновых колебаний, состоящего из двух подсистем математических маятников.