

**АЭРОДИНАМИЧЕСКОЕ ДАВЛЕНИЕ НА СТЕНКУ,  
ВЫЗВАННОЕ ДВИЖЕНИЕМ СКОРОСТНОГО ПЕОЗДА**

Г. И. ВЕРНИКОВ, М. И. ГУРЕВИЧ

(Москва)

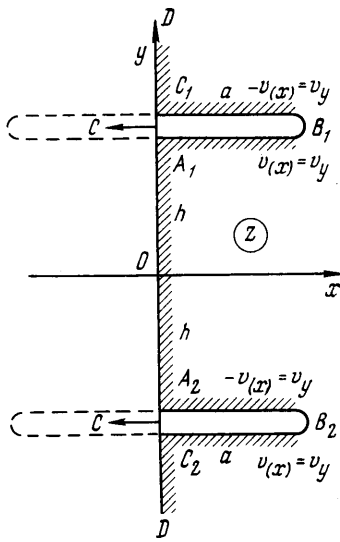
В связи с быстрым ростом скоростей современных поездов вопросы аэродинамики поездов приобрели большое практическое значение. В частности, весьма существенным оказывается аэродинамическое воздействие поездов на людей и строения, находящиеся поблизости от путей.

В настоящей статье сделана попытка оценить давление поезда на длинную стену, параллельную движущемуся поезду.

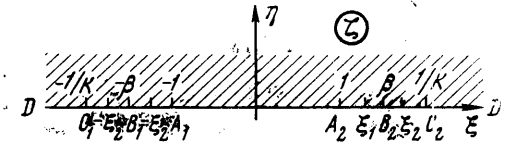
Аналогичные задачи рассматривались для круглых цилиндров и шаров. Литературу и первоначальное изложение вопроса можно найти в классических курсах гидродинамики [1, 2]. Более точное решение задачи о движении круглого цилиндра в присутствии стенки дано В. Ю. Мазуром [3]. Для определения подсосывающей силы, действующей на суда недавно были рассмотрены задачи о движении эллипсоида и некоторых других тел [4-6]. В этих работах рассматривались тела, удлинения которых значительно меньше удлинений поездов. Особо следует обратить внимание на статью Э. Л. Блоха и А. С. Гиневского [5], где дан приближенный метод, который может быть использован и для очень вытянутых тел, если учесть вызываемые ими поперечные скорости.

В предлагаемой вниманию читателей работе используются методы теории тонких крыльев.

**§ 1. Постановка задачи. Общее решение.** Рассмотрим плоскую линеаризованную задачу о равномерном движении тонкого, длинного поезда в присутствии стенки. Поезд движется в направлении оси  $x$  со скоростью  $-C$ .



Фиг. 1



Фиг. 2

Жидкость идеальна и несжимаема. Продолжение течения в нижнюю полуплоскость приводит к задаче о течении вне двух одинаковых купюр, на берегах которых заданы нормальные скорости (фиг. 1). Течение симметрично относительно осей  $x$  и  $y$  (фиг. 1). После отображения правой полуплоскости  $z$  с разрезами на верхнюю полуплоскость параметрического переменного  $\zeta$  (фиг. 2) задача нахождения комплексной скорости  $dw/dz = v_x - iv_y$  сводится к решению простой краевой задачи.

Формула Кристоффеля — Шварца дает

$$\frac{dz}{d\zeta} = -iN \frac{(\zeta - \beta)(\zeta + \beta)}{\sqrt{\zeta - k^{-1}} \sqrt{\zeta - 1} \sqrt{\zeta + k^{-1}} \sqrt{\zeta + 1}} \quad (N = \text{const})$$

Отсюда

$$z = iNk \int_0^{\zeta} \frac{\zeta^2 - \beta^2}{\sqrt{1 - k^2 \zeta^2} \sqrt{1 - \zeta^2}} d\zeta \quad (1.1)$$

Тогда расстояние от поезда до стенки равно

$$h = kN \int_0^1 \frac{(\beta^2 - \xi^2) d\xi}{\sqrt{1 - \xi^2} \sqrt{1 - k^2 \xi^2}} = kN \left( \beta^2 - \frac{1}{k^2} \right) K + \frac{N}{k} E \quad (1.2)$$

Здесь  $K$  и  $E$  — полные эллиптические интегралы первого и второго рода с модулем  $k$ . Половина длины поезда равна

$$a = kN \int_1^{\beta} \frac{\beta^2 - \xi^2}{\sqrt{1 - k^2\xi^2} \sqrt{\xi^2 - 1}} d\xi \quad (1.3)$$

§ 2. Определение вспомогательного параметра  $\beta$ . Величина  $\beta$  определяется из условия  $A_2B_2 = B_2C_2$  или

$$\int_1^{1/k} \frac{\beta^2 - \xi^2}{\sqrt{1 - k^2\xi^2} \sqrt{\xi^2 - 1}} d\xi = 0 \quad (2.1)$$

После приведения интеграла к канонической форме это условие заменяется более удобным. Рассмотрим интеграл

$$I = k \int \frac{\beta^2 - \xi^2}{\sqrt{1 - k^2\xi^2} \sqrt{\xi^2 - 1}} d\xi$$

и сделаем в нем замену переменного

$$t = \sqrt{1 - k^2\xi^2} / k' \quad (k'^2 = 1 - k^2) \quad (2.2)$$

Тогда

$$I = -k\beta^2 \int \frac{dt}{\sqrt{1 - k'^2t^2} \sqrt{1 - t^2}} + \frac{1}{k} \int \frac{\sqrt{1 - k'^2t^2}}{\sqrt{1 - t^2}} dt \quad (2.3)$$

При  $\xi = 1$  и  $\xi = 1/k$  имеем  $t = 1$  и  $t = 0$  соответственно, поэтому условие (2.1) при помощи (2.3) принимает вид

$$\beta^2 = E' / k^2 K' \quad (2.4)$$

Здесь  $K'$  и  $E'$  — полные эллиптические интегралы первого и второго рода с модулем  $k'$ . При помощи (2.4) формулу (1.2) можно преобразовать к виду (см. [7], § 22.735)

$$h = 1/2 N\pi / kK' \quad (2.5)$$

§ 3. Отношение длины поезда к расстоянию до стенки. В соответствии с (1.2) и (1.3)

$$\frac{a}{h} = \left( \int_1^{\beta} \frac{\beta^2 - \xi^2}{\sqrt{1 - k^2\xi^2} \sqrt{\xi^2 - 1}} d\xi \right) \left( \int_0^1 \frac{\beta^2 - \xi^2}{\sqrt{1 - k^2\xi^2} \sqrt{1 - \xi^2}} d\xi \right)^{-1} \quad (3.1)$$

При помощи (2.2) и (2.5) интегралы, входящие в (3.1), можно привести к каноническому виду. После ряда упрощений получается

$$\frac{a}{h} = \frac{2}{\pi} \left[ K'E \left( \arcsin \frac{\sqrt{1 - k^2\beta^2}}{k'}; k' \right) - E'F \left( \arcsin \frac{\sqrt{1 - k^2\beta^2}}{k'}; k' \right) \right] \quad (3.2)$$

Здесь  $F$  — неполный эллиптический интеграл первого рода, а  $E$  — второго рода.  
§ 4. Асимптотические формулы для малых  $k$  (малые относительные расстояния  $h/a$  поезда от стенки). При малых  $k$  (см. [7], § 22.737)

$$\beta^2 \approx [k^2 \ln(4/k)]^{-1} \quad (4.1)$$

Далее, из (3.1)

$$\frac{a}{h} \approx \frac{1}{\pi} \ln \frac{4}{k^2 \ln(4/k)} \quad (4.2)$$

§ 5. Связь между  $z$  и  $\zeta$  на участке  $A_2C_2$ . На участке  $A_2C_2$  имеем  $z = -ih + x$ . Из (1.1) следует

$$\frac{x}{h} = k^2 \frac{2K'}{\pi} \int_1^{\zeta} \frac{\beta^2 - \xi^2}{\sqrt{1 - k^2\xi^2} \sqrt{\xi^2 - 1}} d\xi \quad (5.1)$$

или

$$\frac{x}{h} = \frac{2}{\pi} \left[ K'E \left( \arcsin \frac{\sqrt{1-k^2\xi^2}}{k'}; k' \right) - E'F \left( \arcsin \frac{\sqrt{1-k^2\xi^2}}{k'}; k' \right) \right] \quad (5.2)$$

Наконец, для малых  $k$ , пользуясь тем, что при  $\xi \approx \beta$  величина  $\sqrt{\xi^2-1} \approx \xi$ , можно получить

$$\frac{x}{h} = \frac{a}{h} + \frac{k^2 2K'}{\pi} \left\{ \frac{\beta^2 - \xi^2}{\sqrt{1-k^2\xi^2} + \sqrt{1-k^2\beta^2}} + \beta^2 \ln \frac{\xi(1 + \sqrt{1-k^2\beta^2})}{\beta(1 + \sqrt{1-k^2\xi^2})} \right\} \quad (5.3)$$

**§ 6. Определение формы поезда.** Найдем форму поезда вдоль верхнего берега разреза  $A_2B_2$ . Если  $v_y = -v_x$  — вертикальная составляющая скорости на поверхности поезда, а  $-C$  — скорость поезда, то для формы поезда имеем

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{v(x)}{C}, \quad \text{или} \quad y = \frac{1}{C} \int_x^a v(x) dx$$

Ширина поезда равна

$$2b = \frac{2}{C} \int_0^a v(x) dx \quad (6.1)$$

Вдоль  $B_2C_2$  имеем  $dy/dx = v(x)/C$ .

**§ 7. Определение комплексной скорости течения.** Если форма поезда задана, то, естественно, задана и функция  $v(x)$ . Так как, в соответствии с § 5, известна связь между  $x$  и  $\zeta$ , то можно считать, что на поверхности поезда, т. е. на частях  $A_1B_1C_1$  и  $A_2B_2C_2$  действительной оси  $\zeta = \xi$ , всюду известна функция  $v_y(\xi) = -v_x(-\xi)$ . На остальных частях действительной оси  $\zeta$  скорость  $v_y$  равна нулю. Поэтому задача определения  $dw/dz = v_x - iv_y$  в верхней полуплоскости по известной мнимой части  $-v_y$  решается при помощи формулы Шварца для верхней полуплоскости  $\zeta$

$$\frac{dw}{dz} = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v_y(\xi) d\xi}{\xi - \zeta}$$

Пользуясь симметрией  $v_y(\xi)$  и тем, что вне интервалов  $(-k^{-1}, -1)$  и  $(1, k^{-1})$  скорость  $v_y = 0$ , можно найти окончательно

$$\frac{dw}{dz} = -\frac{2}{\pi} \int_1^{1/k} \frac{v_y(\xi) \xi d\xi}{\xi^2 - \zeta^2} \quad (7.1)$$

Оси  $x$ , т. е. стенке, мимо которой движется поезд, соответствует мнимая ось  $\zeta = i\eta$ . Поэтому скорость на стенке определяется формулой

$$\frac{dw}{dz} = v_x(\eta) = -\frac{2}{\pi} \int_1^{1/k} \frac{v_y(\xi) \xi d\xi}{\xi^2 + \eta^2} \quad (7.2)$$

Давление на стенку находится при помощи интеграла Бернулли, примененного для относительной скорости жидкости (поезд неподвижен, и на него набегаёт поток со скоростью  $C$ ). Наконец, формулы (1.1) и (2.5) дают

$$z = x = \frac{2k^2 h K'}{\pi} \int_0^\eta \frac{\eta^2 + \beta^2}{\sqrt{1+k^2\eta^2} \sqrt{1+\eta^2}} d\eta \quad (7.3)$$

Очевидно, что для расчета связи между  $x$  и  $\eta$  эллиптический интеграл, входящий в (7.3), следует предварительно привести к канонической форме. Для малых  $k$  легко получить

$$\frac{x}{h} = \frac{2k^2}{\pi} \ln \frac{4}{k} \left[ \frac{\eta \sqrt{\eta^2 + 1}}{2} + \left( \beta^2 - \frac{1}{2} \right) \ln(\eta + \sqrt{\eta^2 + 1}) \right] \quad (7.4)$$

В общем случае при любых  $k$

$$\frac{x}{h} = \frac{2}{\pi} \left\{ E'F(\varphi; k') + K' \left[ \eta \left( \frac{1+k^2\eta^2}{1+\eta^2} \right)^{1/2} - E(\varphi; k') \right] \right\}$$

$$\varphi = \arcsin \left( \frac{\eta^2}{1+\eta^2} \right)^{1/2} \quad (7.5)$$

§ 8. Некоторые результаты числовых расчетов для поездов с заостренными формами. При помощи интеграла Бернулли определялся безразмерный коэффициент давления

$$p_{(n)}^* = \frac{p_{(n)} - p_{\infty}}{1/2 \rho C^2} = -v_{(n)}^* (2 + v_{(n)}^*) \quad (v_{(n)}^* = v_x(\eta)/C) \quad (8.1)$$

В случае клиновидной формы поезда, согласно (7.2),

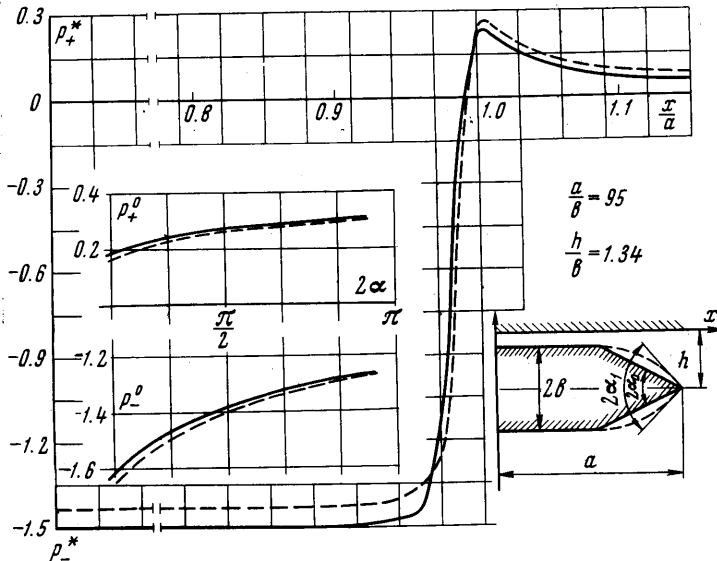
$$v_{(n)}^* = -\frac{\operatorname{tg} \alpha_0}{\pi} \ln \frac{(\xi_1^2 + \eta^2)(\xi_2^2 + \eta^2)}{(\beta^2 + \eta^2)^2} \quad (8.2)$$

Здесь  $\xi_1$  и  $\xi_2$  — образы точек сопряжения прямолинейной части контура поезда с клином.

Приводим результаты вычислений распределения давления на стенке для значенных параметров  $a/b = 95$ ,  $h/b = 1.34$ ,  $\operatorname{tg} \alpha_0 = 1/2$ ,  $\operatorname{tg} \alpha_1 = 1$

$x/a =$	0	0.937	0.958	0.969	0.979	0.985
$p^* =$	-1.4983	-1.4980	-1.4820	-1.2320	-0.8659	-0.4110
$p^* =$	-1.4249	-1.4243	-1.4192	-1.3015	-1.0664	-0.6408
$x/a =$	0.992	0.997	1.0	1.004	1.008	1.012
$p^* =$	-0.0185	0.1377	0.2047	0.2301	0.2345	0.2281
$p^* =$	-0.1393	0.0930	0.1992	0.2433	0.2557	0.2518
$x/a =$	1.016	1.020	1.024	1.050	1.084	1.126
$p^* =$	0.2164	0.2024	0.1877	0.1240	0.0835	0.0587
$p^* =$	0.2399	0.2243	0.2075	0.1345	0.0892	0.0621

Здесь в первых строках приводятся значения  $p^*$  для клиновидной формы поезда, а во вторых — для параболической.



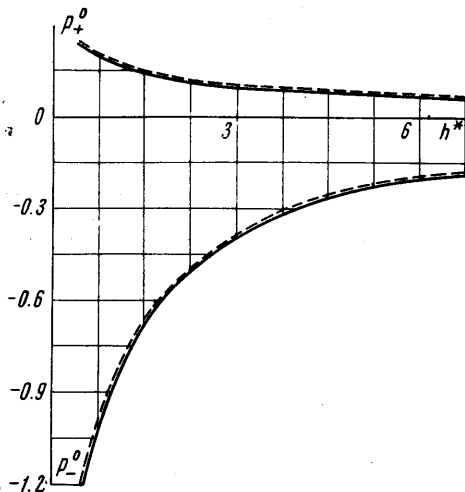
Фиг. 3

По этим данным на фиг. 3 построены сплошная кривая (в случае клиновидной формы поезда) и пунктирная (в случае параболической формы). На этой же фигуре

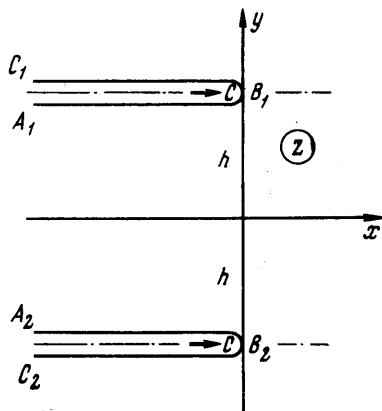
построены кривые  $p_+^{\circ}$  и  $p_-^{\circ}$  в зависимости от угла заострения  $2\alpha$ , причем вычисления дали следующие значения.

$\text{tg } \alpha =$	0.25	0.5	1	2	4	8	
$p_+^{\circ} =$	0.1849	0.2345	0.2670	0.2832	0.2924	0.2962	
$p_-^{\circ} =$	-1.6353	-1.4983	-1.3892	-1.3220	-1.2851	-1.2675	(клин)
$p_+^{\circ} =$	0.1691	0.2178	0.2557	0.2767	0.2893	0.2950	(парабола)
$p_-^{\circ} =$	-	-1.5413	-1.4250	-1.3442	-1.2975	-1.2728	

Влияние расстояния  $h^* = (h/b) - 1$  от поезда до стенки на максимальное давление  $\text{max } p_+^* = p_+^{\circ}$  и подсос  $\text{max } p_-^* = p_-^{\circ}$  приведено на фиг. 4 (пунктирная кривая представляет ту же зависимость для случая параболической формы поезда, причем размеры носовых ча-



Фиг. 4

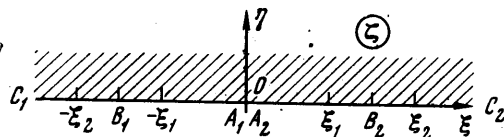


Фиг. 5

стей поездов клиновидной и параболической форм одинаковы, а углы заострения связаны соотношением  $\text{tg } a_1 = 2\text{tg } a_0$ ; в результате расчетов получены следующие значения:

$h^* =$	0.3417	0.7852	0.9655	1.6152	
$p_+^{\circ} =$	0.2345	0.1907	0.1781	0.1410	
$p_-^{\circ} =$	-1.4983	-1.0305	-0.9106	-0.6406	(клин)
$p_+^{\circ} =$	0.2557	0.2087	0.1881	0.1465	(парабола)
$p_-^{\circ} =$	-1.4250	-0.9883	-0.8755	-0.6211	
$h^* =$	1.6666	2.9064	4.2668	6.7154	
$p_+^{\circ} =$	0.1374	0.0985	0.0735	0.0517	
$p_-^{\circ} =$	-0.6277	-0.4008	-0.2887	-0.1901	(клин)
$p_+^{\circ} =$	0.1428	0.1018	0.0753	0.0524	(парабола)
$p_-^{\circ} =$	-0.6088	-0.3922	-0.2839	-0.1880	

Все результаты для клиновидного поезда с различными удлинениями ( $a/b = 51, 95, 139$ ) легли на одну кривую. Это обстоятельство послужило основанием для рассмотрения случая бесконечно длинного поезда, движущегося слева направо со скоростью  $C$ .



Фиг. 6

§ 9. Случай бесконечно длинного поезда. Конформное отображение соответствующих разрезов на верхнюю полуплоскость (фиг. 5 и 6) дается функцией

$$z = h\lambda^{-1}(2\ln \zeta - \zeta^2 + 1) - ih \quad (9.1)$$

Комплексная скорость определяется при помощи интеграла Шварца. После преобразований, аналогичных тем, которые были проведены в § 7, комплексная ско-

рость записывается в виде

$$\frac{dw}{dz} = -\frac{2}{\pi} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{\xi v_y d\xi}{\xi^2 - \zeta^2} \quad (9.2)$$

Здесь  $\xi_1$  и  $\xi_2$  имеют тот же смысл, что и в предыдущем параграфе.

В случае клиновидного поезда распределение давления на стенке, соответствующее носовой части поезда, точно совпало с соответствующим распределением давления для длинных поездов конечной длины.

Поступило 9 III 1967

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ламб Г. Гидродинамика. Гостехиздат, 1947.
2. Милн-Томсон Л. М. Теоретическая гидродинамика. Изд. «Мир», 1964.
3. Мазур В. Ю. Движение кругового цилиндра вблизи вертикальной стенки. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 3.
4. Сабанеев В. С. О движении эллипсоида вращения в жидкости, ограниченной плоской стенкой. Вестн. Ленингр. ун-та, 1958, № 13, вып. 3.
5. Блох Э. Л., Гиневский А. С. О движении системы тел в идеальной жидкости. Тр. научно-техн. об-ва судостр. промышл. им. А. Н. Крылова, 1963, вып. 47.
6. Фаддеев Ю. И. О силах и моментах присоса, действующих на тела вблизи твердой стенки. Тр. научно-техн. об-ва. Судостр. промышл. им. А. Н. Крылова, 1963, вып. 47.
7. Уиттекер Э. Т., Ватсон Г. Н. Курс современного анализа, ч. 2. Гостехиздат, 1934.

### АКУСТИЧЕСКОЕ ВОЗДЕЙСТВИЕ НА АЭРОДИНАМИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ТУРБУЛЕНТНОЙ СТРУИ

Е. В. ВЛАСОВ, А. С. ГИНЕВСКИЙ

(Москва)

В последние годы наряду с экспериментальными и теоретическими исследованиями аэродинамических характеристик турбулентных струйных течений приобретают практический интерес изыскания методов активного, направленного воздействия на эти характеристики. Такое воздействие может быть осуществлено путем изменения начальной неравномерности [1] или начальной турбулентности [2] потока, а также за счет наложения на установившееся в среднем течение низкочастотного пульсирующего потока [3], что наряду с другими эффектами приводит к повышению начальной турбулентности потока.

Поскольку турбулентный пограничный слой и, в частности, турбулентные струйные течения являются генераторами шума, то есть основания полагать, что путем акустического воздействия можно, в свою очередь, несколько изменить аэродинамические параметры такого рода течений. Согласно теории Лайтхилла [4], порождаемые турбулентными потоками акустические возмущения не оказывают обратного влияния на аэродинамические характеристики этих потоков. Отсюда ясно, что для сколь-нибудь заметного изменения аэродинамических характеристик течения интенсивность искусственных акустических возмущений должна существенно превышать интенсивность естественного шума исходного течения.

Известен ряд работ, посвященных исследованию влияния акустических возмущений на пограничный слой [5, 6] и струйные течения [7-10]. Указанные работы в основном посвящены изучению влияния акустических возмущений на потерю устойчивости и переход ламинарного течения в турбулентное. Так, в работах [5, 6] показано, что наложение акустического поля может способствовать либо более раннему переходу (при средних частотах), либо, наоборот, затянута переход (при высоких частотах); низкочастотные акустические возмущения не оказывают влияния на переход.

Воздействие акустических возмущений на струйные течения изучалось в связи с проблемой устойчивости ламинарного течения [7-10]. Вследствие потери устойчивости течения при сравнительно малых числах Рейнольдса в случае истечения струи из плоского или круглого сопла образуются дискретные вихревые нити или вихревые кольца, характеристики которых существенным образом изменяются при наложении акустических возмущений. Отличительной особенностью перечисленных