

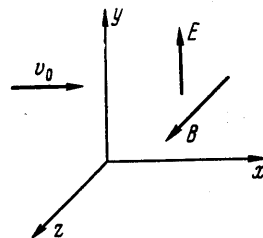
## ДВИЖЕНИЕ РАЗРЕЖЕННОЙ ПЛАЗМЫ ВО ВЗАИМНО ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫХ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ И МАГНИТНОМ ПОЛЯХ

В. В. ФИШГОЙТ (Москва)

Изучается стационарное движение ионов и электронов во взаимно перпендикулярных электрическом и магнитном полях при условии, что столкновение частиц и их тепловое движение отсутствуют. Приводятся аналитические выражения для параметров движения.

Рассмотрим движение разреженной плазмы во взаимно перпендикулярных электрическом и магнитном полях. Напряженность электрического поля  $E$  и магнитная индукция  $B$  постоянны и направлены так, как показано на фиг. 1. В направлении  $y$  и  $z$  поля не ограничены. В направлении оси  $x$  поля  $E$  и  $B$  простираются от  $x = 0$  до  $x = \infty$ . При  $x < 0$  плазма нейтральна, полностью ионизирована и движется вдоль оси  $x$  со скоростью  $v_0$ . Предполагается, что ионизация однократная и число ионов и электронов в единице объема при  $x < 0$  одинаково, т. е.

$$n_{i0} = n_{e0} = n_0 \quad (1)$$



Фиг. 1

Плазма разрежена настолько, что столкновений частиц нет. Не учитываются также тепловое движение частиц и магнитные поля, вызванные токами в плазме. Относительная диэлектрическая постоянная плазмы принимается равной единице  $\epsilon = 1$ .

Для этих условий уравнения движения ионов и электронов имеют вид

$$\begin{aligned} m_i dv_i / dt &= e(E + E') + ev_i \times B \\ m_e dv_e / dt &= e(E + E') - ev_e \times B \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $m_i$  и  $m_e$  — массы иона и электрона,  $e$  — заряд иона,  $v_i$  и  $v_e$  — скорости ионов и электронов, а  $E'$  — напряженность электрического поля, появившегося в результате поляризации плазмы.

Подобная задача решалась А. И. Морозовым [1] при условиях

$$v_0 = 0, \quad E' = en\epsilon_0^{-1}(x_e - x_i)$$

Здесь  $\epsilon_0 = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ к}^2 / \text{нм}^2$  — электрическая постоянная,  $n$  — число одноименных частиц в единице объема, принимавшееся в работе [1] постоянным,  $x_e$  и  $x_i$  — координаты электрона и иона в данный момент времени  $t$ , которые в начальный момент были равны  $x_e = x_i = 0$ . Излагаемое далее решение отличается от приведенного в работе [1] в основном тем, что при выводе выражения для  $E'$  использовалось не только уравнение Пуассона, но и уравнение неразрывности, а величина  $v_0 \neq 0$ . В проекциях на оси координат уравнения (2) принимают вид

для ионов

$$\frac{dv_{ix}}{dt} = \frac{eB}{m_i} \left( v_{iy} + \frac{E_x}{B} \right), \quad \frac{dv_{iy}}{dt} = \frac{eB}{m_i} \left( \frac{E}{B} - v_{ix} \right) \quad (3)$$

для электронов

$$\frac{dv_{ex}}{dt} = -\frac{eB}{m_e} \left( v_{ey} + \frac{E_x}{B} \right), \quad \frac{dv_{ey}}{dt} = \frac{eB}{m_e} \left( v_{ex} - \frac{E}{B} \right) \quad (4)$$

В этих уравнениях предполагалось, что так как задача одномерная, то  $E_y' = 0$  и  $E' = E_x' = E_x$ . Из уравнения Пуассона

$$\frac{dE_x}{dx} = \frac{\rho}{\epsilon_0} = \frac{(n_i - n_e)e}{\epsilon_0} \quad (5)$$

Здесь  $\rho$  — плотность зарядов,  $n_i$  и  $n_e$  — количество ионов и электронов в единице объема. Для установившегося движения, при отсутствии столкновений, из уравнения неразрывности имеем

$$\text{div } n_i v_i = 0, \quad \text{div } n_e v_e = 0 \quad (6)$$

что для одномерной задачи о стационарном движении частиц приводит к равенствам

$$n_i v_{ix} = n_0 v_0, \quad n_e v_{ex} = n_0 v_0, \quad n_i v_{ix} = n_e v_{ex} \quad (7)$$

Следовательно,

$$\frac{dE_x}{dx} = \frac{en_0 v_0}{\epsilon_0} \left( \frac{1}{v_{ix}} - \frac{1}{v_{ex}} \right) \quad (8)$$

Входящие в это выражение скорости  $v_{ix}$  и  $v_{ex}$  соответствуют одному сечению  $x$ . Ускорение, скорость, а также величина напряженности  $E_x$  зависят от положения частицы на оси  $x$ . Само же положение частицы  $x$  есть функция времени ее движения  $t$ . Так как времена, за которые ион и электрон проходят расстояние от  $x = 0$  до  $x$ , различны, то введем два обозначения для времени:  $t_i$  и  $t_e$ . Связь между  $t_i$  и  $t_e$  устанавливается равенством

$$x_e = x_i = x = \int_0^{t_i} v_{ix} dt_i = \int_0^{t_e} v_{ex} dt_e \quad (9)$$

или

$$dx = v_{ix} dt_i = v_{ex} dt_e \quad (10)$$

Таким образом,  $t_i$  и  $t_e$  — это времена, за которые ион и электрон проходят вдоль оси  $x$  одинаковый путь от нуля до  $x$ . Исходя из этого, находим

$$\frac{dE_x}{dt_i} = \frac{dE_x}{dx} \frac{dx}{dt_i} = \frac{dE_x}{dx} v_{ix}, \quad \frac{dE_x}{dt_e} = \frac{dE_x}{dx} \frac{dx}{dt_e} = \frac{dE_x}{dx} v_{ex} \quad (11)$$

Проекция ускорения иона и электрона будут теперь обозначаться отношениями

$$dv_{ix}/dt_i, \quad dv_{iy}/dt_i, \quad dv_{ex}/dt_e, \quad dv_{ey}/dt_e \quad (12)$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} \omega_i &= \frac{eB}{m_i}, & \omega_{i0} &= \frac{e^2 n_0}{\epsilon_0 m_i}, & w_e &= \frac{eB}{m_e}, & \omega_{e0} &= \frac{e^2 n_0}{\epsilon_0 m_e} \\ \lambda^2 &= \frac{\omega_e^2}{\omega_{e0}^2} = \frac{B^2 \epsilon_0}{n_0 m_e}, & \mu &= \frac{m_e}{m_i}, & u &= \frac{E}{B}, & \delta &= \frac{\lambda^2 (u/v_0 - 1)}{\lambda^2 u/v_0 + 1} \end{aligned} \quad (13)$$

Взяв производную по времени от выражения для  $dv_{ix}/dt_i$  и заменяя  $dv_{iy}/dt_i$  и  $dE_x/dt_i$  их выражениями из (3) и (11) с учетом принятых обозначений, имеем

$$d^2 v_{ix} / dt_i^2 = u \omega_{i0}^2 [(\mu \lambda^2 + v_0 / u) - (\mu \lambda^2 + v_0 / v_{ex}) v_{ix} / u] \quad (14)$$

Для электронов соответственно получим

$$\mu d^2 v_{ex} / dt_e^2 = u \omega_{i0}^2 [(\lambda^2 + v_0 / u) - (\lambda^2 + v_0 / v_{ix}) v_{ex} / u] \quad (15)$$

Реальные значения  $\mu$  находятся в пределах от  $5.5 \cdot 10^{-4}$  до  $2.3 \cdot 10^{-6}$ . Поэтому в последнем уравнении выражение в левой части можно приравнять нулю. Такое упрощение, к сожалению, исключает из решения характеристику высокочастотных колебаний частиц плазмы (с частотой порядка  $\omega_{e0}$ ), но позволяет решить уравнения движения аналитически, сохраняя характеристику основных колебаний частиц (с частотой порядка  $\omega_{i0}$ ).

С учетом сделанного допущения из уравнения (15) получаем зависимость между  $v_{ex}$  и  $v_{ix}$  для любого значения  $x$

$$v_{ex} = \frac{\lambda^2 u / v_0 + 1}{\lambda^2 v_{ix} / v_0 + 1} v_{ix} \quad (16)$$

После интегрирования этих уравнений с учетом формулы (16) при условии, что, когда  $t_i = 0$ , остальные граничные параметры равны

$$t_e = 0, \quad x_i = x_e = 0, \quad y_i = y_e = y_0; \quad v_{ey} = v_{iy} = 0, \quad v_{ix} = v_{ex} = v_0, \quad E_x = 0$$

получаем

$$x_i = x_e = u [t_i - a^{-1} (1 - v_0 / u) \sin at_i] \quad (17)$$

Здесь и далее

$$a = \omega_{i0} \left( \frac{\lambda^2}{\lambda^2 u / v_0 + 1} + \mu \lambda^2 \right)^{1/2} \quad (18)$$

$$y_i - y_0 = \frac{\omega_i u}{a^2} \left( 1 - \frac{v_0}{u} \right) (1 - \cos at_i), \quad y_e - y_0 = \frac{v_0 \omega_i}{\mu \lambda^2 a^2} \ln \frac{1 - \delta}{1 - \delta \cos at_i} \quad (19)$$

$$v_{ix} = u \left[ 1 - \left( 1 - \frac{v_0}{u} \right) \cos at_i \right], \quad v_{iy} = \frac{\omega_i u}{a} \left( 1 - \frac{v_0}{u} \right) \sin at_i \quad (20)$$

$$v_{ex} = u \frac{1 - (1 - v_0/u) \cos at_i}{1 - \delta \cos at_i}, \quad v_{ey} = -v_0 \frac{\delta}{\mu \lambda^2} \frac{\omega_i}{a} \sin at_i \quad (21)$$

$$t_e = t_i - \delta a^{-1} \sin at_i, \quad E_x = en_0 v_0 \epsilon_0^{-1} (t_i - t_e) \quad (22)$$

Так как  $d\varphi/dx = -E_x$ , то потенциал вдоль оси  $x$  определится выражением

$$\varphi_x - \varphi_0 = -\frac{en_0}{\epsilon_0} \frac{\delta}{a} uv_0 \left[ (1 - \cos at_i) - \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{v_0}{u} \right) \sin^2 at_i \right] \quad (23)$$

Здесь  $\varphi_0$  — потенциал при  $x = 0$ .

Плотность тока вдоль оси  $x$ , как видно из формулы 7, равна нулю, а вдоль оси  $y$  находится из выражения

$$j_y = en_0 v_0 (v_{iy} / v_{ix} - v_{ey} / v_{ex}) \quad (24)$$

Из приведенных результатов следует, что движение ионов и электронов при принятых условиях характеризуется периодическими функциями с одинаковым периодом  $T = 2\pi/a$ , а шаг по  $x$  будет равен  $X = uT = 2\pi u/a$ .

После подстановки соответствующих величин можно установить, что шаг увеличивается с ростом  $m_i$  и  $u$  и с уменьшением  $v_0$ ,  $n_0$  и  $B$ .

Максимальное отклонение ионов и электронов вдоль оси  $y$  соответствует положению, когда  $x = 1/2 X$ , при этом отношение  $y_{e \max} / y_{i \max}$  будет равно

$$\frac{y_{e \max}}{y_{i \max}} = -\frac{1}{2\mu\lambda^2(u/v_0 - 1)} \ln \frac{1 - \delta}{1 + \delta}$$

Из формулы (22) видно, что максимальная разность между  $t_i$  и  $t_e$  равна  $(t_i - t_e)_{\max} = \delta/a$  и соответствует углу  $at_i = 1/2\pi$ ; следовательно,

$$(t_i - t_e)_{\max} / T = \delta / 2\pi$$

На фиг. 2 показаны некоторые результаты расчета движения для разреженной цезиевой плазмы для условий:

$$v_0 = 5000 \text{ м/сек}, \quad n_0 = 10^{18} \text{ 1/м}^3$$

$$E = 5000 \text{ в/м}, \quad B = 0.1 \text{ тесла}$$

$$m_i = 22 \cdot 10^{-28} \text{ кг}, \quad m_e = 9.1 \cdot 10^{-31} \text{ кг}$$

$$e = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ К}$$

При этом

$$u = 5 \cdot 10^4 \text{ м/сек}, \quad \lambda^2 = 0.097, \quad \delta = 0.443$$

$$a = 2.55 \cdot 10^7 \text{ сек}^{-1}, \quad \omega_{i0} = 1.15 \cdot 10^8 \text{ сек}^{-1}$$

$$\omega_{e0} = 5.64 \cdot 10^{10} \text{ сек}^{-1}$$

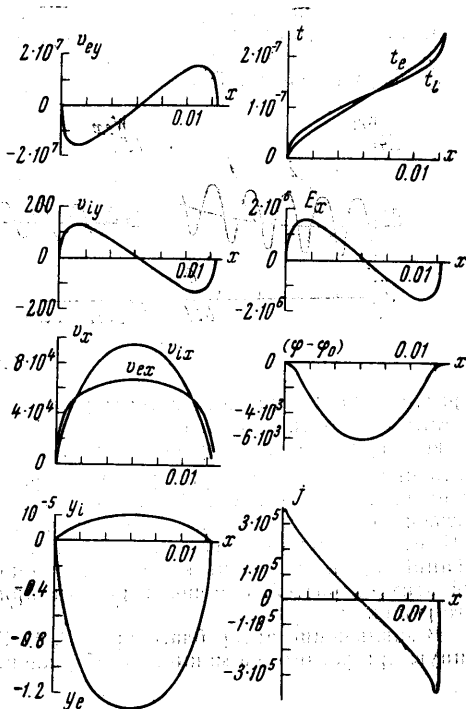
Сила вдоль оси  $x$ , действующая на единицу площади потока при  $x = 1/2 X$ , может быть определена из выражений

$$\frac{R}{S} = m_i v_0 n_0 (v_{ix} - v_0) = B \int_0^{1/2 X} j dx$$

а мощность потока, отнесенная к площади его сечения, равна

$$\frac{N}{S} = m_i v_0 n_0 \frac{v_{ix}^2 - v_0^2}{2} = E \int_0^{1/2 X} j dx$$

Фиг. 2



Силы и мощности, вычисленные при помощи электромагнитных (правая часть равенств) и механических (левая часть равенств) параметров, совпали.

Как видно из фиг. 2,  $Bv_{iy}$ , по сравнению с  $E_x$ , очень мало. Поэтому в уравнении (3) величиной  $Bv_{iy}$  можно пренебречь. Тогда

$$\frac{dv_{ix}}{dt_i} = \frac{e}{m_i} E_x = -\frac{e}{m_i} \frac{d\varphi}{dx} = -\frac{e}{m_i} \frac{1}{v_{ix}} \frac{d\varphi_x}{dt_i}$$

Интегрируя это уравнение с учетом граничных условий, получаем

$$1/2(v_{ix}^2 - v_0^2) = -\epsilon m_i^{-1}(\varphi_x - \varphi_0)$$

т. е. увеличение скорости ионов вдоль  $x$  в рассматриваемой задаче обусловливается падением потенциала вдоль этой оси.

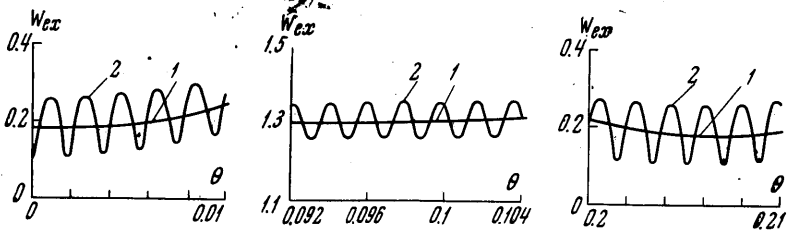
При использовании счетных машин система уравнений (3), (11) позволяет решить задачу, не вводя допущения, что в уравнении (15) левая часть равенства равна нулю. Исходная система в этом случае в безразмерной форме имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dw_{ix}}{d\theta} &= w_{iy} + \mathcal{E}_x, & \frac{dw_{iy}}{d\theta} &= 1 - w_{ix}, & \frac{\mu dw_{ex}}{d\theta} &= -(w_{ey} + \mathcal{E}_x) \frac{w_{ix}}{w_{ex}} \\ \mu \frac{dw_{ey}}{d\theta} &= -(1 - w_{ex}) \frac{w_{ix}}{w_{ex}}, & \mu \lambda^2 \frac{d\mathcal{E}_x}{d\theta} &= u_0 \left(1 - \frac{w_{ix}}{w_{ex}}\right) \end{aligned} \quad (25)$$

$$\theta = \omega_i t_i, \quad w = v/u, \quad w_0 = v_0/u, \quad \mathcal{E}_x = E_x/E$$

Система этих уравнений была решена на машине БЭСМ-3М для полностью ионизированной водородной плазмы при следующих исходных данных:  $\mu = 5.43 \cdot 10^{-4}$ ,  $\lambda^2 = 0.097$ ,  $w_0 = 0.1$  и с учетом граничных условий:  $x = 0$ ,  $w_{ix} = w_{ex0} = w_0$ ,  $w_{iy0} = w_{ey0} = 0$ ,  $\mathcal{E}_{x0} = 0$ . Выбор водорода в качестве рабочего тела объясняется тем, что величина  $\mu$  для него имеет наибольшее значение.

Результаты расчета на машине в основном совпали с результатами расчета по упрощенным формулам, приведенным ранее. Отличие от упрощенного решения заключается лишь в том, что на основную форму колебаний накладывается высокочастотная форма колебаний. Это видно из графиков фиг. 3 (1 — расчет по упрощенной



Фиг. 3

формуле (21), 2 — расчет системы уравнений (25)), на которых дано сравнение величины  $w_{ex}$ , вычисленной обоими способами для трех диапазонов  $\theta$ . Эти значения  $\theta$  соответствуют начальному среднему и конечному участкам кривой. Период высокочастотных колебаний примерно в  $\sqrt{\mu}$  раз меньше периода основных, а амплитуда высокочастотных колебаний  $w_{ex}$  составляет 5—7% от максимального значения  $w_{ex}$ . Согласно расчетам, амплитуда высокочастотных колебаний  $w_{ey}$  и  $\mathcal{E}_x$  равна 0.3—0.5% от максимальной величины этих параметров. Амплитуда высокочастотных колебаний  $w_{ix}$  и  $w_{iy}$  очень мала и примерно в  $10^6$ — $10^7$  меньше максимальных значений этих скоростей. Это подтверждает приемлемость приведенного ранее упрощенного решения.

В заключение автор благодарит В. Г. Царькова и Р. Г. Авалова за помощь, оказанную при расчете на машине, и обсуждение данной работы.

Поступило 19 XII 1966

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Морозов А. И. Об ускорении плазмы магнитным полем. *Ж. эксперим. и теор. физ.*, 1957, т. 32, вып. 2.
2. Морозов А. И., Соловьев Л. С. Плоские течения идеально проводящей сжимаемой жидкости при учете эффекта Холла. *Ж. техн. физ.*, 1964, т. 34, вып. 7.
3. Морозов А. И., Соловьев Л. С. Об ускорении вращающейся плазмы в аксиально симметричных каналах. *Ж. техн. физ.*, 1964, т. 34, вып. 7.
4. Проблемы современной физики. Сб. перев. «Динамика плазмы», Изд. иностр. лит., 1956.
5. Куликовский А. Г., Любимов Г. А. *Магнитная гидродинамика*. Физматгиз, 1962.
6. Лонгмайр К. *Физика плазмы*. Атомиздат, 1966.