

ПАДЕНИЕ ПЛОСКОЙ СВЕРХЗВУКОВОЙ СТРУИ НА ПЛОСКОСТЬ
ПОД ПРОИЗВОЛЬНЫМ УГЛОМ

В. Г. БУКОВШИН, Н. П. ШЕСТОВА

(Москва)

Излагается метод решения и приводятся результаты численных расчетов по задаче об определении дозвуковой части течения при падении плоской однородной сверхзвуковой струи на плоскость под произвольным углом, соответствующим режиму обтекания с отсоединенной ударной волной. Для решения задачи использовался метод интегральных соотношений в первом приближении в полярной системе координат. Результаты расчетов (распределение давления на пластине, форма ударной волны и величина градиента скорости в критической точке) приведены для чисел Маха, равных 5 и 20, в диапазоне углов падения от 0 до 35°, а также для $M_\infty = 3$ при угле падения 0° (отсчет углов ведется от нормали к пластине).

§ 1. Решение задачи о взаимодействии плоской сверхзвуковой струи с препятствиями, помимо самостоятельного значения (при определении действующих на тела, находящиеся в плоских струях, сил и тепловых потоков), может быть использовано в ряде случаев для исследования взаимодействия сверхзвукового течения (фиг. 1) за ударной волной 4, образующейся при обтекании основного тела 1, с другим телом 2, расположенным в области влияния основного тела.

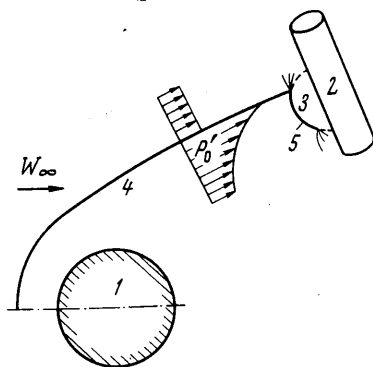
Струйная схематизация картины взаимодействия предварительно сжатого в ударной волне сверхзвукового потока воздуха с телами.

предложенная Г. И. Тагановым¹, основана на том, что при гиперзвуковых скоростях невозмущенного потока перед областью взаимодействия в потоке сжатого газа, непосредственно прилегающего к наклоненной части ударной волны 4, величина p_0' (полное давление за прямым скачком) значительно больше соответствующей величины вне слоя сжатого газа (фиг. 1). Поэтому влиянием течения вне слоя сжатого газа на течение в дозвуковой области 3 за ударной волной 5 перед телом 2, помещенным в слой сжатого газа, в первом приближении можно пренебречь. Это означает, что действительная картина течения в области 3 будет приблизительно такой же, как при струйном обтекании.

Неоднородность и непотенциальность течения в сжатом слое газа в общем случае рассматриваемого взаимодействия приводят к необходимости при струйной схематизации реальной картины течения рассматривать неоднородные непотенциальные струи.

Как первый шаг в этом направлении могут быть получены решения для однородных потенциальных струй. Это дает возможность (при соответствующем осреднении параметров течения в прилегающем к волне слое газа) оценить силы, действующие на тело 2, и градиент скорости в критической точке на этом теле, определяющий интенсивность теплопередачи в ее окрестности.

Ниже рассматривается падение плоской потенциальной сверхзвуковой струи на плоскость под произвольным углом. Для решения задачи об определении течения в области 3, возникающей при обтекании плоскости с отсоединенной ударной волной (рассматриваемый случай взаимодействия), используется метод интегральных соотношений в первом приближении. Первоначально ($M_\infty = 3.0$, $\alpha = 0$) использовалась декартова система координат с аппроксимациями подынтегральных функций, предложенными в работе [1]. Однако для случаев падения струи при $M_\infty > 4$ оказалось, что скорость на теле достигает значения, равного местной скорости звука, раньше, чем на ударной волне. Так как звуковая точка на теле при использовании декартовой системы координат будет особой точкой для аппроксимирующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений, то не представлялось возможным, имея только один свободный параметр — расстояние от плоскости до ударной волны в критической точке z_0 , удовлетворить двум условиям: 1) пройти особую точку так, чтобы решение оставалось регулярным и 2) получить на границе струи величину скорости, соответствующую физически возможной (большую или равную местной скорости звука). Возможность обойти эти трудности численного решения реализу-

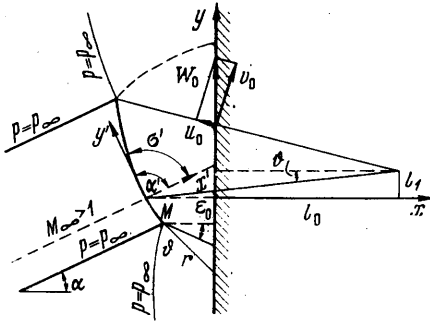


Фиг. 1

¹ Энтропийные эффекты в гиперзвуковых течениях газа. Доклад на II Всесоюзном съезде механиков, Москва, 1964.

ется при использовании полярной системы координат, так как положения струи, плоскости и полюса координатной системы могут быть выбраны таким образом, чтобы скорость на плоскости не принимала значения, соответствующего наличию особой точки.

Для выяснения правильности выбранных граничных условий на ударной волне (равенство скорости на границе струи за ударной волной местной скорости звука) в случае $M_\infty = 3.0$, $\alpha = 0^\circ$ с использованием декартовой системы координат были проведены соответствующие расчеты. Оказалось, что если решение в потоке за границей струи отыскивать, используя метод интегральных соотношений в полярной



Фиг. 2

системе координат с полюсом в точке M пересечения ударной волны и границы струи (фиг. 2), в которой имеет место течение Прандтля-Майера, то условию прохождения через особую точку на теле (условию регулярности решения в этой точке) соответствует на границе струи за ударной волной величина скорости, с точностью до 1% равная скорости звука. При этом градиенты скорости в критической точке на плоскости и распределение скорости вдоль плоскости в значительной окрестности критической точки практически не зависят от изменения величины скорости на границе струи на один процент.

Заметим, что при сращивании решений, полученных методом интегральных соотношений в первом приближении в декартовой системе координат для основного участка течения и в полярной системе координат для течения разрежения, на линии сращивания терпят разрыв производные по нормали в эллиптической области. Это значит, что регулярность решения фактически нарушается до достижения особой точки на теле. Поэтому при расчетах для $M_\infty > 4$ отыскивалось решение в дозвуковой области течения, соответствующее звуковым точкам на границе струи. При этом положение полюса полярной системы координат основного участка течения выбиралось таким образом, чтобы на последнем луче на теле скорость также была звуковой.

Проверочные расчеты показали, что заметное изменение условия на плоскости практически не влияет на величину градиента скорости в критической точке и на распределение скорости в значительной ее окрестности.

§ 2. Придерживаясь обозначений, использованных в работе [1], основные уравнения движения газа в полярной системе координат могут быть записаны в виде (фиг. 2)

$$\frac{\partial rH}{\partial r} + \frac{\partial S}{\partial \theta} = g, \quad \frac{\partial rh}{\partial r} + \frac{\partial t}{\partial \theta} = 0, \quad \varphi = \frac{p}{\rho^x} = \varphi(\psi), \quad \frac{d\psi}{d\theta} = \rho \left(v \frac{dr}{d\theta} - ru \right) \quad (2.1)$$

$$H = kp + \rho u^2, \quad S = \rho uv, \quad t = (1 - W^2)^{1/(\kappa-1)}v, \quad h = (1 - W^2)^{1/(\kappa-1)}u$$

$$g = kp + \rho v^2$$

Эти уравнения решаются при условиях:

а) на плоскости ($r_0 = l_0 \sec \theta$)

$$v_0 \operatorname{tg} \theta = u_0, \quad \text{или} \quad W_0 = (v_0 \sec \theta) \quad (2.2)$$

б) на ударной волне $r_1 = (l_0 + \varepsilon) \sec \theta$

$$u = W_y \sin \theta - W_x \cos \theta, \quad v = W_x \sin \theta + W_y \cos \theta, \quad W_y = W_y' \cos \alpha + W_x' \sin \alpha$$

$$W_x = W_x' \cos \alpha - W_y' \sin \alpha, \quad W_y' = \frac{W_\infty}{\kappa + 1} \sin 2\sigma' \left(1 - \frac{1}{M_\infty^2 \sin^2 \sigma'} \right) \quad (2.3)$$

$$W_x' = W_\infty \left[1 - \frac{2}{\kappa + 1} \sin^2 \sigma' \left(1 - \frac{1}{M_\infty^2 \sin^2 \sigma'} \right) \right]$$

Здесь σ' — угол между направлением волны и направлением невозмущенного потока (фиг. 2).

Выше и в дальнейшем скорости отнесены к максимальной скорости, давление и плотность к полному давлению и плотности торможения перед волной в набегающем потоке. Кроме того, на волне

$$p = \frac{4\kappa}{\kappa^2 - 1} (1 - W_\infty^2)^{\kappa/(\kappa-1)} \left[\frac{W_\infty^2 \sin^2 \sigma'}{1 - W_\infty^2} - \frac{(\kappa - 1)^2}{4\kappa} \right]$$

$$\rho = \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} (1 - W_\infty^2)^{1/(\kappa-1)} \frac{W_\infty^2}{1 + (1 - W_\infty^2) \operatorname{ctg}^2 \sigma'} \quad (2.4)$$

$$\varphi = \frac{4\kappa}{\kappa^2 - 1} \left(\frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \right)^\kappa \left[\frac{W_\infty^2 \sin^2 \sigma'}{1 - W_\infty^2} - \frac{(\kappa - 1)^2}{4\kappa} \right] \left[\frac{1 + (1 - W_\infty^2) \operatorname{ctg}^2 \sigma'}{W_\infty^2} \right]^\kappa$$

$$x = -(l_0 + \varepsilon), \quad y = (l_0 + \varepsilon) \operatorname{tg} \vartheta + l_1, \quad dy/dx = \operatorname{tg} \sigma$$

(линия $y = 0$ всегда выбирается проходящей через точку ударной волны, в которой $\sigma' = 1/2\pi$). Отсюда

$$\frac{d\varepsilon}{d\vartheta} = -(l_0 + \varepsilon) \frac{\cos \sigma}{\cos \vartheta \sin(\sigma + \vartheta)} \quad (2.5)$$

Интегрирование первых двух уравнений системы (2.1) по r от стенки (индекс 0) до волны (индекс 1) дает

$$r_1 H_1 - r_0 H_0 + \frac{d}{d\vartheta} \int_{r_0}^{r_1} S dr - S_1 \frac{dr_1}{d\vartheta} + S_0 \frac{dr_0}{d\vartheta} = \int_{r_0}^{r_1} g dr \quad \left(r_0 = \frac{l_0}{\cos \vartheta} \right)$$

$$r_1 h_1 - r_0 h_0 + \frac{d}{d\vartheta} \int_{r_0}^{r_1} t dr - t_1 \frac{dr_1}{d\vartheta} + t_0 \frac{dr_0}{d\vartheta} = 0 \quad \left(r_1 = \frac{l_0 + \varepsilon}{\cos \vartheta} \right)$$

Применяя линейную аппроксимацию подынтегральных функций и используя точные соотношения на плоскости и на ударной волне, после необходимых преобразований будем иметь систему дифференциальных уравнений вида

$$\frac{d\sigma'}{d\vartheta} = \frac{f_1}{f_2}, \quad \frac{dv_0}{d\vartheta} = \frac{f_3}{f_2} \quad (2.6)$$

Здесь функции f_i ($i = 1, 2, 3$) выражаются через известные параметры на плоскости и ударной волне.

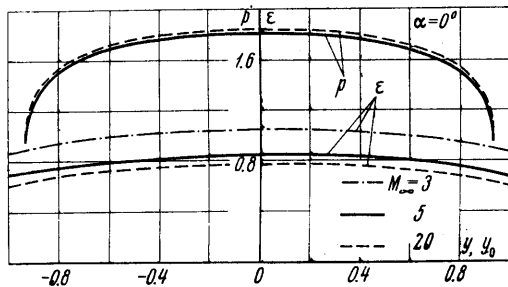
Таким образом, задача сводится к решению уравнений (2.6) и (2.5) вместе с конечными соотношениями на волне (2.3), (2.4), на плоскости (2.2) и условиями на границе струи (скорость за волной равна местной скорости звука). Решение в общем случае зависит от параметров ε_0 , l_0 , и l_1 , которые в задаче выбирались таким образом, чтобы удовлетворялись условия:

1. На границах струи скорости за ударной волной равны скорости звука (ширина струи принималась равной 2).

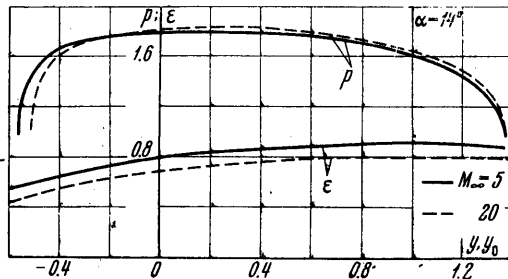
2. Скорости на пластине в точке пересечения ее последним лучом равны скорости звука.

Решение системы дифференциальных уравнений получено численно методом Эйлера. Интегрирование проводилось в обе стороны от луча

$$\vartheta = \arctg[-l_1 / (l_0 + \varepsilon_0)]$$



Фиг. 3

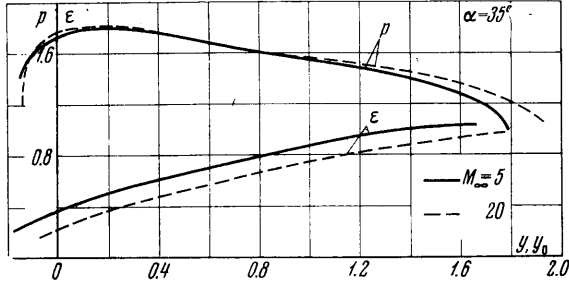


Фиг. 4

($l_1 > 0$, если полюс полярной системы координат расположен выше линии $y = 0$), происходящего через точку ударной волны, в которой $\sigma' = 1/2\pi$ до получения вышеуказанных условий на последних лучах. Скорость в точке пересечения начального луча с плоскостью определялась из условия равенства нулю расхода через отрезок этого луча, заключенного между плоскостью и ударной волной

$$\int_{r_0}^{r_1} \rho v dr = 0$$

при линейной аппроксимации подынтегрального выражения по длине отрезка. Предполагалось, что линия тока, смачивающая плоскость, проходит через участок ударной волны, наклоненный к направлению скорости под углом $\sigma' = 1/2\pi$. Это



Фиг. 5

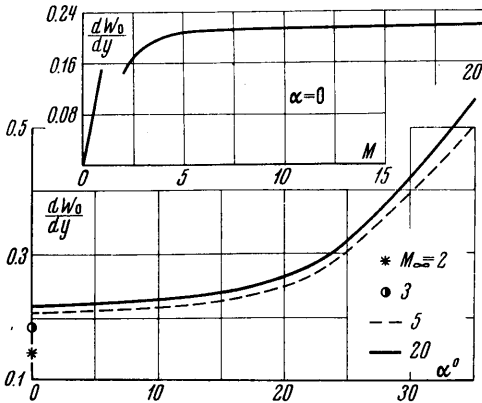
предположение дает возможность по известной скорости определять все параметры потока на плоскости.

На последнем луче с той стороны, где ударная волна ближе к плоскости, условие равенства скорости W_0 местной скорости звука удовлетворялось примерно с точностью до одного шага интегрирования, т. е. на следующем шаге скорость на стенке становилась сверхзвуковой. Шаг интегрирования по y был порядка 0.0003.

Во всех расчетах линейные размеры относились к полуширине струи.

§ 3. Расчеты проводились в диапазоне чисел Маха от 3 до 20 и для углов падения струи от 0 до 35°. В данной статье приводятся результаты расчетов для чисел Маха 5 и 20 в указанном диапазоне углов падения и для $M_\infty = 3$ при угле падения 0°.

На фиг. 3—5 приведены распределения на плоскости безразмерного давления p , равного отношению разности статических давлений на стенке и в невозмущенной струе к скоростному напору в струе перед волной, и полученные формы ударной волны при углах падения α , равных 0, 14 и 35°. Приводим результаты вычислений



Фиг. 6

давления p и отхода скачка ϵ для некоторых значений y и y_0 при различных значениях M_∞ и углов падения струи α .

$y, y_0 = -0.1$	0	0.4	0.8	1.2	1.6	
$p = 1.806$	1.809	1.753	1.490	--	--	$(M_\infty = 5, \alpha = 0^\circ)$
$\epsilon = 0.861$	0.863	0.841	0.766	--	--	
$p = 1.834$	1.837	1.783	1.525	--	--	$(M_\infty = 20, \alpha = 0^\circ)$
$\epsilon = 0.774$	0.776	0.754	0.685	--	--	
$p = 1.650$	1.740	1.728	1.621	1.450	1.270	$(M_\infty = 5, \alpha = 35^\circ)$
$\epsilon = 0.330$	0.400	0.580	0.810	0.960	1.06	
$p = 1.642$	1.778	1.769	1.627	1.510	1.35	$(M_\infty = 20, \alpha = 35^\circ)$
$\epsilon = --$	0.25	0.500	0.671	0.84	0.935	

На фиг. 6 представлено изменение градиента скорости в критической точке по углам падения струи для чисел Маха 5 и 20, а также приведены значения градиента скорости в критической точке для нулевого угла падения при $M_\infty = 2.0$ и 3.0, рассчитанные с использованием декартовой системы координат при условии, что скорость за волной на границе струи равна местной скорости звука. Из приведенных данных следует, что в рассмотренном диапазоне изменения чисел Маха градиент скорости в критической точке увеличивается как с увеличением числа Маха, так и с увеличением угла падения струи. Увеличение градиента скорости с углом падения струи тем больше, чем больше угол падения.

Здесь же (фиг. 6) показано изменение величины градиента скорости при $\alpha = 0$, полученное в данной работе для чисел $M_\infty > 2$ и в [2] для чисел $M_\infty < 1.0$, в зависимости от чисел Маха M_∞ . Получить аналогичные результаты при $1 < M_\infty < 2$ методом интегральных соотношений в первом приближении не удалось.

В заключение авторы статьи благодарят Г. И. Таганова за руководство работой.

Поступило 16 VII 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Белоцерковский О. М. Обтекание симметричного профиля с отошедшей ударной волной. ПММ, 1958, т. 22, вып. 2.
2. Буковшин В. Г., Шестова Н. П. Падение плоской дозвуковой струи на плоскость под произвольным углом. Инж. ж., 1965, т. 5, № 4.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ОТНОШЕНИЯ ТЕПЛОЕМКОСТЕЙ НА ДОННОЕ ДАВЛЕНИЕ ЗА КОЛЬЦЕВЫМ УСТУПОМ

Н. Н. СЛАВЯНОВ, Р. К. ТАГИРОВ

(Москва)

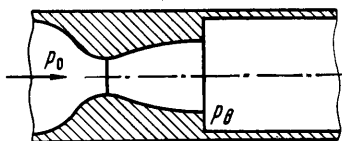
Экспериментальных данных, позволяющих установить влияние отношения теплоемкостей γ на донное давление, практически нет. Имеющиеся расчетные данные для плоского уступа [1], во-первых, сами нуждаются в экспериментальной проверке, во-вторых, не могут быть перенесены на кольцевой уступ.

1. Исследуемая модель состояла из сменных, профилированных по методу характеристик, сопел Лавала с осевым выходом и цилиндрического насадка (фиг. 1). Диаметры выходных сечений всех сопел равнялись 10 мм, насадка — 16 мм, т. е. отношение площади выходного сечения сопел к площади проходного сечения цилиндрического насадка было постоянным $F = 0.39$. Контуры сопел соответствовали четырем значениям $\gamma = 1.67, 1.4, 1.29, 1.15$ и трем значениям чисел $M_\infty = 1.4, 2.2, 3.0$. Изменение чисел γ достигалось применением различных газов: Ar и He ($\gamma = 1.67$), N_2 и воздуха ($\gamma = 1.4$), CO_2 ($\gamma = 1.29$) и CF_3Cl_2 (фреона-12, $\gamma \approx 1.15$).

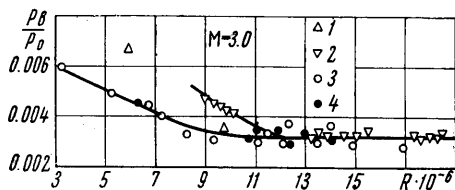
Донное давление p_b измерялось на стенке цилиндрического насадка на расстоянии 1 мм от уступа, а полное давление p_0 — у входного сечения сопла. Ошибка измерения донного давления не превышала 1% при $M = 1.4$ и 2.2 и 5% при $M = 3.0$ а полного давления — 1%.

Во всех исследованиях на основании [2, 3] проверялось отсутствие конденсации газа.

2. Типичные результаты исследования представлены в зависимости от числа Рейнольдса R на фиг. 2 ($R = \rho_0 ul / \mu$, ρ_0 — плотность заторможенного потока, u — максимальная скорость, l — длина сверхзвуковой части сопла, μ — вязкость. Точки 1 — соответствуют He, 2 — Ar, 3 — воздуху, 4 — N_2). Для дальнейшего анализа использовались только те участки кривых, на которых относительная величина донного давления практически перестает зависеть от R .



Фиг. 1



Фиг. 2