

О СВЕРХЗВУКОВОМ ПРОСТРАНСТВЕННОМ ОБТЕКАНИИ ТРЕУГОЛЬНОГО КРЫЛА С ПРИТУПЛЕННЫМИ КРОМКАМИ

К. М. МАГОМЕДОВ, А. С. ХОЛОДОВ

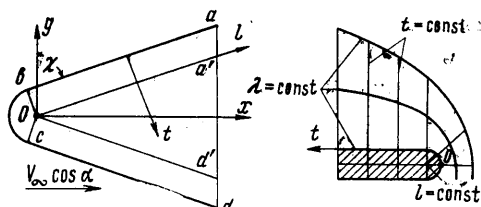
(Москва)

Рассматривается задача установившегося обтекания невязким, нетеплопроводным газом под углом атаки треугольной в плане пластины, притупленной в носке по сфере, а на кромках — по цилиндру.

Исследованию данной задачи посвящен ряд экспериментальных и теоретических работ, из которых можно указать, например, [1-4]. Ниже методом характеристик для прехмерных течений газа по схеме, предложенной в [5], рассчитаны поля течения около таких тел при числах Маха набегающего потока $M = 6, 7, 8$ и ∞ , угле стреловидности $\chi = 70^\circ$ и углах атаки α от 0 до 15° .

1. Для углов стреловидности χ и углов атаки α таких, что линия сопряжения сферы с пластиной полностью лежит в сверхзвуковой области течения, можно, очевидно, задавшись значениями газодинамических параметров на некоторой плоскости $x = \text{const}$ из соответствующего решения для сферы, найти все поле течения вниз по потоку, например методом [5]. Течение около таких тел существенно различно в разных областях, например, в окрестности носка и кромок оно близко к осесимметричному, тогда как в окрестности плоской части крыла трехмерное движение близко к полю двумерного течения.

Поэтому, в соответствии с природой течения, была выбрана криволинейная ортогональная система координат $\{l, r, t\}$, как показано на фиг. 1, т. е. цилиндрическая — в области кромки ($abcd$) и декартова — на плоской части крыла ($a'od'$).

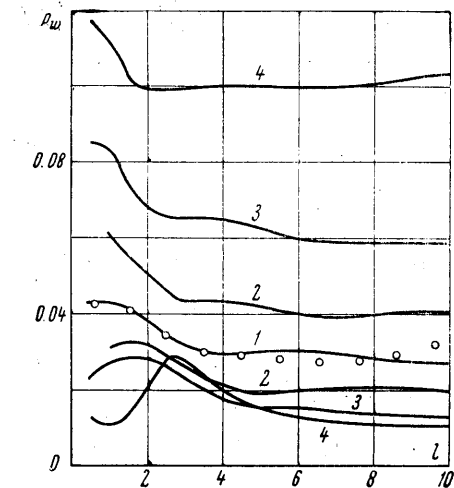


Фиг. 1. Форма тела

В этой системе координат при $l \ge 0$ и $|t| \le l \text{ctg } \chi + \frac{1}{2}l$ уравнение поверхности имеет вид $r = r_w \equiv 1$.

В предварительных расчетах использовалась обычная цилиндрическая система координат с продольной осью x , направленной вдоль оси тела. Расчеты в чисто цилиндрической системе координат показали, что на плоской части крыла вблизи тела точность теряется при больших x (фиг. 2).

Вывод основных соотношений применяемого здесь метода достаточно подробно изложен в [5], поэтому здесь приводится только его часть, связанная с введением новой системы координат. Представим вектор скорости $V = \{u, v, w\}$ (в системе координат l, r, t) в виде $V = V \{\cos \beta \cos \gamma, \sin \beta \cos \gamma, \sin \gamma\}$. В качестве искомого функций выберем два угла вектора скорости β и γ , давление p , отнесенное к величине $\rho_\infty V_\infty^2$ (где V_∞ и ρ_∞ — скорость и плотность набегающего потока), и энтальпию h , отнесенную к V_∞^2 , тогда уравнения установившегося движения газа можно приве-



Фиг. 2. Распределение давления на линии $y = 0$. Кривые 1-4 соответствуют $\alpha = 0, 5, 10$ и 15° ; точки — расчет в цилиндрической системе координат

сти к виду (линейные размеры отнесены к радиусу затупления)

$$\cos \gamma k_2 \nabla \beta + k_3 \nabla \gamma + \frac{M^2 - 1}{\rho V^2} k_1 \nabla p = -f_0, \quad \cos \gamma k_1 \nabla \beta + \frac{1}{\rho V^2} k_2 \nabla p = f_1 \sin \beta - f_2 \cos \beta$$

$$k_1 \nabla \gamma + \frac{1}{\rho V^2} k_3 \nabla p = f_1 \cos \beta \sin \gamma + f_2 \sin \beta \sin \gamma - f_3 \cos \gamma \quad (1.1)$$

$$k_1 \nabla I - \frac{k_1 \nabla P}{\Lambda} = 0 \quad (I = \ln h, \quad P = \ln p)$$

Здесь Λ , ρV^2 и M — функции r и h ; единичные векторы

$$\mathbf{k}_1 = \frac{\mathbf{V}}{V}, \quad \mathbf{k}_2 = \frac{1}{\cos \gamma} \frac{\partial \mathbf{k}_1}{\partial \beta}, \quad \mathbf{k}_3 = \frac{\partial \mathbf{k}_1}{\partial \gamma}$$

образуют местную декартову систему координат, связанную с вектором скорости; $\mathbf{k}_j \nabla \varphi$ — производная в направлении \mathbf{k}_j . Вид функции f_m зависит от выбора системы координат

$$f_0 = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\cos \beta \cos \gamma \frac{\partial(H_2 H_3)}{\partial l} + \sin \beta \cos \gamma \frac{\partial(H_3 H_1)}{\partial r} + \sin \gamma \frac{\partial(H_1 H_2)}{\partial t} \right] \quad (1.2)$$

$$f_1 = \frac{\sin \beta \cos^2 \beta \cos^2 \gamma}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial r} + \frac{\sin \gamma \cos \beta \cos \gamma}{H_3 H_1} \frac{\partial H_1}{\partial t} - \frac{\sin^2 \beta \cos^2 \gamma}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial l} - \frac{\sin^2 \gamma}{H_3 H_1} \frac{\partial H_3}{\partial l}$$

$$f_2 = \frac{\sin \beta \sin \gamma \cos \gamma}{H_2 H_3} \frac{\partial H_2}{\partial t} + \frac{\sin \gamma \cos^2 \beta \cos \gamma}{H_1 H_2} \frac{\partial H_2}{\partial l} - \frac{\sin^2 \gamma}{H_2 H_3} \frac{\partial H_3}{\partial r} - \frac{\cos^2 \beta \cos^2 \gamma}{H_1 H_2} \frac{\partial H_1}{\partial r}$$

$$f_3 = \frac{\sin \gamma \cos \beta \cos \gamma}{H_3 H_1} \frac{\partial H_3}{\partial l} + \frac{\sin \beta \sin \gamma \cos \gamma}{H_2 H_3} \frac{\partial H_3}{\partial r} - \frac{\cos^2 \beta \cos^2 \gamma}{H_3 H_1} \frac{\partial H_1}{\partial t} - \frac{\sin^2 \beta \cos^2 \gamma}{H_2 H_3} \frac{\partial H_2}{\partial t}$$

Здесь H_j — известные коэффициенты Ламэ.

Перейдем в фиксированной точке A (как это делается в [5]) в уравнениях (1.1) к характеристической форме. Введем обозначения

$$\eta = \operatorname{tg} \beta \quad \zeta = \operatorname{tg} \gamma, \quad Q = \sqrt{M^2 - 1} / \rho V^2, \quad \theta = 1 / \sqrt{M^2 - 1}$$

Выбирая соответствующим образом линию тока и четыре бихарактеристики и заменяя дифференциальные соотношения разностными, можно получить расчетные формулы метода в виде

$$\eta(A) + a_i p(A) = \Sigma_i \quad (i = 1, 2)$$

$$\zeta(A) = \zeta_0 - (1 + \zeta^2) [F_2 H_1 \Delta l \sqrt{(1 + \eta^2)(1 + \zeta^2)} - 1/2 Q L(p)] \quad (1.3)$$

$$h(A) = \exp I(A), \quad I(A) = I_0 + \Lambda^{-1} [P(A) - P_0]$$

Здесь

$$a_i = (-1)^i Q (1 + \eta^2) \sqrt{1 + \zeta^2}, \quad b_i = - \frac{F_{1i} (1 + \zeta^2) (1 + \eta^2)^{3/2} (1 + \theta^2)^{1/2} H_1 \Delta l}{1 - (-1)^i \eta \theta \sqrt{1 + \zeta^2}}$$

$$c_i = - \frac{(-1)^i L(\zeta) (1 + \eta^2)}{2 \sqrt{1 + \zeta^2} [1 - (-1)^i \theta \eta \sqrt{1 + \zeta^2}]} \quad (1.4)$$

$$\Sigma_i = \eta_i + a_i p_i - (b_i + c_i), \quad L(\varphi) = \varphi_4 - \varphi_3 - \theta \zeta [\varphi_4 + \varphi_3 - 2\varphi(A)]$$

$$F_2 = \frac{1}{\sqrt{(1 + \eta^2)(1 + \zeta^2)}} (\zeta f_1 + \eta \zeta f_2 - \sqrt{1 + \eta^2} f_3)$$

$$F_{1i} = \frac{1}{\sqrt{(1 + \eta^2)(1 + \theta^2)}} (\eta f_1 - f_2) - (-1)^i \frac{\theta f_0}{\sqrt{1 + \theta^2}} \quad (i = 1, 2)$$

Здесь параметры в точке A — искомые, с индексом i ($i = 0, 1, 2, 3, 4$) — в точках пересечения i бихарактеристики и линии тока с плоскостью начальных данных, без индексов — средние на линиях iA .

Координаты точек пересечения i бихарактеристики и линии тока с плоскостью начальных данных будут

$$l_i = l(A) - \Delta l, \quad r_i = r(A) + \Delta r_i, \quad t_i = t(A) + \Delta t_i \quad (i = 0, 1, 2, 3, 4) \quad (1.5)$$

В выражения (1.5) введены следующие обозначения

$$\Delta r_i = -\frac{H_1 [\eta + (-1)^i \theta \sqrt{1 + \zeta^2}] \Delta l}{H_2 [1 - (-1)^i \theta \eta \sqrt{1 + \zeta^2}]}, \quad \Delta t_i = -\frac{H_1 \zeta \sqrt{1 + \eta^2} \Delta l}{H_3 [1 - (-1)^i \theta \eta \sqrt{1 + \zeta^2}]} \quad (i = 1, 2)$$

$$\Delta r_i = -\frac{H_1 \eta \Delta l}{H_2}, \quad \Delta t_i = -\frac{H_1 \sqrt{1 + \eta^2} [\zeta + (-1)^i \theta] \Delta l}{H_3 [1 - (-1)^i \theta \zeta]} \quad (i = 3, 4)$$

$$\Delta r_0 = -\frac{H_1 \eta \Delta l}{H_2}, \quad \Delta t_0 = -\frac{H_1 \zeta \sqrt{1 + \eta^2} \Delta l}{H_3}$$

Введем систему координат l, r, t , как показано на фиг. 1.

На плоской части крыла ($|t| > 1/2\pi$)

$$x = l \sin \chi + (|t| - 1/2\pi) \cos \chi, \quad y = l \cos \chi - (|t| - 1/2\pi) \sin \chi, \quad z = rt / |t| \quad (1.6)$$

На кромке ($|t| \leq 1/2\pi$)

$$x = l \sin \chi - r \cos \chi \cos t, \quad y = l \cos \chi + r \sin \chi \cos t, \quad z = r \sin t$$

В этой системе координат имеем

$$H_1 = H_2 = 1, \quad H_3 = 1 \quad \text{при } |t| > 1/2\pi; \quad H_3 = r \quad \text{при } |t| \leq 1/2\pi$$

$$\frac{\partial H_j}{\partial l} = \frac{\partial H_j}{\partial r} = \frac{\partial H_j}{\partial t} = 0 \quad (j = 1, 2), \quad \frac{\partial H_3}{\partial l} = \frac{\partial H_3}{\partial t} = 0$$

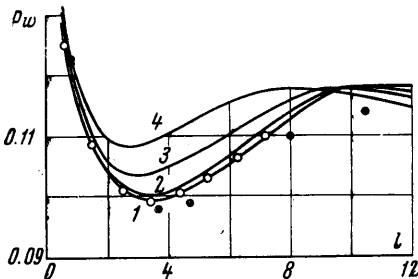
$$\frac{\partial H_3}{\partial r} = 0 \quad \text{при } |t| > 1/2\pi, \quad \frac{\partial H_3}{\partial r} = 1 \quad \text{при } |t| \leq 1/2\pi$$

$$F_{1i} = \frac{1}{H_3 \sqrt{(1 + \eta^2)(1 + \zeta^2)(1 + \theta^2)}} \left[\frac{\zeta^2}{\sqrt{1 + \zeta^2}} - (-1)^i \theta \eta \right] \frac{\partial H_3}{\partial r} \quad (i = 1, 2)$$

$$F_2 = \frac{\eta}{H_3 \sqrt{(1 + \eta^2)(1 + \zeta^2)}} \frac{\partial H_3}{\partial r}$$

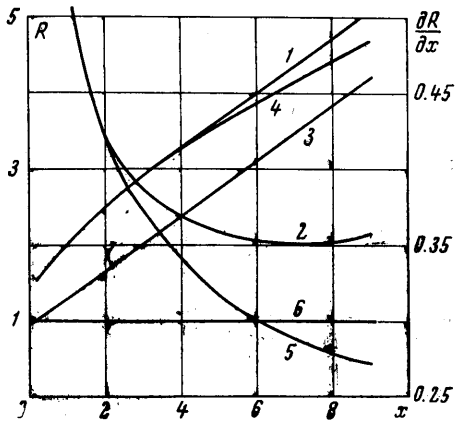
Для обратного метода, используемого здесь, схема решения элементарных задач (внутренняя точка, точка ударной волны и тела) аналогична применяемой в [3].

Программа, составленная для ЭЦВМ, позволяет учитывать равновесные физико-химические превращения.



Фиг. 3

Фиг. 3. Распределение давления на кромке. Кривые 1—4 соответствуют $\alpha = 0, 5, 10, 15^\circ$; светлые точки—расчет в цилиндрической системе координат; темные точки—эксперимент [3] при $M = 7, \alpha = 0^\circ, \chi = 70^\circ, x = 1.4$

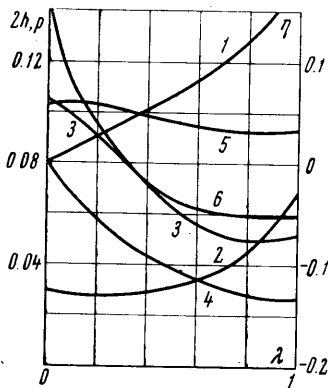


Фиг. 4

Фиг. 4. Параметры ударной волны вдоль линий симметрии крыла. Кривые 1—3 соответствуют $R, \partial R / \partial x$ и форме тела на кромке; кривые 4—6—те же параметры в плоскости $y = 0$

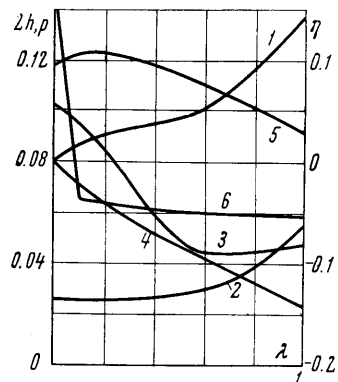
2. Расчеты проводились при значениях числа Маха набегающего потока воздуха ($\chi = 1.4$) $M = 6, 7, 8$ и ∞ , угла стреловидности $\chi = 70^\circ$ и углов атаки α от 0° до 15° . На фиг. 2—9 представлена часть результатов для случая $M = 6$, $\chi = 70^\circ$.

На фиг. 2, 3 дано распределение давления на теле в плоскостях симметрии крыла для различных условий обтекания. При одинаковом угле атаки α верхние кривые относятся к наветренной стороне, нижние — к подветренной. Видно, что на кромке распределение давления напоминает характер распределения p_w на затупленном конусе, но уже на расстояниях порядка $l = 10$ при нулевом угле атаки кривая выходит на асимптотическое значение давления на бесконечном скошенном цилиндре. Сравнивая расчеты для случая $M = 6$, $\chi = 70^\circ$, $\alpha = 0^\circ$ (фиг. 2, 3) в различных системах координат, видно, что если вблизи носка и на кромке выбор системы координат практически не влияет на результаты, то на плоской части крыла при больших l имеется заметное отличие в p_w , что, по-видимому, объясняется падением точности решения в чисто цилиндрической системе координат, так как с ростом l течение на плоской



Фиг. 5

Фиг. 5. Профили параметров течения $l = 5$, $\alpha = 0^\circ$. Кривые 1—3 соответствуют η , p , h , на луче $l = \text{const}$, $y = 0$; кривые 4—6 — те же параметры на луче $l = \text{const}$, $z = 0$



Фиг. 6

Фиг. 6. Профили параметров течения $l = 10$, $\alpha = 0^\circ$. Кривые 1—3 соответствуют η , p , h на луче $l = \text{const}$, $y = 0$; кривые 4—6 — те же параметры на луче $l = \text{const}$, $z = 0$

части все более стремится к двумерному (особенно вблизи тела), а цилиндрическая система координат для такого течения не является оптимальной.

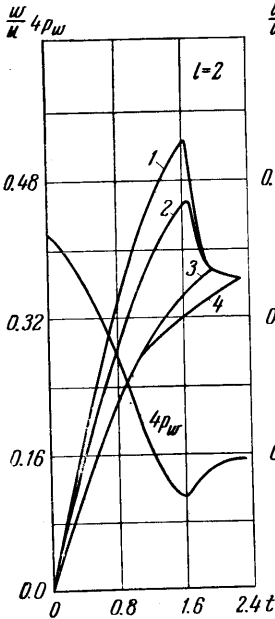
Форма ударной волны $R(x)$, приведенная на фиг. 4, показывает, что при нулевых углах атаки, примерно до $l = 5$ (для $M = 6$, $\chi = 70^\circ$), она остается осесимметричной и соответствует волне на сфере; далее, т. е. там, где возмущение от линии сопряжения сферы и кромки достигает по характеристике фронта ударной волны, заметен ее перегиб на кромке и ясно виден $\min \partial R / \partial x$.

На фиг. 5, 6 приведены профили параметров течения (параметр $\lambda = (r - r_w) / (R - r_w)$). Из профилей энтальпии видно, что с ростом l около тела формируется высокоэнтропийный слой, в котором резко меняются энтальпия и плотность.

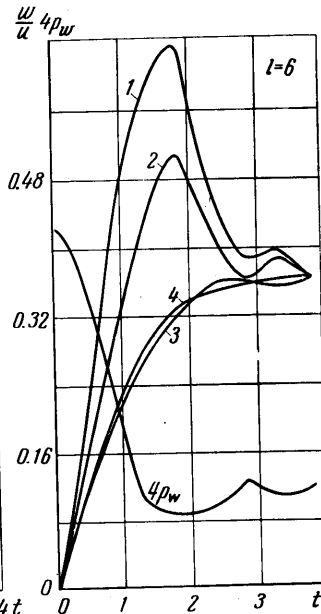
Из фиг. 7, 8, 9, на которых приведено распределение давления и поперечной скорости w/u в плоскостях $l = \text{const}$, при $\alpha = 0^\circ$ видно, как взаимодействуют потоки от носка и кромки. В некоторой области, прилегающей к плоскости $y = 0$, наблюдается растекание газа от этой плоскости в приударном слое и стекание к ней вблизи тела. С ростом l начинает преобладать эффект растекания, и при очень больших l , по-видимому, весь возмущенный слой от тела до ударной волны будет растекаться от плоскости симметрии тела $y = 0$ (в прилегающей к ней области).

Впервые на эффект растекания было указано в работе [4] (для гиперзвуковых условий обтекания стреловидных крыльев). Объясняется это, по-видимому, следующим. Как отмечалось, форма ударной волны при нулевых углах атаки довольно долго остается осесимметричной (да и при больших l не очень отличается от осесимметричной). Поэтому течение газа, прошедшего через ударную волну при углах наклона волны к оси тела, не близких к 90° , и образующего тяжелый приударный слой, слабо отличается от осесимметричного и вызывает растекание от упомянутой плоскости. Газ же, прошедший ударную волну в области больших углов наклона и образующий пристеночный слой, раньше начинает возмущаться кромкой и уже при малых l течет к плоскости $y = 0$. С ростом l кромка удаляется от плоскости $y = 0$ и возмущения от нее почти не доходят до последней. Поэтому все больше начинает преобладать первый эффект (растекания).

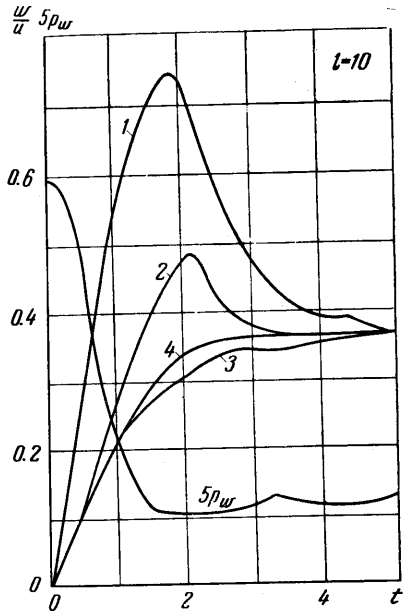
Сочетание инерции тяжелого приударного слоя, растекающегося от плоскости $y = 0$ с резким уменьшением толщины высокоэнтропийного слоя при движении к кромке, создает первый минимум давления вблизи плоскости $y = 0$. Перерасширение газа при движении около сильно искривленной кромки создает второй минимум p_w . Эти две области разделяет некоторая характеристическая поверхность, проходящая через окрестность носка. На минимум p_w у плоскости $y = 0$ впервые обращено внимание в работе [4]. До этого, получая в экспериментальных и расчетных работах ту



Фиг. 7



Фиг. 8



Фиг. 9

Фиг. 7. Параметры течения в плоскости $l = 2$. Кривые 1—4 соответствуют w/u при $\lambda = 0, 0.1, 0.5$ и 1.0

Фиг. 8. Параметры течения в плоскости $l = 6$. Кривые 1—4 соответствуют w/u при $\lambda = 0, 0.1, 0.5$ и 1.0

Фиг. 9. Параметры течения в плоскости $l = 10$. Кривые 1—4 соответствуют w/u при $\lambda = 0, 0.1, 0.5$ и 1.0

же самую картину распределения $p_w(t)$, авторы объясняли ее неточностью экспериментов или расчетов.

В заключение отметим, что, несмотря на сложность характера течения газа около пространственных тел, типа треугольных крыльев, современные численные методы позволяют решать подобные задачи с необходимой для практики точностью.

Поступило 30 XI 1966

ЛИТЕРАТУРА

- Bertram M. H., Henderson A., Recent. Hypersonic studies of Wing and Bodies. ARS Journal, 1963, vol. 31, No. 8, p. 1129—1139.
- Moretti G. Three — Dimensional supersonic Flow Computations. AIAA Journal 1963, vol. 1, No. 9, p. 2192—2193.
- Michel R., Hung D. V. Flux de chaleur au bord d'attaque d'une aile à forte flèche en hypersonique. AIAA Bull., 1964, vol. 1, No. 6, p. 353.
- Лунев В. В. Гиперзвуковое обтекание треугольной пластины с притупленным краем. Изв. АН СССР. Механика, 1965, № 3, стр. 9—16.
- Магомедов К. М. Метод характеристик для численного расчета пространственных течений газа. Вычисл. матем. и матем. физ., 1966, т. 6, № 2, стр. 313—325.