О ТОЧНОЙ И ПРИБЛИЖЕННОЙ ПОСТАНОВКАХ ЗАДАЧ ДЛЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ТЕЧЕНИЙ ПРОВОДЯЩЕЙ ЖИДКОСТИ В МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ КАНАЛАХ

А. Г. РЯБИНИН, А. И. ХОЖАИНОВ

(Ленинград)

Точная постановка задач для нестационарных течений вязкой несжимаемой проводящей жидкости в магнитогидродинамических каналах с произвольной проводимостью стенок предусматривает совместное решение уравнений для жидкости и окружающей среды, связанных условиями на границе раздела, где электрические и магнитные поля должны быть непрерывны [1, 2]. Если боковые стенки канала выполнены из хорошо проводящего материала и связаны с внешней цепью, то указанные уравнения в общем случае должны быть дополнены системой уравнений для внешней цепи, записанных в соответствии со вторым законом Кирхгофа.

Решение таких задач в точной постановке представляет чрезвычайные трудности. Между тем, во многих частных случаях, представляющих практический интерес, постановку задач удается упростить и построить решения в законченном виде.

Ниже рассматриваются возможности такого упрощения при исследовании нестационарных течений жидкости высокой проводимости в плоских магнитогидродинамических каналах с внешней электрической цепью.

Применительно к случаю течения проводящей жидкости в плоском канале, стенки которого $-x = \pm {}^1/_2 b$, перпендикулярные приложенному магнитному полю, имеют произвольную проводимость, система уравнений магнитной гидродинамики для области жидкости принимает вид

$$\rho\frac{\partial V}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \eta\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - j_y B_x, \qquad \frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}, \qquad j_y = \frac{-\mu^{-1}\partial B}{\partial x} = \sigma(E_y + v_z B_x)$$

Здесь $V = V_z(x, t)$ — скорость течения жидкости; $\partial p / \partial z$ — продольный градиент давления; B и E — магнитная индукция и напряженность электрического поля соответственно, j — плотность тока проводимости; ρ, η, σ и μ — плотность, динамическая вязкость, проводимость и магнитная проницаемость жидкости соответственно.

В рассматриваемом случае для тока проводимости электрическая цепь всегда является замкнутой, поэтому в жидкости током смещения пренебрегают. Уравнения Максвелла для окружающей жидкость среды ($|x| \geqslant {}^1/_2 b$) имеют вид

$$\frac{\partial E_y^+}{\partial x} = -\frac{\partial B_z^+}{\partial t}, \qquad j_y^+ = \sigma^+ E^+, \qquad j_y^+ + \varepsilon^+\frac{\partial E_y^+}{\partial t} = -\frac{1}{\mu}\frac{\partial B_z^+}{\partial x} \tag{2}$$

Здесь j^+ — ток проводимости, σ^+ и ε^+ — проводимость и диэлектрическая проницаемость среды. Второй член последнего уравнения системы (2) характеризует ток смещения, возникающей в среде при изменении во времени электрического поля.

Учет токов смещения в окружающей жидкость среде приводит к необходимости рассмотрения волновых процессов.

В идеальном случае, когда стенки канала принимаются идеально проводящими, током смещения всегда можно пренебречь, что вытекает из уравнений (1), (2).

Стенки реальных магнитогидродинамических каналов выполняются из изолятора или тонкого проводящего материала с высоким удельным сопротивлением. Толщина диэлектрического слоя всегда ограничена полюсами магнита или при сверхпроводящих обмотках — магнитным экраном ($b^+ \sim b$). Поэтому и в данном случае влиянием токов смещения на нестационарное течение проводящей жидкости практически всегда можно пренебречь. Интегрируя последнее уравнение системы (2) по x и оценивая порядок его членов, для относительной величины B_z^+ / B_z получим

$$B_z^+ / B_z \sim 1 \sim \mu\varepsilon^+ E_y^+ b^+ / B_z T + \sigma^+ E_y^+ b^+ \mu / B_z + f(t)$$

Поскольку $B_z \sim R_m B_x$, $E_y^+ \sim E_y \sim U B_x$, последнее выражение приводится к виду

$$B_z^+ / B_z \sim 1 \sim \sigma^+ / \sigma + \varepsilon^+ / \sigma T + f(t)$$

Анализ данных расчета по точным и приближенным решениям показывает [3], что при $M \gg 1$ характерное время T имеет порядок θ

$$\theta \sim b^2 / \nu M^2, \qquad M = b B_x \sqrt{\sigma / \eta}$$

Здесь ν — кинематический коэффициент вязкости, M — число Гартмана. Отсюда

$$B_z^+ / B_z \sim 1 \sim \sigma^+ / \sigma + \varepsilon^+ \nu M^2 / \sigma b^2 + f(t)$$

В рассматриваемом случае стенки канала следует считать изолятором ($\sigma^+ = 0$). При этом током смещения можно пренебречь при условии

$$\varepsilon^+ \nu M^2 / \sigma b^2 \ll 1 \tag{3}$$

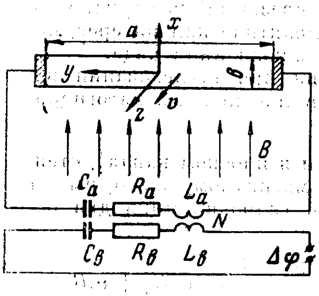
Оценивая по максимуму левую часть неравенства (3), где

$$M \sim 10^3, \quad b \sim 1 \text{ м}, \quad \varepsilon \sim 10^{-11} \text{ ф/м}, \quad \nu \sim 10^{-7} \text{ м}^2/\text{сек}, \quad \sigma \sim 10^6 \text{ ом}^{-1} \text{м}^{-1},$$

получим $\varepsilon^+ \nu M^2 / \sigma b^2 \approx 10^{-18}$. Таким образом, токами смещения практически всегда можно пренебречь и считать $B^+ = B^+(t)$. В этом случае задача сводится к решению только системы уравнений (1) при соответствующих граничных и начальных условиях. Примеры решения таких задач рассмотрены в обзоре Регирера [4].

Если боковые стенки канала замкнуты на внешнюю электрическую цепь, то в общем случае решение таких задач по-прежнему представляет большие трудности.

В ряде интересных для практики случаев можно принять, что E_y не зависит от x и будет функцией только времени. Область допустимости такого предположения не связана только с малостью магнитного числа Рейнольдса [5], а определяется некоторым безразмерным комплексом.



Фиг. 1

Будем полагать, что боковые стенки канала замкнуты на активную нагрузку. Тогда по стационарному режиму течения можно произвести оценку соответствующих величин с учетом коэффициента нагрузки $k = R_a / (R_a + R)$, где R_a и R — сопротивления нагрузки и канала соответственно. Тогда, интегрируя второе уравнение системы (1) по x и оценивая порядок его членов, получим

$$E_y / UB_x \sim B_z b / UB_x T + f(t)$$

Здесь U — средняя скорость течения жидкости.

Отметим, что при электродах, замкнутых на конечную нагрузку, $E_y / UB_x \sim 1$. Если электроды замкнуты на коротко, то порядок отношения E_y / UB_x не может быть определен из стационарного режима течения, так как тогда $E_y = 0$. Анализ точного решения задачи для разгона проводящей жидкости в канале с идеально проводящими стенками [1] показывает, что интегральная величина E_y достигает максимума при $t \lesssim \theta$, при этом отношение E_y / UB_x также имеет порядок единицы. Электрическое поле в потоке может быть принято однородным при выполнении условия $B_z b / UB_x T \ll 1$.

Для оценки данного безразмерного комплекса воспользуемся среднеинтегральной величиной для $|B_z|$, вытекающей из решения для стационарного режима течения

$$|B_z| \sim 0.25 R_m B_x (1 - k)$$

За характерное время T примем тот момент времени, при котором практически заканчивается нестационарный процесс. Согласно [3], $T \approx 5\theta$. Тогда при $M \gg 1$

$$B_z b / UB_x T \sim 0.1 L^2 {}^1\!/_2 (1 - k)^2 = 0.1\Delta \ll 1, \qquad L^2 = R_m M^2 / R_e \tag{4}$$

Здесь R_e — число Рейнольдса.

Из (4) следует, что при k, близких к единице, практически всегда можно принять электрическое поле в потоке однородным. Во втором предельном случае ($k = 0$) для этого должно выполняться условие — $L^2 \lesssim 2$.

Параметр L является числом Лундквиста [6].

В реальных установках на жидком металле порядок определяющих критериев может достигать следующих значений: $M \sim 10^3$, $R_m \sim 10^2$, $R_e \sim 10^6$ и $k \sim 0.5$. Тогда предельное значение параметра Δ будет иметь порядок единицы. Следовательно, на практике, как правило, электрическое поле в потоке можно принимать однородным.

Такая приближенная постановка позволяет решить ряд практических задач.

Рассмотрим нестационарное течение проводящей жидкости в плоском канале, две стенки которого $x = \pm {}^1\!/_2 b$ — изоляторы, а две другие $y = \pm {}^1\!/_2 a$ — хорошо проводящие электроды, замкнутые на внешнюю электрическую цепь (фиг. 1). При этом необходимо полагать, что $a \gg b$ с тем, чтобы изменением параметров потоков по оси y, по сравнению с их изменением по оси x, можно было пренебречь.

При условии однородного электрического поля система уравнений (1) приводится к следующему уравнению для скорости:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = P + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - MR \frac{\nu}{ab} \left(\frac{\sigma}{\eta} \right)^{1/2} I_a + \frac{M^2 \nu}{b^2} (U - v) \tag{5}$$

Если электроды канала замкнуты на сложную электрическую цепь, содержащую в общем случае активное сопротивление R_a, емкость C_a и индуктивность L_a, связанную взаимной индуктивностью N с другой электрической цепью, то, в соответствии со вторым законом Кирхгофа, для любого момента времени система уравнений для внешней цепи может быть записана в виде

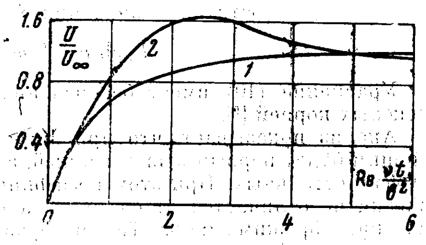
$$(R_a + R)I_a + L_a \frac{dI_a}{dt} + N \frac{dI_b}{dt} + \frac{1}{C_a} \int_0^t I_a \, dt = UBa$$

$$R_b I_b + L_b \frac{dI_b}{dt} + N \frac{dI_a}{dt} + \frac{1}{C_b} \int_0^t I_b \, dt = \Delta\varphi \qquad (6)$$

В общем случае L_a и L_b, а следовательно, и N могут быть нелинейными функциями I, что на практике имеет место при наличии в электрических цепях стали [7]. Разность потенциалов на зажимах второй электрической цепи $\Delta\varphi$ может быть величиной постоянной или изменяться во времени. Последнее соответствует случаю работы магнитогидродинамического канала на обмотки управления дросселей насыщения или магнитных усилителей. Начальные условия для токов I_a и I_b и их производных определяются конкретными условиями задачи. В частных случаях они могут быть нулевыми или определятся из стационарных условий.

При отсутствии во внешней цепи индуктивности и емкости система (5), (6) приводится к одному уравнению для скорости

$$\frac{\partial v}{\partial t} = P + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{M^2 \nu}{b^2} kU - \frac{M^2 \nu}{b^2} v \qquad (7)$$



Фиг. 2

В зависимости от класса задач уравнение (7) решается точно или приближенно [5].

С целью проверки справедливости допущения об однородности электрического поля при выполнении условия (4) проведем анализ решений, построенных в предположении однородного [3] и неоднородного [1, 8] электрического полей, а также сопоставим результаты расчета по этим решениям.

Ограничимся рассмотрением двух предельных случаев: $\sigma^+ = \infty$ и $\sigma^+ = 0$. В приближенной постановке точными аналогами этих случаев будут $k = 0$ и $k = 1$.

Для простоты анализа будем полагать $P = \text{const}$ и начальные условия нулевыми, что соответствует разгону проводящей жидкости из состояния покоя.

Из решения, полученного в приближенной постановке, следует, что нестационарный режим течения всегда апериодический.

Выражение для относительной величины средней скорости при течении проводящей жидкости в канале с идеально проводящими стенками, построенное с учетом неоднородного электрического поля [1], может быть приведено к виду

$$\frac{U}{U_\infty} = 1 - \frac{8M^2}{(1 - 2M^{-1} \operatorname{th} {}^1/_2 M)} \times \qquad (8)$$

$$\times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\rho^2 + \lambda_n^2 + M^2) \exp^{\rho_1 \nu t / b^2} - (\rho_1 + \lambda_n^2 + M^2) \exp^{\rho_2 \nu t / b^2}}{\lambda_n^2 (M^2 + \lambda_n^2)(\rho_2 - \rho_1)}$$

$$\lambda_n = \pi(2n - 1), \quad \rho_{1,2} = \frac{\lambda_n^2}{2R_m} \left[-(R_e + R_m) \pm (R_e - R_m) \left(1 - \frac{4M^2 R_m R_e}{\lambda_n^2 (R_e - R_m)^2} \right)^{1/2} \right]$$

На практике всегда $R_e \gg R_m$, поэтому из выражения для корней ρ_i следует, что нестационарный процесс будет всегда апериодическим при условии

$$4L^2 / \lambda_1^2 \leqslant 1, \quad \text{или} \quad L^2 \leqslant 2.$$

Это условие полностью совпадает с полученным выше, позволяющим считать электрическое поле зависящим только от времени.

На фиг. 2 приведены кривые, построенные по выражению (8) при условии $M = 10^3$; $R_e = 10^4$ и трех значениях магнитного числа Рейнольдса. Кривая *1* соответствует случаям $R_m = 0.1$ и 1, она совпадает с данными расчета по [3]. Кривая *2* получена при $R_m = 10$ и соответствует нарушению условия (4). В данном случае корни ρ_1 и ρ_2 решения (8) для первого члена ряда будут комплексными, и развитие нестационарного процесса отличается от апериодического. С увеличением R_m периодический характер нестационарного процесса становится явно выраженным.

В пределах апериодического процесса разгона профили скорости течения жидкости, рассчитанные по сопоставляемым решениям, практически не отличаются.

Выражение для относительной величины средней скорости течения жидкости в канале с изоляционными стенками, соответствующее решению [8], имеет вид

$$\frac{U}{U_\infty} = 1 - \frac{8M\,\mathrm{th}\,0.5M}{1 - 2M^{-1}\,\mathrm{th}\,{}^1/_2M} \times$$

$$\times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{sh}\, m_{1n}\,\mathrm{sh}\, m_{2n}(b_{2n}/m_{2n} - b_{1n}/m_{1n})\exp(s_n \nu t/b^2)}{s_n{}^2(b_2\,\mathrm{ch}\, m_2\,\mathrm{sh}\, m_1 - b_1\,\mathrm{ch}\, m_1\,\mathrm{sh}\, m_2)'_{s=s_n}}$$

$$m_{1,2} = \sqrt{1/\Lambda}\,[(L^2 + S(\Lambda + \sqrt{\Lambda})^2)^{1/2} \pm (L^2 + S(\Lambda - \sqrt{\Lambda})^2)^{1/2}]$$

$$b_{1,2} = (1 - \sqrt{1/\Lambda})(L^2 + S(\Lambda + \sqrt{\Lambda})^2)^{1/2} \mp (1 + \sqrt{1/\Lambda})(L^2 + S(R\Lambda - \sqrt{\Lambda})^2)^{1/2}$$

$$\Lambda = R_m / R_e$$

При этом собственные значения S_n находятся из трансцендентного уравнения

$$b_2\,\mathrm{ch}\, m_2\,\mathrm{sh}\, m_1 - b_1\,\mathrm{ch}\, m_1\,\mathrm{sh}\, m_2 = 0 \tag{10}$$

Уравнение (10) имеет бесчисленное множество как вещественных, так и комплексных корней [9].

Анализ показывает, что при $M \gg 1$ среди всех корней уравнения (10) определяющим будет первый вещественный, абсолютное значение которого на порядок меньше всех остальных. При этом коэффициент первого члена ряда выражения (9) практически не отличается от единицы, а коэффициенты при всех последующих членах ряда пренебрежимо малы. Таким образом, в данном случае нестационарный процесс с практической точки зрения можно всегда считать апериодическим, что согласуется с условием (4).

При учете же только первого члена ряда результаты расчета по выражению (9) совпадают с результатами расчета по решению [3]. При этом обнаруживается и совпадение профилей скорости.

Таким образом, условие (4) можно считать достаточным для предположения об однородности электрического поля при теоретических исследованиях нестационарных течений проводящих жидкостей в плоских магнитогидродинамических каналах.

В заключение отметим, что нестационарные процессы в этих каналах и при условии однородного электрического поля могут носить периодический характер. Это может быть обусловлено сложным законом изменения во времени градиента давления или наличием во внешней электрической цепи реактивных сопротивлений.

Поступило 9 I 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Чекмарев И. Б. Нестационарное течение проводящей жидкости в плоской трубе при наличии поперечного поля. Ж. техн. физ., 1960, т. 30, № 3.
2. Уфлянд Я. С., Чекмарев И. Б. Исследование нестационарного течения проводящей жидкости в плоском канале с движущимися границами. Ж. техн. физ., 1960, т. 30, № 5.
3. Рябинин А. Г., Хожаинов А. И. Исследование нестационарного течения проводящей жидкости в магнитогидродинамических каналах. Ж. техн. физ., 1967, т. 37, № 2.
4. Регирер С. А. Магнитогидродинамические течения в каналах и трубах. ИНИ АН СССР, 1966.
5. Патрашев А. Н., Рябинин А. Г., Хожаинов А. И. Нестационарное течение проводящей жидкости в магнитогидродинамических каналах при малых магнитных числах Рейнольдса. Рижское Совещание по магнитной гидродинамике, МГД-генераторы, Изд. АН Латв. ССР, 1966.
6. Лундквист С. Обзор исследований по магнитной гидродинамике, Пробл. соврем. физ., 1954, № 2.
7. Бессонов Л. А. Переходные процессы в нелинейных электрических цепях со сталью. Госэнергоиздат, 1951.
8. Регирер С. А. Неустановившееся течение электропроводной жидкости в присутствии магнитного поля. Инж.-физ. ж., 1959, т. 2, № 8.
9. Уфлянд Я. С. Некоторые вопросы неустановившегося течения проводящей жидкости по трубам постоянного сечения в поперечном магнитном поле. Ж. техн. физ., 1961, т. 31, № 12.