

ОБТЕКАНИЕ НЕВЫПУКЛОГО КЛИНА СВОБОДНОМОЛЕКУЛЯРНЫМ ПОТОКОМ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ МАХА

В. Я. ПОНОМАРЕВ (Москва)

Рассмотрена задача о влиянии многократного отражения молекул на аэродинамические характеристики невыпуклого клина при поперечном обтекании свободно-молекулярным потоком. Отражение молекул от поверхности тела предполагается диффузным с частичной тепловой аккомодацией [1-7]. Для этих условий отражения рассчитаны аэродинамические характеристики, которые затем сравниваются с характеристиками, полученными при более простых предположениях.

1. Рассмотрим бесконечно длинный симметричный клин с углом полураствора ω при поперечном обтекании свободномолекулярным потоком (фиг. 1). Обозначим индексами 1, 2 пластины и все величины, относящиеся к ним. Не уменьшая общности, ширину пластинки примем единичной, расстояния от вершины клина до элементов поверхности dS_1, dS_2 равными соответственно x, y . С элементами поверхности свяжем единичные векторы нормали n_1, n_2 и тангенциальные векторы τ_1, τ_2 .

Поток имеет максвелловское распределение молекул по скоростям при температуре T_i и направленную скорость U , которая составляет угол атаки δ с бисектрисой полного угла клина.

Функция распределения в локальной цилиндрической системе координат s, θ, w с началом в точке x имеет вид

$$f(s, \theta, w) = n(\beta/\pi)^{3/2} \exp \{-\beta [c^2 - 2cU \cos(\theta + \delta - \omega) + U^2 + w^2]\}, \quad \beta = 1/2R^{\circ} T_i \quad (1.1)$$

Здесь R° — газовая постоянная, n — число молекул в единице объема. Угол θ отсчитывается против часовой стрелки от вектора τ_1 , ось w параллельна оси ребра клина. Элемент объема в пространстве скоростей в цилиндрической системе координат запишется в виде $d\Omega = cdcd\theta dw$.

Аэродинамические коэффициенты рассматриваются в скоростной системе координат XYZ с началом в вершине клина ($\cos(U, X) = 1, Z \parallel w$). В дальнейшем для локальных характеристик используются безразмерные величины

$$n_i = \frac{N_i}{nU}, \quad e_{1r} = \frac{2E_r}{\rho U^2}, \quad p_i = \frac{P_n}{\rho U^2}, \quad \tau_i = \frac{P_{\tau}}{\rho U^2} \quad (1.2)$$

Здесь n_i, e_{1r} — безразмерные потоки молекул и энергии; p_i, τ_i — нормальное и касательное напряжения; $\rho = mn$ — плотность в потоке; m — масса молекулы. Индекс i относится к величинам, создаваемым падающими молекулами, индекс r — для отраженных молекул. Локальные аэродинамические характеристики на поверхности клина складываются из воздействия падающих молекул и отраженных.

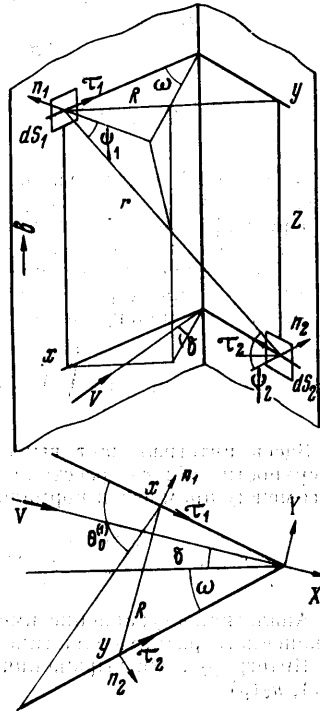
Умножим (1.1) последовательно на

$$c \sin \theta d\Omega, \quad \frac{1}{2}m(c^2 + w^2) c \sin \theta d\Omega, \quad mc^2 \sin^2 \theta d\Omega, \quad mc^2 \sin \theta \cos \theta d\Omega$$

Интегрируя результаты по скорости, получаем для молекул первого соударения [8-10].
Потоки молекул

$$n_i^{\circ}(x) = \int_0^{\theta_0^{(1)}} \frac{A_1(\theta)}{s} \sin \theta d\theta, \quad s = U \sqrt{\beta} \quad (1.3)$$

$$A_1(\theta) = \frac{z_1}{2\pi} e^{-z_1^2} + \frac{1 + 2z_1}{4\sqrt{\pi}} [1 + \Phi(z_1)] e^{z_1^2 - 1/2} \quad (1.3)$$



Фиг. 1

потоки энергии

$$e_1^\circ(x) = \frac{n_1^\circ(x)}{2s^2} + \int_0^{\theta_0^{(1)}} \frac{B_1(\theta)}{s^3} \sin \theta d\theta + e_1', \quad e_1' = \frac{5 - 3\gamma}{\gamma - 1} \frac{n_1^\circ(x)}{2s^2}$$

$$B_1(\theta) = \frac{z_1(z_1^2 + 5/2)}{2\pi} e^{-s^2} + \frac{1}{4\sqrt{\pi}} [(Z_1^2 + 5/2)(2z_1^2 + 1) - 1][1 + \Phi(z_1)] e^{z_1^2 - s^2}$$

локальные напряжения

$$p_1^\circ(x) = \int_0^{\theta_0^{(1)}} \frac{D_1(\theta)}{s^2} \sin^2 \theta d\theta, \quad \tau_1^\circ(x) = \int_0^{\theta_0^{(1)}} \frac{D_1(\theta)}{s^2} \sin \theta \cos \theta d\theta$$

$$D_1(\theta) = \frac{(1 + z_1^2)}{2\pi} e^{-s^2} + \frac{1}{2\sqrt{\pi}} z_1(z_1^2 + 3/2)[1 + \Phi(z_1)] e^{z_1^2 - s^2}$$

$$z_1 = s \cos(\theta + \delta - \omega), \quad \theta_0^{(1)} = \frac{\pi}{2} + \omega - \arctg \left[\frac{1-x}{1+x} \operatorname{ctg} \omega \right], \quad \Phi(z_1) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{z_1} e^{-t^2} dt$$

Здесь $\Phi(z_1)$ — интеграл вероятности, e_1' — поток внутренней энергии падающих молекул [9], γ — отношение удельных теплоемкостей, s — аналог числа Маха.

При диффузном отражении молекул от тела локальные аэродинамические величины определяются, если известны полные потоки молекул на теле $n_1(x)$ и энергии отражения $e_{1r}(x)$. Потоки молекул и энергии удовлетворяют интегральным уравнениям Фредгольма второго рода с симметричными ядрами [1, 2].

Для потока молекул на пластинку 1 имеем

$$n_1(x) = n_1^\circ(x) + \int_0^1 \int_{-\infty}^{\infty} n_2(y) K(x, y, Z) dy dZ \quad \left(K(x, y, Z) = \frac{\cos \psi_1 \cos \psi_2}{\pi r^2} \right) \quad (1.4)$$

Здесь интеграл дает выражение для потока молекул с пластинки 2 на элемент поверхности dS_1 ; r — расстояние между элементами dS_1 , dS_2 ; ψ_1 , ψ_2 — наименьшие углы между прямой r и нормальми к dS_1 , dS_2 . Как легко видеть из фиг. 1,

$$\cos \psi_1 = \frac{y \sin 2\omega}{r}, \quad \cos \psi_2 = \frac{x \sin 2\omega}{r}, \quad r^2 = Z^2 + R^2$$

$$R^2 = x^2 - 2xy \cos 2\omega + y^2 \quad (1.5)$$

Аналогичное уравнение имеет место и для потока молекул к пластинке 2. Ввиду бесконечного размаха пластинок по оси Z потоки молекул зависят только от x , y .

Интегрируя эти выражения по Z , получаем систему сингулярных уравнений для $n_1(x)$, $n_2(y)$

$$n_1(x) = n_1^\circ(x) + \int_0^1 n_2(y) k(x, y) dy, \quad n_2(y) = n_2^\circ(y) + \int_0^1 n_1(x) k(x, y) dx$$

$$k(x, y) = \frac{xy \sin^2 2\omega}{2(x^2 - 2xy \cos 2\omega + y^2)^{3/2}} \quad (1.6)$$

Здесь n_2° , как и e_2° , p_2° , τ_2° , находятся из (1.3) при замене знака у δ на минус и x на y . Рассуждая таким же образом, получаем систему сингулярных интегральных уравнений для энергии отражения на пластинках 1, 2

$$e_{1r}(x) = (1 - a) e_1^\circ(x) + a \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \frac{n_1(x) T_w}{2s^2 T_i} + (1 - a) \int_0^1 e_{2r}(y) k(x, y) dy$$

$$e_{2r}(y) = (1 - a) e_2^\circ(y) + a \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \frac{n_2(y) T_w}{2s^2 T_i} + (1 - a) \int_0^1 e_{1r}(x) k(x, y) dx \quad (1.7)$$

Здесь T_w — температура стенки, Параметр a — коэффициент аккомодации

$$a = (e_{1i} - e_{1r}) / (e_{1i} - e_{1w}) \quad (1.8)$$

Здесь e_{1i} — полный падающий поток энергии, e_{1w} — энергия, уносимая от стенки отраженными молекулами при температуре стенки T_w .

При диффузном отражении молекулы создают давление [2]

$$p_{1r}^{\circ} = \left[\frac{\pi}{2} \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} e_{1r} n_1 \right]^{1/2} \quad (1.9)$$

Молекулы, которые после отражения падают вновь на поверхность, не дают вклада в полные аэродинамические силы. Они создают напряжения, которые при интегрировании по всей поверхности сокращаются, так как встречаются дважды с противоположными знаками. Поэтому их целесообразно исключить в выражениях для локальных аэродинамических характеристик. Локальные давления и тепловой поток примут вид

$$p_{1r} = p_{1r}^{\circ} \left(\frac{\theta_0^{(1)}}{\pi} - \frac{\sin 2\theta_0^{(1)}}{2\pi} \right), \quad \tau_{1r} = p_{1r}^{\circ} \frac{\sin^2 \theta_0^{(1)}}{\pi}, \quad q_1 = e_{1i}^{\circ} - e_{1r} \frac{(1 - \cos \theta_0^{(1)})}{2} \quad (1.10)$$

Аналогичные формулы имеют место для второй пластинки. Для изолированной плоской поверхности под углом атаки θ можно записать [8]

$$p(z) = \frac{1}{4s^2} \left[1 + \Phi(z) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} z \kappa(z) + \left(\frac{T_r}{T_i} \right)^{1/2} \kappa(z) \right], \quad \tau(z) = \frac{\cos \theta}{2s \sqrt{\pi}} \kappa(z)$$

$$q(z) = a \frac{\kappa(z)}{4 \sqrt{\pi} s^3} \left[\frac{1}{1 + \varphi(z)} + 2s^2 + \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \left(1 - \frac{T_w}{T_i} \right) \right] \quad (1.11)$$

$$\kappa(z) = \exp(-z^2) + \sqrt{\pi} z [1 + \Phi(z)], \quad \varphi(z) = \frac{\exp(-z^2)}{\sqrt{\pi} z [1 + \Phi(z)]}$$

$$\frac{T_r}{T_i} \approx (1 - a) \left[1 + \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} (1 + 2s^2) \right] + a \frac{T_w}{T_i}, \quad z = s \sin \theta$$

Обозначим не взаимодействующие поверхности пластинок 1, 2 верхним индексом «минус»; с выпуклой стороны на пластинки 1, 2 действуют силы

$$p_1^- = -p(z_1), \quad \tau_1^- = \tau(z_1), \quad q_1^- = q(z_1); \quad p_2^- = -p(z_2), \quad \tau_2^- = \tau(z_2) \quad (1.12)$$

$$q_2^- = q(z_2), \quad z_1 = s \sin(\delta - \omega), \quad z_2 = s \sin(-\omega - \delta)$$

Общие локальные напряжения определяются суммой

$$p_1 = p_1^{\circ} + p_{1r} + p_1^-, \quad \tau_1 = \tau_1^{\circ} + \tau_{1r} + \tau_1^-, \quad p_2 = p_2^{\circ} + p_{2r} + p_2^-, \quad \tau_2 = \tau_2^{\circ} + \tau_{2r} + \tau_2^- \quad (1.13)$$

После проектирования напряжений (1.13) на оси X, Y и интегрирования по поверхности аэродинамические коэффициенты и тепловой поток примут вид

$$C_x = \frac{R_x}{\rho U^2 L} = \int_0^1 [p_1 \sin(\omega - \delta) + \tau_1 \cos(\omega - \delta)] dx +$$

$$+ \int_0^1 [p_2 \sin(\omega + \delta) + \tau_2 \cos(\omega + \delta)] dy$$

$$C_y = \frac{R_y}{\rho U^2 L} = \int_0^1 [p_1 \cos(\omega - \delta) - \tau_1 \sin(\omega - \delta)] dx +$$

$$+ \int_0^1 [-p_2 \cos(\omega + \delta) + \tau_2 \sin(\omega + \delta)] dy \quad (1.14)$$

$$C_m = \frac{M_2}{\rho U^2 L^2} = - \int_0^1 p_1 x dx + \int_0^1 p_2 y dy, \quad q = \frac{2Q}{\rho U^3 L} = \int_0^1 q_1 dx + \int_0^1 q_2 dy + q_1^- + q_2^-$$

Здесь R_x, R_y — проекции главного вектора аэродинамических сил на оси X, Y ; M_z — момент аэродинамических сил относительно ребра клина; L — ширина одной пластинки; Q — общий тепловой поток.

Для сравнения влияния многократного отражения и однократного на аэродинамические коэффициенты рассматриваются характеристики некоторого выпуклого тела, которое получается из клина, если закрыть клиновидную полость пластинкой 3 бесконечной длины и шириной $2L \sin \omega$.

Аэродинамические коэффициенты для такого тела примут вид

$$C_x^{\circ} = C_x^{-} + (p_3 \cos \delta + \tau_3 \sin \delta) 2 \sin \omega, \quad C_y^{\circ} = C_y^{-} + (p_3 \sin \delta - \tau_3 \cos \delta) 2 \sin \omega \quad (1.15)$$

$$C_m^{\circ} = C_m^{-} + \tau_3 2 \sin \omega \cos \omega, \quad q^{\circ} = q_1^{-} + q_2^{-} + q_3$$

Здесь $C_x^{-}, C_y^{-}, C_m^{-}$ — аэродинамические коэффициенты, полученные от проекции локальных напряжений (1.12) на оси X, Y ,

$$p_3 = p(z_3), \quad \tau_3 = \tau(z_3), \quad q_3 = q(z_3), \quad z_3 = s \sin(1/2\pi - \delta)$$

2. Целесообразно рассмотреть уравнения (1.6) в локальных полярных координатах (R, θ) , т. е. перейти к интегрированию по углам. Несложные преобразования приводят к уравнениям вида

$$n_1(x) = n_1^{\circ} + \frac{1}{2} \int_{\theta_0^{(1)}}^{\pi} n_2(y) \sin \theta_1 d\theta_1, \quad y = x \frac{\sin \theta_1}{\sin(\theta_1 - 2\omega)} \quad (2.1)$$

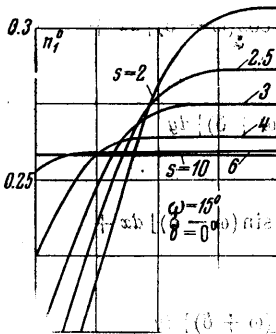
$$n_2(y) = n_2^{\circ} + \frac{1}{2} \int_{\theta_0^{(2)}}^{\pi} n_1(x) \sin \theta_2 d\theta_2, \quad x = y \frac{\sin \theta_2}{\sin(\theta_2 - 2\omega)}$$

Для угловой точки $x \rightarrow 0, y \rightarrow 0$ система уравнений (2.1) дает точное выражение для потока молекул

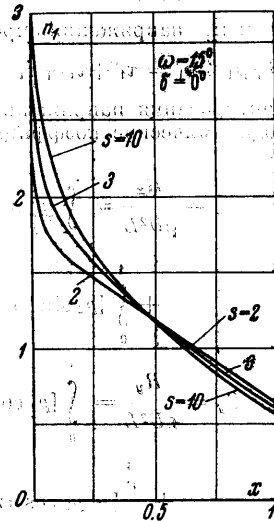
$$n_1(0) = \frac{n_1^{\circ}(0) + \cos^2 \omega n_2^{\circ}(0)}{1 - \cos^4 \omega}, \quad n_2(0) = \frac{n_2^{\circ}(0) + \cos^2 \omega n_1^{\circ}(0)}{1 - \cos^4 \omega} \quad (2.2)$$

После аналогичных преобразований из уравнений (1.7) нетрудно получить выражения для энергии отражения в угловой точке $e_{1r}(0), e_{2r}(0)$.

Уравнения (1.6), (1.7) решались численно на ЭЦВМ-20. Область $[0, 1]$ определения функций $n_1(x), n_2(y)$ разбивалась на шестнадцать частей, и вводилась квадратичная интерполяция. После интегрирования по узлам интерполяции системы уравнений (1.6), (1.7) свелось к системам алгебраических уравнений 34-го порядка, которые решались методом обращения матрицы. Как показали оценки, ошибки в интегралах с разбиением области интегрирования на 16 частей меньше 0.1%. Интегралы (1.3) вычислялись с абсолютной точностью 10^{-5} .

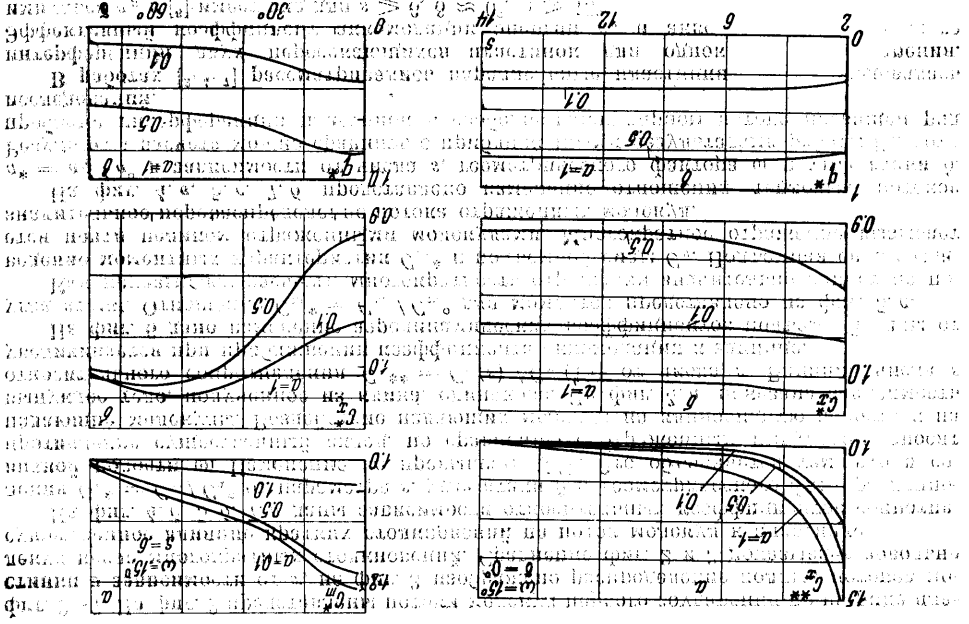


Фиг. 2



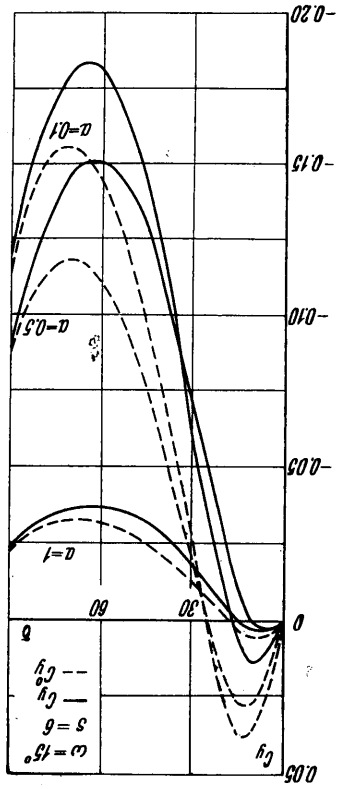
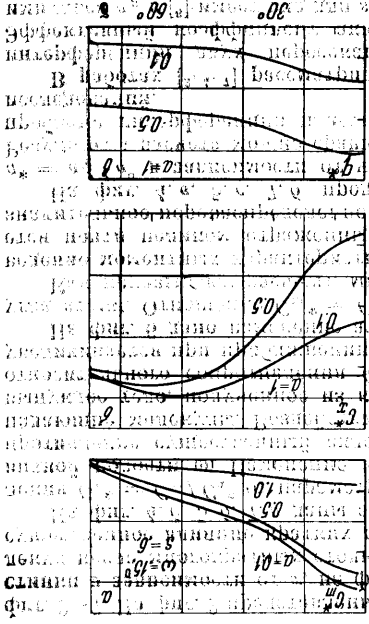
Фиг. 3

Расчеты выполнены для разных чисел s, ω, δ . Отношение удельных теплоемкостей принималось равным 1.4, параметр $T_w : T_i = 0.5$. Результаты приведены на

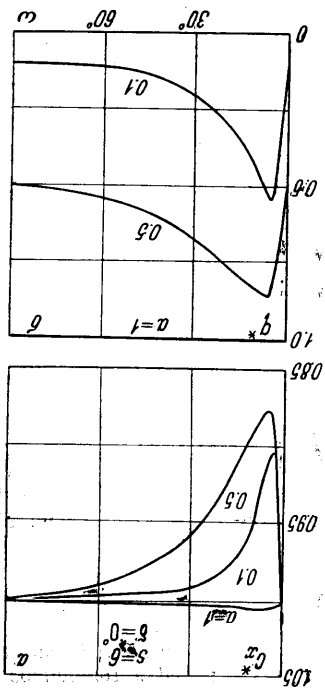


Фиг. 4

Фиг. 5



Фиг. 6



Фиг. 7

фиг. 2—7. На фиг. 2 представлены потоки молекул первого соударения по ширине пластинки в зависимости от x , на фиг. 3 изображено распределение полных потоков молекул после многократных столкновений. Сравнение фиг. 2 и 3 показывает довольно существенное влияние кратких столкновений на поток молекул к пластинке.

На фиг. 4, б, 5, б, 7, а даны зависимости относительных коэффициентов сопротивления $C_x^* = C_x / C_x^0$ от параметра s , угла атаки δ и геометрического фактора клиновидной полости ω . Изменение не превышает 15%. Это объясняется тем, что в сопротивление существенный вклад, по сравнению с отраженным импульсом, вносят падающие молекулы. Воздействие падающих молекул на клиновидную полость и на выпуклое тело, полученное из клина, одинаково. На фиг. 4, а показана зависимость относительного сопротивления $C_x^{**} = C_x(s) / C_x(15)$ от числа s . Влияние числа s увеличивается при приближении коэффициента аккомодации к единице.

На фиг. 6 дано изменение аэродинамических коэффициентов подъемной силы от угла атаки. Отношение $C_m^* = C_m / C_m^0$ для моментов представлено на фиг. 5, а.

Как показывают расчеты, многократность отражения значительно влияет на поведение моментных характеристик C_m^* и подъемной силы C_y . Подъемная сила создается почти целиком отраженными молекулами. Многократное отражение вызывает значительное перераспределение потока отраженных молекул.

На фиг. 4, в, 5, в, 7, б представлено изменение отношения тепловых потоков $q^* = aq / q^0$ в зависимости от числа s , геометрического фактора ω и угла атаки δ . Результаты расчета можно сравнить с приближенными результатами работы [6], хотя проблеме интерференции пластинок в свободномолекулярном потоке посвящен ряд исследований.

В работах [3, 4, 7] рассматривались параллельные пластинки, в [5] исследовалась интерференция двух пересекающихся пластинок для однократного соударения. Эффективный коэффициент аккомодации энергии a_e и аккомодация нормального импульса a_p в [6] имеет вид для $s \geq 6$, $\delta \approx 0^\circ$, $\omega \geq 15^\circ$

$$a_e \approx q^*, \quad a_p \approx C_x^* \left[1 + \left(\frac{T_r}{T_i} \right)^{1/2} \frac{\sqrt{\pi}}{2s} \right] - 1$$

Тепловые потоки дают хорошее совпадение, отклонение по коэффициентам сопротивления для $\gamma = 5/3$ не превышает 12%. Если для сравнения выбрать аэродинамические коэффициенты клина при $\delta^\circ = \pi + \delta$, то результаты расчета C_x^* , C_y качественно совпадают с результатами работы [2], выполненной для невыпуклой цилиндрической поверхности.

Поступило 28 XI 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Chahine M. T. Free Molecule Flow over Nonconvex Surfaces, Rarefied Gas Dynamics. Academic Press, N. Y., 1961.
2. Sparrow E. M., Johnsson V. K. Lundgreen T. S. Chen T. S. Heat Transfer and Forces for Free Molecule Flow on a Concave Cylindrical Surface. Trans. ASME, 1964, No. 1, p. 86.
3. Sparrow E. M., Kinney R. B. Free Molecule Heat Transfer between Parallel Plates. Phys. Fluids, 1964, vol. 7, No. 3.
4. Kanzi Abe. On the Interaction between two Rectangular Plates in Free Molecule Flow. Trans. Japan. Soc. Aeronaut. and Space Sci., 1964, vol. 7, No. 10.
5. Wani B. T. Aerodynamic Interference in a Free Molecule Flow. Trans. Japan. Soc. Aeronaut. and Space Sci., 1960, vol. 3, No. 4.
6. Ерофеев А. И. Обтекание клиновидной полости свободномолекулярным потоком газа. Инж. ж., 1965, т. 5, № 5.
7. Бунимович А. И., Каган М. Л. Свободномолекулярное течение газа в плоских каналах и решетках. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 3.
8. Patterson G. N. Molecular Flow of Gases. N. Y.—London, 1956 (русск. перев.: Паттерсон Г. Н. Молекулярное течение газов. Физматгиз, 1960).
9. Hayes W. D., Probstein R. F. Hypersonic Flow Theory. Academic Press, N. Y.—L., 1959 (русск. перев.: Хейз У. Д., Пробстин Р. Ф. Теория гиперзвуковых течений. Изд. иностр. лит., 1962).
10. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Физматгиз, 1963.